АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

5368—6446

*

№ 6 1959
ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ
МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), профессор *В. В. Алпатов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология), профессор *В. Ю. Ломоносов* (Электротехника), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *В. В. Покшишевский* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 4
Преподавание математики 6
Основания математики и математическая логика 9
Теория чисел 17
Алгебра 25
Многочлены и линейная алгебра 26
Группы 30
Поля, кольца и структуры 35
Алгебраическая теория схем связи и управления . . . . . —
Топология 44
Теория функций действительного переменного 52
Теория множеств 55
Приближение функций полиномами и их обобщениями 56
Теория функций комплексного переменного . . 57
Дифференциальные уравнения 73
Обыкновенные дифференциальные уравнения 73
Уравнения в частных производных 78
Приложения к физике, технике и естественным наукам 87
Интегральные уравнения . . . . . —
Приложения интегральных уравнений . . . . —
Вариационное исчисление 100
Анализ (другие вопросы) 101
Числовые ряды 103
Специальные функции 108
Интегральные преобразования и операционное исчисление 110
Приложения общих методов математического анализа 111
Функциональный анализ 112
Теория вероятностей 121
Математическая статистика 124
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 128
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 132
Геометрия 137
Элементарная геометрия 138
Аналитическая геометрия 142
Приложения геометрии 143
Проективная геометрия 143
Начертательная геометрия 145
Неевклидовы геометрии 145
Алгебраическая геометрия 148
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 149
Геометрия *n*-мерного пространства 151
Теория относительности 153
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 155
Метрические методы в геометрии 155
Выпуклые многообразия 156
Численные и графические методы 157
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 163
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 176
Авторский указатель 178

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14.

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF THE SCIENTIFIC INFORMATION ACADEMY OF SCIENCE OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

EDITORS OF SERIES: corresponding member *N. V. Ageev* (Metallurgiya), professor *V. V. Alpatov* (Biologiya), professor *E. E. Zakharov* (Geologiya), professor *V. Y. Lomonosov* (Electrotekhnika), professor *S. M. Nikolsky* (Matematika), professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomiya i geodeziya), professor *V. V. Pokshishevsky* (Geografiya), academician *L. I. Sedov* (Mekhanika), *V. V. Serpinsky* (Khimiya), candidate of technical science *V. Z. Freidberg* (Mashinostroenie), professor *I. A. Khvostikov* (Geofizika), professor *E. V. Shpolsky* (Fizika).

CONTENTS

General 1
History. Personalia 4
Teaching of mathematics 6
Foundations. Mathematical logic 9
Theory of numbers 17
Algebra 25
Polynomials, linear algebra 26
Groups 30
Fields, rings, lattices 36
Algebraic theory of communication and control circuits . . . . . —
Topology 44
Theory of functions of real variables 52
Theory of sets 55
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 56
Theory of functions of complex variables 57
Differential equations 73
Ordinary differential equations 73
Partial differential equations 78
Applications to physics, technology and natural sciences 87
Integral equations . . . . . —
Applications of integral equations . . . . . —
Calculus of variations 100
Analysis (other aspects) 101
Numerical series 103
Special functions 108
Integral transforms, operational calculus . . . 110
Applications of general methods of mathematical analysis 111
Functional analysis 112
Theory of probability 121
Mathematical statistics 124
Theory of games, operational research, mathematical economics 128
Applications of probabilities and statistical methods 132
Geometry 137
Elementary geometry 138
Analytical geometry 142
Applications of geometry 143
Projective geometry 143
Descriptive geometry 145
Non-euclidean geometries 145
Algebraic geometry 148
Differential geometry of 3-dimensional space 149
Geometry of *n*-dimensional space 151
Theory of relativity 153
Global theory of differentiable manifolds . . . 155
Metric methods in geometry 155
Convex manifolds 156
Numerical and graphical methods 157
Tables . . . . . —
Computers and mathematical devices 163
Application of computer devices 176
Author index 178

Editorial office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

Главный редактор профессор *С. М. Никольский*

Редакционная коллегия: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, член-корреспондент АН СССР *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, профессор *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

Ученый секретарь канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 5368—6446 | № 6 | Июнь 1959 г.

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

5368. Международный математический конгресс 1958 г. в Эдинбурге (14—21 августа 1958 г). Атен (Internationaler Mathematiker—Kongreß 1958 in Edinburgh (14. bis 21. August 1958). Athen H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 6, 277—278 (нем.)

5369. Международный конгресс по численной обработке информации.— (Congresso internazionale sul trattamento numerico dell'informazione. (Parigi, 15—20 giugno 1959), Ricerca scient., 1958, **28**, № 9, 1962 (итал.)

Информация. Конгресс намечен на 15—20 июня 1959 г. в Париже.

5370. Швейцарское математическое общество (Конференции и сообщения).— (Société mathématique suisse. structure de la connaissance. Paris, Albin Michel, 1957, 39—96, 135—160. Discuss., 97—135 (франц.)

5371. Работа (американской) комиссии по математике. Таккер (The work of the (American) Commission on Mathematics. Tucker A. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 172 (англ.)

5372. IX очередное годовое собрание Общества математиков и физиков НР Хорватии. Вучкич (IX. Redovna godišnja skupština Društva matematičara i fizičara NR Hrvatske. Vučkić M.), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1958, **13**, № 1, 70—71 (сербо-хорв.)

5373. Современные идеи о структуре математики. Лакомб (Les idées actuelles sur la structure des mathématiques. Lacombe Daniel), Notion de structure et structure de la connaissance. Paris, Albin Michel, 1957, 39—96, 135—160. Discuss., 97—135 (франц.)

Логические проблемы, предшествующие математическим рассуждениям, сводятся к выяснению смысла и значения (законности) математических высказываний, а также к определению базовой интуитивной области рассматриваемой математической дисциплины. Логическая эволюция математики состоит в последовательности редукций—репродукций, т. е. сведения данной интуитивной области α к интуитивной области α^1 и построения из α^1 абстрактной системы A, адекватной интуитивному содержанию α. Под аксиоматизацией автор понимает общий метод сведения всей математики к теории множеств, под формализацией—предел процессов редукции—репродукции. Путем формализации возможно сведение математической базовой интуитивной области минимальной арифметике, получающейся в результате применения финитных и интуиционистских требований к интуитивной теории множеств. Таким путем решается проблема «оснований математики в узком смысле». Однако формализация не дает возможности решать некоторые математические проблемы (например, проблему разрешимости); для поисков решения подобных проблем существуют лишь обычные пути—анализ, сравнение и т. д. С помощью формализации возможно также решение определенного круга метаматематических вопросов (например, относящихся к теореме Геделя). В развернувшейся по докладу дискуссии обсуждались пути развития математики и природы и классификация аксиом. В заключение Лакомб выступил с дополнительным сообщением о теореме Геделя.

В. Н. Садовский

5374. Математические понятия и их выражение. Денк (Die mathematischen Begriffe und ihr Ausdruck. Denk F.), Synthese, s. a., **10**, 173—180 (нем.)

В первом разделе «Математические понятия как инструмент» автор подчеркивает, что математические понятия не происходят ни из одной природы, ни из одного мышления, а стоят между ними и оправдываются через практику. Сущность математического понятия автор видит в его действии, что делает его наилучшим инструментом в общениях между людьми.

Во втором разделе «Выражение математических понятий как фиксирование» автор утверждает, что принципом выражения математических понятий является элементаризация. Сложность математических связей такова, что для их выражения недостаточно всего запаса формул. Исходя из идей 1-го раздела, автор полагает, что наступит время, когда системы математических понятий будут сохранять память машин, а не людей.

В третьем разделе «Математическое понятие и понятие ситуации» последняя вводится как инструмент рационального охвата мира. Она содержит в себе и фактор изменяемости, и фактор многосторонних связей. Для распространения математики на область биологических или социальных явлений нужна разработка соответственного понятия ситуации, для чего известных нам средств еще недостаточно. Математические понятия приобретают теоретическую всеобщность лишь если устранена ситуация. Прикладная же математика развивает новую технику счета и рассуждения, чтобы учесть и отразить ситуацию.

Н. А. Киселева

5375. Подобие физических явлений. Брейтман В. М., В сб.: Межвуз. конференция по применению физ. мо-

делирования в электротехн. задачах и матем. моделировании. М., 1957, 28—29

Резюме доклада. Указывается, что с помощью введения «интегральной метрики», инвариантной относительно группы пропорциональных преобразований, возможно описывать подобие и детерминированность сложных явлений, отображаемых полиметрическими функциональными пространствами. Это приводит к важному расширению области применений теории подобия, например, на проблему создания источников с большими токами и пучков заряженных частиц, на проблему расчета магнитных полей в современных ускорителях.

Б. Л. Лаптев

5376. Философия науки Эдмунда Уиттекера. Макконнелл (Sir Edmund Whittaker's philosophy of science. McConnell J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 170 (англ.)

5377. Введение в математическое изучение биологических ассоциаций. Хаймович (Introducere în studiul matematic al asociaţiilor biologice. Haimovici A.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 4, 193—204 (рум.; рез. русск., франц.)

Вопросами математического изучения некоторых биологических процессов начал заниматься Росс (R. Ross) (1911), затем Томпсон (Англия). В 1923 г. итальянский биолог Умберто д'Анкона изучал статистические данные о рыболовстве в Адриатическом море до первой мировой войны, в период войны и после войны. Работы д'Анкона послужили отправным пунктом для математических исследований Вольтерра, в области размножения живых организмов. В результате его исследований появилась работа: «Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie». Затем в 1926 г. Вольтерра опубликовал работу по этому же вопросу: «Variazioni e fluttuazioni del numero d'individi in specie animali convienti». Вольтерра рассматривает вначале один вид живых организмов, живущих изолированно, и получает одно дифференциальное уравнение, которое дает возможность определить рост числа индивидуумов данного вида. Затем Вольтерра рассматривает второй случай, когда имеется два различных вида организмов, живущих один за счет другого, и показывает математически, как происходит процесс размножения одного вида за счет другого. В этом случае решается система двух дифференциальных уравнений и доказывается периодичность процесса.

В 1945 г. автор совместно с акад. Мырза предпринял ряд экспериментов, которые подтвердили математическую теорию и законы Вольтерра о размножении живых организмов.

А. Н. Гливич

5378. Математика и ее применение в естествознании. Фейблман (Mathematics and its applications in the sciences. Feibleman James K.), Philos. Sci., 1956, **23**, № 3, 204—215 (англ.)

Автор заявляет о своем намерении обсудить природу математических систем и то употребление, которое они имеют в эмпирических науках. В первой главе различаются следующие составные части математических систем: неопределимые термины, аксиоматический аппарат, правила вывода и все возможные дефиниции, теоремы и леммы.

В вопросе о природе математических открытий основное внимание уделяется проблеме «экспериментальной математики». Однако под экспериментом в математике понимается лишь «идеальный эксперимент» в прагматическом истолковании его Пирсом. Математическое экспериментирование в этом смысле распространено на наблюдение схем и чертежей, а также на операции со знаками и символами. Область математики представляется своего рода лабораторией, а любая математическая операция—экспериментом. Эксперимент лишается своей объективной реальности, а математика—объективного содержания. Идеальное экспериментирование в математике по существу сводится к «теоретической дедукции». Предлагается «всеобщая теория ведéния» (the general theory of ductions), где «ведéние» определяется как вычисление структур, а структура как некая делимая часть. Дедукция и индукция, согласно этому, представляют два различных рода «ведéния». В заключение рассматриваются различные типы индукции и выражается надежда на то, что в дальнейшем связь математики с эмпиризмом в указанном смысле будет все более плодотворной, поскольку математика является «языком эмпиризма». Идея эмпирического основания математики, авторитет эмпиризма в естествознании используются автором для прагматического толкования математики, ее предмета и значения. Статья представляет интерес для специалистов в области оснований математики, математической логики, философских вопросов математики.

П. Е. Сивоконь

5379. Геометрия и теория познания. Шеррер (Geometrie und Erkenntnistheorie, Scherrer Willy), Dialectica, 1958, **12**, № 2, 185—196 (нем.; рез. франц., англ.)

Арифметизация геометрии образует ключ к теоретико-познавательной оценке ее, так как логические корни геометрии лежат в арифметике, а эмпирические—в материальных субстратах (которыми являются твёрдые тела и лучи света). Автор считает гносеологически очень важным полное арифметизирование геометрии Гильбертом и физическое объяснение геометрии Эйнштейном. Автор утверждает: логически геометрия потеряла свое самостоятельное место внутри математики, а эмпирически геометрия становится частью физики. Поэтому вопрос о достоверности (Sicherheit) математики должен быть сконцентрирован на арифметике, которая абсолютно самостоятельна, так как ее основания опираются на очевидность конечных множеств, что и является фундаментом математики. Очевидность недоказуема, непроизвольна и необходима, как показал интуиционист Л. Брауэр. Отношения между теорией и опытом в сфере точных наук аналогичны отношениям в геометрии; всякая физическая теория имеет два корня (в арифметике и в физическом субстрате).

Н. А. Киселева

5380. Гельмгольц и природа геометрических аксиом. Кеннер (Helmholz and the nature of geometrical axioms: a segment in the history of mathematics. Kenner Morton R.), Math. Teacher, 1957, **50**, № 2, 98—104 (англ.)

Исследования Гельмгольца (1821—1894) о природе геометрических аксиом изложены им в лекции «О происхождении и значении геометрических аксиом». Гельмгольц считает, что основание геометрических аксиом — эмпирическое. Он отмечает, что понятие конгруэнции справедливо только для пространств, имеющих постоянную гауссову кривизну, и показывает, как можно построить модели для неевклидовой геометрии с помощью разного рода линз. Согласно Гельмгольцу, добавляя принципы механики к аксиомам геометрии, мы получаем систему, доказуемую (или опровержимую) путем эмпирических наблюдений. Автор замечает, что с развитием геометрии из нее все более и более исключалось эмпирическое содержание. Он считает, что такое исключение не всегда было правильным, как показывает вышеупомянутая работа Гельмгольца.

Б. Н. Пятницын

5381. Размышления о вероятностях. Мок (Réflexions sur les probabilités. Moch François), Dialectica, 1957, **11**, № 3-4, 375—391 (франц.; рез. нем., англ.)

Попытка обосновать необходимость введения в аппарат современной физики трехзначной логики. Уже в классической физике введение вероятности позволило не только описывать статистические объекты, но и как-то оценивать качества индивидуальных объектов, т. е. отвечать на вопросы с помощью таких слов: «возможно», «может быть» и т. д., что выходило за пределы

классической логики. С другой стороны, современная микрофизика вся пронизана вероятностью, без которой невозможно описание ни одного из ее объектов, по самой своей природе предполагающих в ответе на любой вопрос не только возможность «да» и «нет», но и «неопределенно». В то же время основой аппарата современной микрофизики продолжает оставаться двухзначная логика, из-за чего происходит ряд неувязок. Автор считает, что математика и физика вновь обретут утраченную ныне гармонию только, когда заменят двузначную логику на трехзначную или какое-либо ее обобщение. Б. Н. Пятницын

5382. Вероятностная магия или знание из невежества. Поппер (Probability magie or knowledge out of ignorance. Popper Karl R.), Dialectica, 1957, **11**, № 3-4, 354—374 (англ.; рез. нем., франц.)

Критика применения вероятностной логики к проблемам индуктивной логики. Автор различает две интерпретации аксиоматического исчисления вероятностей. Субъективной он называет интерпретацию, в которой вероятность определяется как неполное знание, а объективной ту, где вероятность есть, например, относительная частота. Первая никак не может быть привлекаема в качестве объяснений или уточнений второй, ибо они противоречат друг другу. В первой a есть предложение, высказывающее некоторое неполное знание; b—общее знание; $p\ (a, b)$ выражает степень, с которой a скрыто содержится в b. Вторая же интерпретирует b как объективное описание объективных условий эксперимента; a—возможный при этих условиях результат его; $p\ (a, в)$,—естественно, степень возможности данного результата. По мнению автора, эти две интерпретации не только неадекватны, но даже противоречивы, ибо в первом случае знание b уже включает и данный возможный результат эксперимента и, следовательно, влияет на субъективную оценку вероятности по-иному, нежели учет условий b на объективную ее оценку.

Б. Н. Пятницын

5383. Возобновление обсуждения (Réouverture d'un dialogue), Dialectica, 1958, **12**, № 1, 5—6 (франц.)

Сообщение о возобновлении дискуссии на страницах журнала Dialectica по методологическим вопросам теории вероятностей (Dialectica, 1949, № 9/10; 1952, № 28, 29, 30). Приводится часть речи Гонсета (Gonseth), посвященной этим вопросам (Dialectica, 1952, № 28).

Л. Е. Майстров

5384. Проблема устойчивости явлений с точки зрения философии и математики. Розенфельд Б. А., Уч. зап. Коломенск. пед. ин-та, 1958, **2**, 39—59

Устойчивость явлений рассматривается в смысле инертности, упругости и гармоничности. Исследуется в этом направлении современный математический аппарат. Привлекаются матричное исчисление, дифференциальные уравнения для математического описания устойчивости физических явлений атомной физики, квантовой механики.

Проводится аналогия между устойчивостью физических, биологических, социальных явлений в плане кибернетических описаний. При этом формально отмечается несводимость социальных явлений к биологическим, биологических к физическим. Однако фактически специфическое отличие между социальными, биологическими и физическими процессами и явлениями остается нераскрытым. Вследствие этого аналогии остаются чисто формальными и лишаются достаточных оснований.

Работа представляет интерес для специалистов в области математической физики, технической кибернетики, философских вопросов математики, хотя носит дискуссионный характер. П. Е. Сивоконь

5385. Некоторые замечания о математической терминологии. Агаев (Риязийят терминляри һаггында бә'зи гейдляр. Агаев Н. Н.), Азәрб. мәктәби, 1958, № 2, 54—59 (азерб.)

Говорится о значении терминологического словаря для развития науки в Азербайджане. Указывается, что базой для создания математической терминологии служили три принципа: 1) словарный фонд национального языка; 2) некоторые термины, образованные из арабских и фарсидских слов, вошедших в азербайджанский язык; 3) термины из международного словарного фонда, не имеющие аналогий в азербайджанском языке.

Отмечаются недостатки напечатанных в прошлом математических терминологий. К. Т. Ахмедов

5386. Что такое переменные и постоянные? Менгер (What are variables and constants? Menger Karl), Science, 1956, **123**, № 3196, 547—548 (англ.)

Статья из серии работ автора, посвященных проблеме обоснования математического анализа (РЖМат, 1954, 5030; 1956, 35; 1957, 6076).

5387 К. Некоторые черты кибернетики. Солодовников (Některé rysy kybernetiky. Solodovnikov V. V. Překl z ruš. Praha, SNTL, 1958, 45 s., 1,45 Kčs.) Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1958, № 12, 272 (чешск.)

Перевод с русского.

5388 К. Итало-французское совещание по абстрактной алгебре. Падова, 16—19 апреля 1956 г. (Convegno italo-francese di algebra astratta. Padova, 16—19 apr. 1956. Ed. Unione mat. ital. con contrib. Consiglio naz. ricerche. Roma, Ed. Cremonese, 1957, viii, 75 p., 1000 L.), Bibliogr. ital., (1958), **91**, 680, 834. 1957 (итал.)

5389 К. Математика для инженеров. Гаскелл (Engineering mathematics. Gaskell Robert E. New York, Dryden Press, 1958, 478 pp., ill., 7.25 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **174**, № 11, 69 (англ.)

5390 К. Учебник по высшей математике. Том 4. Смирнов В. И. (Lehrgang der höheren Mathematik. Teil 4. Smirnow W. I. Übers. aus dem Russ. nach der 3. Aufl. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1958, XII, 708 S., ill.) (нем.)

Перевод с русского (РЖМат, 1958, 6414 К).

5391 К. Новые точки зрения в математике. Феликс (L'aspect moderne des mathématiques. Félix Lucienne), Paris, ed. A. Blanchard, 1957, 169 p., 800 frs. (франц).

Книга рассчитана на учителей средних школ, студентов и любителей математики. Имеет целью ввести читателя в те области математики и ее метатеории, которые, по мнению автора, являются основными в ее современном состоянии. Таковы: абстрактная алгебра, топология и различные области оснований математики, сокращенно именуемые: логика, аксиоматика и формализм.

Вводный очерк и первые две главы, объединенные общим заголовком «Переоценка ценностей в XX веке», содержат историческую картину, в которой кратко показано появление в XIX в. и дальнейшее становление теории множеств. Третья глава «Некоторые аспекты метаматематики» разъясняет мотивы и постановку проблемы обоснования математики. В ней же пропагандируется труд группы французских ученых (действующих под общим псевдонимом: Бурбаки) по построению логически безупречной системы математики. В четвертой главе «Несколько шагов в математику» излагаются основные понятия и элементы топологии и абстрактной алгебры. Приводятся примеры новых математических теорий, вошедших в математику в связи с успехами этих двух кардинальных отделов (топологическая алгебра, векторные пространства и т. д.). Завершающая глава «Педагогическая точка зрения» включает в себя рекомендации по отражению в школьном преподавании высказанных выше теорий. Рассмотрены

элементы математической логики и формальных суждений, соотношение между языком математики и разговорным языком, способы изложения учащимся понятия множества и т. п.

В двух добавлениях—конкретные примеры логических операций и суждений, построение математических моделей. Автор—ученица Лебега—пишет весьма живым своеобразным языком, допускает много нематематических аналогий и отступлений. От этого несколько страдает точность и четкость формулировок и высказываний, на что автор идет, по-видимому, вполне сознательно.

К. А. Рыбников

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

5392. Программа по истории математики в Московском государственном университете. Башмакова И. Г., Рыбников К. А., Юшкевич А. П., Яновская С. А., В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 11. М., Физматгиз, 1958, 185—192

5393. Развитие математики в Китае. Ли Янь, Шусюэ тунбао, 1956, № 5, 1—11 (кит.)

Рассматриваются методы китайской математики в различные периоды ее развития. К первому периоду автор относит старинную классическую китайскую математику, которая ведет свое начало из глубины веков (по традиционной китайской хронологии примерно с XXVII в. до н. э.) и достигает своей кульминации в XIV в. н. э. Больше всего уделено внимания методам этого периода: действиям с дробями, методам интерполяции, суммирования некоторых рядов, решения сравнений, уравнений высших степеней. Описаны также кратко: история правила округления, правила знаков при сложении и вычитании положительных и отрицательных чисел, некоторые геометрические решения задач, понятие предела и треугольник Паскаля для построения коэффициентов разложения бинома.

Во втором периоде, когда китайская классическая математика пришла в упадок и в то же время происходит первое знакомство с западной математикой, автор останавливается на устных методах, применяемых при вычислении на счетах. Приводится ряд счетных правил, которыми в Китае пользуются до сих пор. Этот период продолжается от династии Мин до династии Цин (1367—1750 гг.). Последний период (до 1949 г.) характерен тем, что в Китае вновь изучаются древние сочинения, в том числе сборник Танской эпохи (VIII—X вв.) «Десять математических трактатов» и ряд трудов математиков XIII—XIV вв. Исследования китайских ученых этого периода касаются вопросов решения уравнений высших степеней, рядов и теории чисел. Автором использованы не только специальные, но и многочисленные исторические, астрономические и т. п. тексты. Поэтому излагаемые в статье уже известные историкам математики факты приобретают особую убедительность.

Э. И. Березкина

5394. Фонтенелль и Лондонское королевское общество. Мак-Ки (Fontenelle et la Société royale de Londres. McKie Douglas), Rev. histoire sci., 1957, **10**, № 4, 334—338 (франц.)

5395. Памяти Франца Реллиха. Курант (Franz Rellich zum Gedächtnis Courant Richard), Math. Ann., 1957, **133**, № 3, 185—190 (нем.)

5396. Памяти Эванджелиста Торричелли. Вестн. АН СССР, 1958, № 12, 103—104

Отчет о торжественном заседании 16 октября 1958 г в Москве, организованном АН СССР и рядом общественных организаций по случаю 350-летия со дня рождения Торричелли (1608—1647).

5397. Вклад в библиографию Фонтенелля. Делорм (Contribution à la bibliographie de Fontenelle. Delorme Suzanne), Rev. histoire sci., 1957, **10**, № 4, 300—309 (франц.)

5398. Об исследованиях Л. Эйлера по интегрированию линейных уравнений и систем линейных уравнений с частными производными. Симонов Н. И., В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 10. М., Гостехиздат, 1957, 327—362

Первая часть статьи посвящена исследованиям Эйлера о линейных дифференциальных уравнениях с частными производными высших порядков. В частности, рассмотрены статьи Эйлера «Recherches sur quelques intégrations remarquables dans l'analyse des fonctions à deux variables connues sous le nom de différences partielles» (1777; Opera omnia, 1—23), «De transformatione functionum, duas variabiles involventium, dum earum loco aliae binae variabiles introducuntur» (1779; Opera omnia, 1—23), «Intégration d'une espèce remarquable d'équation différentielle dans l'analyse des fonctions à deux variables» (1777; Opera omnia, 1—23) и «Integratio generalis aequationum differentialium linearium cuiuscunque gradus et quotcunque variabiles involventium» (1779; Opera omnia, ser. I, v. 23).

Вторая половина статьи посвящена исследованиям Эйлера некоторых линейных систем уравнений с частными производными, причем эти исследования были выполнены в связи с изучением распространения звука и не вошли в его собственно математические сочинения. Поэтому они оставались до настоящего времени вне поля зрения историков математики.

Основное внимание автор уделяет здесь мемуару Эйлера «Supplément aux recherches sur la propagation du son» (1759; Opera omnia, ser. III, v. I.). Сначала рассматривается система

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial X \partial Y},$$

$$\frac{1}{2gh}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial X \partial Y},$$

не являющаяся гиперболической (по И. Г. Петровскому). Приведенная система сводится Эйлером к одному гиперболическому уравнению второго порядка. Развивая метод Эйлера, автор получает в качестве следствия решение задачи Коши для этой системы при произвольных начальных условиях. Подробно рассматриваются отдельные полученные Эйлером решения указанной системы при частных начальных условиях. Отдельные связанные с этим вопросы рассмотрены Ф. И. Франклем (РЖМат, 1956, 941). Библ. 18 назв.

Г. К. Михайлов

5399. Переписка Л. Эйлера и Дж. Стирлинга. Публикация Т. А. Красоткиной. В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 10, М., Гостехиздат, 1957, 117—158.

Опубликованы в латинских оригиналах и в русском переводе письма Эйлера Стирлингу от 19(8) июня 1736 г. и 7 августа (27 июля) 1738 г., а также письмо Стирлинга Эйлеру от 16 апреля 1738 г. Первое письмо опубликовано по заверенной Эйлером копии, второе — по его собственноручному черновику, третье — по копии XVIII в. (все материалы хранятся в Архиве Академии наук СССР в Ленинграде). Оригинал второго письма Эйлера и собственноручный черновик письма Стирлинга, находящиеся в Англии, были опубликованы ранее (Tweedie, Ch., James Stirling, Oxford, 1922); сверка обоих текстов не производилась.

Публикация снабжена кратким вступлением и примечаниями к тексту писем, математическая часть которых составлена Б. В. Русановым. Основное содержание опубликованных писем — теория рядов. В частности, обсуждается суммирование рядов четных степеней дробей, обратных последовательным целым числам, приводятся ряды для вычисления логарифмов целых чисел, обсуждается формула суммирования Эйлера—Маклорена и т. д.

Г. К. Михайлов

5400. Леонард Эйлер и элементарная математика (К 250-летию со дня рождения). Мельников И. Г., Матем. в школе, 1957, № 4, 1—15

Коротко рассказывается о жизни и творчестве Эйлера. После этого автор подробно останавливается на тех исследованиях Эйлера по теории чисел, алгебре, геометрии и тригонометрии, которые по постановке вопроса и методу трактовки доступны школьникам старших классов. Учителя найдут в реферируемой работе богатый материал для основных занятий и кружков.

И. Г. Башмакова

5401. Работы Гаусса по алгебре и теории чисел. Рейхардт (Gauss'Arbeiten über Algebra und Zahlentheorie. Reichardt Hans), Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1954/1955—1955/1956, 11—23 (нем.)

Доклад, прочитанный по поводу 100-летнего юбилея со дня смерти К. Ф. Гаусса (1777—1855). Автор рассказывает о работах Гаусса по теории чисел и алгебре, ставя при этом перед собой задачу осветить основные методы этих работ с точки зрения современной математики. В качестве особенно важного принципа, введенного Гауссом в теорию чисел, автор отмечает метод перехода от локального рассмотрения к рассмотрению в целом. Основным орудием такого перехода у Гаусса был квадратичный закон взаимности. Автор характеризует основные идеи, содержащиеся в доказательствах, данных этому закону самим Гауссом, и прослеживает дальнейшую их историю вплоть до наших дней. Он останавливается также на взаимосвязи работ Гаусса по алгебре и теории чисел.

Следует отметить, что, доводя историю законов взаимности до современности и упоминая об исследованиях Фуртвенглера и Артина, автор не говорит о том, что самая общая явная форма закона взаимности в произвольных числовых полях была установлена советским математиком И. Р. Шафаревичем (Матем. сб., 1950, **26**, вып. 1). Между тем именно эта форма ближе всего по духу к квадратичному закону взаимности Гаусса.

Следует отметить также, что даваемая автором оценка работ Эйлера не всегда справедлива.

И. Г. Башмакова

5402. К вопросу о развитии механического способа решения алгебраических уравнений. Киро С. Н., В сб.: Вопр. истории естествозн. и техн. Вып 4. М., АН СССР, 1957, 169—171

В связи с обзором Фрейма (Frame J. S., Math. Tables and Other Aids Comput., 1945, **1**, № 9) и заметкой Рубинова (РЖМат, 1955, 4094) указывается, что первый по времени кинематический механизм для определения вещественных корней алгебраических уравнений произвольной степени был предложен в 1873—1877 гг. английским ученым Кемпе (А. В. Kempe) и русским ученым В. И. Лигиным. Некоторые из этих работ выпали из поля зрения Фрейма, что привело его к неточностям и ошибочной оценке метода Кемпе—Лигина.

Л. Е. Садовский

5403. Г. Ф. Вороной (1868—1908) (К 50-летию со дня смерти). Штокало, Погребысский (Г. Ф. Вороной (до п'ятдесятиріччя з дня смерті). Штокало И. З., Погребиський И. Б.), Вісник АН УРСР, 1958, № 10, 58—63 (укр.)

5404. Научная деятельность Казимежа Журавского. Слебодзинский (Dzieło naukowe Kazimierza Żorawskiego. Slebodzinski W.), Roczn. Polsk. towarz. mat., 1956, Ser. I, **2**, № 1, 79—93 (польск.)

Казимеж Журавский (1866—1953), один из учеников С. Ли, бывший профессор Ягеллонского университета в Кракове. После краткого биографического очерка автор перечисляет важнейшие достижения Журавского, группируя их по следующим областям: 1) теория дифференциальных форм; 2) теория интегральных уравнений; 3) теория движения вязкой среды и упругого тела; 4) дифференциальные уравнения; 5) дифференциальная геометрия.

Автор особо подчеркивает, что некоторые важные работы Журавского появились на польском языке, а также оказались недоступны широким кругам математиков из-за скромности Журавского, не умевшего подчеркивать важность своих результатов. Некоторые важные проблемы, изученные им, привлекли внимание заграничных ученых, а для польской науки были утрачены. Так, например, некоторые результаты Журавского гораздо позднее были переоткрыты Гурса, а также Дондера. Необходимо также отметить, что две работы Журавского от 1915 г. о системах дифференциальных уравнений, включающие (без геометрических интерпретаций) пространную теорию аффинных связностей, были выполнены двумя годами позднее Скоутена и Вейля. Автор подчеркивает, что некоторые результаты Журавского, например, касающиеся движения упругого тела, упомянуты и развиты американскими математиками Трусделлом и Прима.

Статья заканчивается полной библиографией работ Журавского (67 назв.) и списком цитированной литературы (9 назв.)

S. Gołąb

5405. Памяти Отто Блументаля (1876—1944). Бенке (Otto Blumenthal zum Gedächtnis. Behnke Heinrich), Math. Ann., 1958, **136**, № 5, 387—392 (нем.)

5406. Герман Вейль (1885—1955) (Некролог). Ньюман (Hermann Weyl. (Obituary). Newman M. H. A.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 4, 500—511 (англ.)

5407. Михаэль Фекете (1886—1957) (Некролог). Рогозинский (Michael Fekete. (Obituary). Rogosinski W. W.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 4, 496—500 (англ.)

5408 К. История математики от древности до начала девятнадцатого столетия. Скотт (A history of mathematics from antiquity to the beginning of the nineteenth century. Scott Joseph Frederick. London, Taylor and Francis, 1958, xiii, 266 pp., ill., 63 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 422, 10 (англ.)

Книга не претендует на исчерпывающую полноту в изложении фактов истории математики. Она имеет 15 глав, каждая из которых представляет сжатый очерк, посвященный более или менее частному вопросу. Расположенные в хронологическом порядке, они могут служить введением в историю главнейших событий математических наук, вплоть до XIX в., т. е. до выхода в свет «Disquisitiones Arithmeticae» К. Ф. Гаусса (1801).

Автор известен в истории математики своими изданиями математических работ Валлиса (1938) и Декарта (1952). Этот вкус к изучению классических математических сочинений проявился в стараниях обогатить книгу фактическим материалом.

Два добавления к книге содержат: краткие биографические справки об упоминаемых в книге ученых; столь же краткие разъяснения некоторых математических понятий, встречающихся в последних четырех главах (комплексные числа, инвариантность, изопериметрия, симметрические функции и т. п.). В силу своей краткости они почти не компенсируют беглость глав-очерков, особенно возрастающую к концу.

Научное значение библиографии снижено односторонним подбором литературы; отсутствуют указания на источники, рассматривающие проблемы истории математики с позиций марксизма-ленинизма.

К. А. Рыбников

5409 К. Об истории основных понятий проективной геометрии. Кассина (Sur l'histoire des concepts fondamentaux de la géométrie projective. Cassina Ugo. Paris, Palais découverte, 1957, 36 p., ill., 140 fr.) Bibliogr. France, 1958, **147**, № 3, 66 (франц.)

Лекция, прочитанная 1 июня 1957 г. в Париже. Отметив, что теория перспективы художников и архитекторов эпохи Возрождения содержит в учении о точках элементы проективной геометрии, автор анализирует далее трактовку бесконечно удаленных элементов у Дезарга и Понселе, а затем кратко перечисляет топологические свойства проективной прямой и плоскости.

Вторая, бо́льшая часть работы, посвящена дальнейшему развитию проективной геометрии. После рассмотрения аналитической трактовки проективной геометрии у Кэли и его проективной метрики автор указывает на некоторые возможные ослабления условий в основной теореме проективной геометрии. Автор полагает, что аксиомы должны иметь непосредственный интуитивный смысл. Поэтому его не удовлетворяет аналитическая интерпретация. Он считает необходимым проективные понятия вводить исходя из метрической абсолютной геометрии (геометрии Евклида или геометрии Лобачевского). Коснувшись трактовки основных проективных понятий у Энриквеса, Севери и Пиери, автор останавливается на идеях Пеано. Подробно рассматриваются «графические постулаты» (аксиомы принадлежности, порядка, непрерывности) Пеано. Детально анализируется образование понятий проективных точек, прямых, плоскостей и пространства путем пополнения пространства идеальными элементами. В заключение перечисляются постулаты движения по Пеано.

Примечание референта: На стр. 27 автор, определяя «звезду» (étoile), пропустил указание, что две прямые, ее порождающие, должны лежать в одной плоскости. На стр. 32 неверно утверждение о единственности движения, удовлетворяющего указанным условиям, так как в пространстве таких движений два.

Б. Л. Лаптев

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

5410. О роли и содержании курса элементарной математики в педагогических институтах. Новоселов С. И., Матем. в школе, 1957, № 1, 10—18

Основной тезис статьи заключается в том, что задачей курса элементарной математики в педагогическом институте надлежит считать углубленное, научно обоснованное и систематическое изложение фактического материала, составляющего содержание школьной математики. С этой точки зрения делается ряд замечаний относительно содержания действующих программ по различным разделам курса элементарной математики в педагогических институтах.

В начале статьи делается попытка разграничения сфер компетенции «ученых-теоретиков» и «ученых-педагогов»: первым предоставляется, насколько можно понять, решающая роль в определении идейного и фактического содержания курсов «высшей» математики, читаемых в педагогических институтах, вторым — столь же решающая роль в определении содержания тех дисциплин, которые призваны давать знания и навыки, непосредственно необходимые для профессиональной деятельности будущих педагогов, — относя к последнему кругу дисциплин методику преподавания математики, курс элементарной математики и соответствующие спецсеминары. Заключительная часть статьи содержит в более отчетливой форме признание плодотворности дискуссионного скрещивания мнений математиков-педагогов и математиков-исследователей (названных «теоретиками») и желательность организации широких обсуждений для нахождения путей наиболее правильного построения обеих групп специальных дисциплин учебного плана пединститутов.

Е. Я. Ремез

5411. Работы по математическому анализу. В сб.: Калининск. гос. пед. ин-т, 1917—1957, Калинин, 1958, 117—119

Отчет кафедры математического анализа Калининского государственного педагогического института по вопросам научно-исследовательской и научно-методической работы за 1938—1957 гг. Приводится фактический материал об основных работниках кафедры, их научных интересах, упоминаются наиболее важные результаты.

М. И. Иванов

5412. К проблеме создания новых учебников по математике для средней школы, Дубнов Я. С., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 275—300

Критическое рассмотрение выпущенных за последние 20 лет учебников и учебных пособий: 1) А. Н. Барсуков, Алгебра, ч. 1, 1956; 2) Н. Н. Никитин А. И. Фетисов, Геометрия, ч. 1, 1956; 3) С. И. Новоселов, Тригонометрия, 1956; 4) П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, Алгебра, ч. 1, 1939; 5) Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский, Алгебра, ч. 1, 1951, 1954; 6) В. Л. Гончаров, Начальная алгебра, 1955; 7) Н. А. Глаголев, Элементарная геометрия, 1944; 8) М. Я. Выгодский, Геометрия для самообразования, 1950; 9) А. Ф. Берман т, Л. А. Люстерник, Тригонометрия, 1947. Специально рассматриваются вопросы: допустимые значения букв в алгебраических выражениях, алгебраическая сумма, деление расположенных многочленов, алгебраические дроби, равносильность уравнений, определение угла, аксиомы, теоремы и доказательства в школьном курсе, геометрическое место точек, измерение прямолинейных отрезков, гомотетия и подобие, длина окружности, площадь круга, тригонометрические функции. Автор считает необходимым переиздать следующие учебники в тиражах, меньших тиражей стабильных учебников, но в достаточных, чтобы каждый учитель мог ознакомиться с ними: по алгебре 4, 5, 6, по геометрии 7 и часть (стр. 9—86) 8; по тригонометрии 9 и более раннюю книгу В. А. Крогиус, Тригонометрия, II, 1919.

Б. А. Розенфельд

5413. Студенческий математический кружок в Орехово-Зуевском педагогическом институте. Яглом И. М., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 251—257

Опыт работы студенческого математического кружка, руководимого автором в 1950—1957 гг. Кружок представлял собой по существу научно-исследовательский семинар по геометрии. Участниками кружка опубликовано 17 научных работ по геометрии, главным образом по геометрии пространств с проективной метрикой. Работы публиковались в Матем. просвещении, Ученых зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та и, в отдельном издании: Шерватов В. Г., Гиперболические функции. М. 1954.

Б. А. Розенфельд

5414. Алгебраическая топология: элементы теории гомологий. Шварц (Topologie algébrique: éléments d'homologie. Schwartz Laurent), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1958, 37, № 191, 189—197 (франц.)

Доклад для преподавателей математики из цикла докладов по топологии, организованных Французским математическим обществом и Ассоциацией преподавателей математики. Сначала излагаются основные идеи, восходящие к А. Пуанкаре. Проблема гомотопии связывается с возможностью стянуть в точку кривую, лежащую на данной поверхности, а проблема гомологии — с вопросом о том, является ли такая кривая границей (краем) куска поверхности. На элементарных примерах показывается, что первая задача тоньше второй, ибо существуют кривые, ограничивающие поверхность, но не стягивающиеся в точку. Вместе с тем отмечается, что во многих случаях, например для теоремы о вычетах в теории аналитических функций, точка зрения теории гомологий является более адекватной. Затем даются точные определения. На n-мерном симплициальном комплексе рассматриваются p-мерные цепи, определяемые как формальные целочисленные линейные комбинации

p-мерных цепочек, т. е. упорядоченных последовательностей $a_0a_1 \ldots a_p$ из $p+1$ вершины одного из симплексов. Граница цепи и группа гомологий определяются обычным образом. Показывается, что вырожденная цепочка всегда гомологична нулю, а цепочки, получающиеся друг из друга при четной перестановке вершин, гомологичны между собой, тогда как при нечетной перестановке для этого нужно перед одной из них поставить коэффициент — 1; поэтому вычисление группы гомологий упрощается. Рассматриваются элементарные примеры определения групп гомологий. М. Ф. Бокштейн

5415. Некоторые вопросы модернизации программы по математике в средней школе. Хаймович (Considerații asupra modernizării programelor de matematisi din învățămîntul meliu. Haimovici Adolf), Rev. ped., 1958, 7, № 3, 15—25 (рум.)

Автор предлагает перестроить программу по математике в средней школе РНР с таким расчетом, чтобы в ней нашли отражения новые достижения в современной математике (понятия множества, группы и т. д.). Говорит, что средняя школа должна дать «общее развитие», которое приблизит учащихся к современным достижениям во всех областях науки. Особое место занимает в настоящее время в общем развитии «техническая культура». Автор подчеркивает, что современные машины требуют обширных знаний в области математики. В средней школе придется знакомить учащихся с числовыми приближениями, алгебраическими уравнениями, дифференциальными уравнениями и т. д.

По мнению автора, необходимо исключить сложные и бесполезные задачи по геометрии, алгебре, арифметике, тригонометрии и т. д. Вместо этого можно ввести понятия множества, группы, простые дифференциальные уравнения, необходимые в физике, химии и т. д. Такую перестройку предлагается начать с подготовки учителей в этом направлении в педагогических институтах, с подготовки новых учебников; начать сначала в отдельных школах, затем на основе полученного опыта ввести перестройку обучения математике во всех школах.

А. Н. Гливич

5416. Как преподавать сегодня. Математика завтрашнего дня. Валусинский (Comment enseigner aujourdlhui. Les mathématiques de demain. Walusinski G.), Atomes, 1957, 12, № 139, 371—377 (франц.)

Говоря о состоянии народного образования и, главным образом, преподавания математики в современной Франции, автор, являющийся председателем Французского Объединения учителей математики, заостряет внимание на имеющихся недостатках, мешающих средней школе идти в ногу со стремительным развитием науки и техники в наши дни. Отмечается колоссальный отсев (около 67%) на баккалаврских испытаниях учащихся класса математики (7-й год обучения во французской средней школе, базирующейся на 5-летней начальной, при специализации в области точных дисциплин), свидетельствующий, по мнению автора, о неудовлетворительном усвоении математики в шести предшествующих классах; недостаточное пополнение инженерно-исследовательских кадров; недостаток квалифицированных преподавателей математики для замещения должностей в средней школе.

Пропагандируемые в статье пути для устранения указываемых недостатков во многом перекликаются с соответствующими материалами прошедшей в июле 1956 г. в Женеве XIX Международной конференции по народному образованию. Упор делается, с одной стороны, на активизации методов преподавания математики, сближении его с жизнью, а с другой стороны, — на необходимости мероприятий по обеспечению надлежащего теоретического уровня преподавания, которое должно в соответствующей мере и в соответствующих формах отражать непрерывный прогресс математических наук, точного естествознания и техники.

Отмечаются и положительные факты: некоторые примеры успешной организации научных клубов учащейся молодежи (в частности, астрономических); успехи в деле усовершенствования моделей и учебных кинофильмов (во Франции и в других странах); конференции по новейшим разделам математической науки (современная алгебра, топология), которые последние два—три года проводились Математическим обществом Франции совместно с Объединением учителей математики, с публикацией лекций и докладов в Бюллетене Объединения; некоторые мероприятия по обобщению передового педагогического опыта (организация передвижных выставок и пр.), проводимые Национальным педагогическим институтом, а также Объединением учителей математики, насчитывающим 2500 членов. Е. Я. Ремез

5417. О преподавании алгебры в английской средней школе. Милованова Л. Н., Матем. в школе, 1958, № 4, 65—75

Основное содержание статьи составляет обзор математических программ экзаменов на аттестат зрелости для лиц, желающих поступить в университеты Англии. Использованы материалы XIX Международной конференции Юнеско по народному образованию, состоявшейся в Женеве в 1956 г. Автор приводит некоторые характерные выдержки из учебника алгебры Парра (Н. Е. Рачч), наиболее распространенного в английских средних школах, и сопровождает их краткими комментариями. М. И. Иванов

5418. Обучение математике в Италии молодежи в возрасте от 16 лет до 21 года. Вилла (L'enseignement des mathématiques en Italie pour les jeunes gens de 16 à 21 ans. Villa Mario), Enseign. math., 1956, 2, № 3, 185—216 (франц.)

Рассматриваются программы по математике технических институтов (строительных, сельскохозяйственных, промышленных, мореходных, дорожных), а также специальностей: промышленной химии, естественных, геологических, агрономических, экономики и торговли; программы университетов и лицеев. Всюду имеется тенденция стать ближе к практике, обращено внимание на приближенные, численные и графические решения и, в частности, номографическое исчисление, а в некоторых институтах на теорию вероятностей и статистику. Говорится о двух типах лицеев — классических и научного характера и о борьбе за внедрение пропедевтического курса дифференциального и интегрального исчисления. В конце дана схема организации всех ступеней обучения в Италии. И. К. Андронов

5419. Изучение современного состояния преподавания элементов геометрии в Италии. Кассина (A study of the present state of teaching the elements of geometry in Italy. Cassina U.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 169 (англ.)

5420. Основания алгебры. Брамфил (The foundations of algebra. Brumfiel Charles), Math. Teacher, 1957, 50, № 7, 488—492 (англ.)

Пример аксиоматического построения начального курса элементарной алгебры. Предполагается существование системы $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots,\}$, состоящей из нуля и натуральных чисел. Далее принимаются аксиомы, устанавливающие свойства сложения и умножения для всех чисел a, b, c из системы S:

A1. $a + b = b + a$.

A2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.

A3. $a + 0 = a$.

A4. $a + b = a + c \to b = c$.

M1. $ab = ba$.

M2. $(ab)c = a(bc)$.

M3. $a \cdot 1 = a$.

M4. $ab = ac$ и $a \neq 0 \to b = c$.

D. $a(b + c) = ab + ac$.

На основании этих аксиом доказываются три теоремы.

Теорема 1. Для каждого числа x из S имеет место равенство $x = x$.

Теорема 2. Для каждого a из S $a - 0 = 0$.

Теорема 3. $(a + b) + (c + d) = [a + (c + d)] + b$.

Затем вводятся определения, и по мере введения определений доказываются новые теоремы, основанные на этих определениях и принятых ранее аксиомах и установленных теоремах. Всего рассмотрено четыре определения и 20 теорем. Все они относятся к целым неотрицательным числам.

В заключение статьи приводятся упражнения, состоящие из 36 задач на применение рассмотренного теоретического материала, в том числе задач на решение уравнений, неравенств, на тождественные преобразования.

Е. В. Вандышева

5421. Некоторые вопросы методики преподавания алгебры на страницах польского журнала «Математика». Гречкин Н. З., Матем. в школе, 1958, № 6, 78—82

Статья имеет целью ознакомить советских учителей с методическим опытом польских учителей, используя для этого статьи польского журнала «Математика» за 1948—1957 гг.

М. И. Иванов

5422. К вопросу о решении тригонометрических уравнений. Никулин Н. А., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957 (1958), 29, 261—265

Рекомендуется сводить решения уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k T^{2k}(x) = 0$$

(a_k — действительное положительное число, $T(x)$ — любая тригонометрическая функция) к решению системы $T^{2k}(x) = 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), используя тот факт, что в поле действительных чисел сумма четных степеней равна нулю только, если каждое слагаемое равно нулю.

5423. Об уроках тригонометрии в IX классе. Джавадов (IX синифдə тригонометрия дərсləри һаггында. Чавадов М.), В сб.: Физика вə риязийят тəдриси. Бурах. 4. Баку, 1957, 13—25 (азерб.)

Методическая заметка для учителей математики азербайджанских средних школ в связи с принятием в качестве учебника по тригонометрии книги С. И. Новоселова.

К. Т. Ахмедов

5424. Некоторые вопросы повторения математики в средней школе. Аракелян О. А., Уч. зап. Рыбинского гос. пед. ин-та, 1958, вып. 2, 365—415

Рассмотрены два вопроса, являющиеся частью исследования автора «Системы и методы повторения математики в средней школе»: 1) значение и роль вопросов учителя в процессе повторения; 2) система упражнений и методика их проведения при повторении.

Примечание референта. В статье имеются неточности и недочеты. Например, на стр. 374, 4 строка сверху, дано неверное определение иррационального числа (если число выражено бесконечной десятичной дробью, то это еще не значит, что оно иррациональное). Часть недочетов редакционного характера.

Н. П. Бибикова

5425 К. Алгебра, объединенная с тригонометрией. Фишер, Зибер (Integrated algebra and trigonometry. Fisher Robert C., Ziebur Allen D. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1958, xiv, 427 pp., ill.) (англ.)

Учебное пособие для колледжей (США). Объединенное изложение обоих дисциплин имеет целью сделать эту книгу своеобразным предверием к изучению аналитической геометрии и математического анализа.

Всего 10 глав. Первая — вводная. Разъясняются основы построения систем целых, рациональных и действительных чисел. Помимо основных операций арифметики, включены операции с неравенствами. Основная идея остальных глав — изучение понятия функции. Способы задания функции, а также логарифмические, показательные и тригонометрические функции действительного аргумента охватывают гл. 2, 3, 4. Появление комплексных чисел, в частности, в тригонометрической форме, которым отведена гл. 5, тем самым хорошо подготовлено. Две следующие главы (6 и 7) содержат теорию уравнений и их систем. При решении систем линейных уравнений вводятся понятия о матрице и детерминанте. Затем следуют (гл. 8) элементы комбинаторики, биномиальная теорема и первоначальные сведения о вероятности события. При изложении материала о прогрессиях (гл. 9) изучается метод полной математической индукции. Завершается книга (гл. 10) главой об обратных функциях и о тригонометрических уравнениях.

Написана книга живо, доступно, без усложненных вопросов, снабжена большим количеством чертежей, примеров и задач, а также таблицами: логарифмов, тригонометрических функций и значений $\log n!$ (для n от 1 до 100). Ради доступности авторы несколько поступились строгостью изложения.

К. А. Рыбников

5426 К. Введение в финитную математику. Кемень, Снелл, Томпсон (Introduction to finite mathematics. 3rd print. Kemeny John G., Snell J. Laurie, Thompson Gerald L. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, Inc., 1958, xii, 372 pp., ill.) (англ.)

Книга по замыслу является нетрадиционным учебником математики для первого курса колледжа. Ее цель состоит в элементарном изложении некоторых понятий современной математики, проиллюстрированном примерами, взятыми преимущественно не из области физики или техники, как это делается обычно, а из других дисциплин.

В гл. 1 излагаются простейшие факты символической логики. Гл. 2 посвящена теоретико-множественным операциям, а гл. 3 — комбинаторике. Предметом гл. 4 является теория вероятностей, построенная на теоретико-множественной основе, причем в качестве элементарных событий рассматриваются «логические возможности». Изложение доводится до простейших случаев закона больших чисел и цепей Маркова. Гл. 5 «Векторы и матрицы» включает действия над матрицами, решение систем линейных уравнений, приложения к теории цепей Маркова и простейшие сведения о группах подстановок. Гл. 6 «Линейное программирование и теория игр» содержит описание приемов решения несложных систем линейных неравенств и простейших матричных игр. Гл. 7 посвящена приложениям к социологии, генетике, психологии, антропологии и экономике.

Доказательства формулируемых теорем, как правило, отсутствуют. Каждый раздел сопровождается серией упражнений.

Н. Н. Воробьев

5427 К. Введение в высшую математику. Для учащихся и для самообразования. Т. 1. Числа, функции, пределы, аналитическая геометрия, алгебра, теория множеств. Мангольдт, Кнопп (Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende und zum Selbststudium. Bd 1. Zahlen, Funktionen, Grenzwerte, analytische Geometrie, Algebra, Mengenlehre. Mangoldt Hans. 11. Aufl. Seit. d. 5. Aufl. neu hrsg. und erw. Knopp Konrad. Leipzig, Hirzel, 1958, 22.— DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 42, 3056 (нем.)

5428 К. Краткий курс для подготовки к экзаменам по математическому анализу. Т. 2. Теория дифференциальных уравнений, дифференциальная геометрия, уравнения в частных производных. Лене, Булиган (Précis d'analyse mathématique à l'usage des candidats au certificat de calcul différentiel et intégral. T. 2. Théorie des équations différentielles, géométrie infinitésimale, équations aux dérivées partielles. 6 éd. Lainé Chanoine Edouard, Bouligand

Georges. Paris, Vuibert, 1956, 400 p., ill., 960 fr.), Bibliogr. France, 1956, **145**, № 32-34, 726 (франц.)

5429 К. Лекции по математическому анализу, алгебре и исчислению бесконечно малых. Миньози (Lezioni di analisi matematica, algebrica e infinitesimale. Parte I—a. Mignosi Giuseppe. Palermo, 1955—1956, 492 p.,—Litogr.), Bibliogr. ital., 1957(1958), **91**, № 680, 836 (итал.)

5430 К. Лекции по математическому анализу и аналитической геометрии. Ночилла (Lezioni di analisi matematica e geometria analitica. Per stud. Fac. architett. Nocilla Silvio. Torino, Ed. Levrotto e Bella, 1957, 279 p.), Bibliogr. ital., 1957(1958), **91**, № 680, 836 (итал.)

5431 К. Лекции об икосаэдрах и решении уравнений пятой степени. 2-е изд. Клейн (Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree. 2nd and rev. ed. Klein Felix. Transl. New York, Dover, 1956, xvi, 289 pp.) (англ.)

5432 К. Методические указания по курсу математики во 2-м семестре в вузах. Кабелка, Лангхаммер (Metodické pokyny pro studium matematiky ve 2. semestru DS. Kabelka Josef, Langhammer Rudolf. Praha, SNTL, 1958, 153 s., 13,20 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1958, № 15, 341 (чешск.)

5433 К. Курсовые работы по элементарной математике и методике ее преподавания. Для студ. заочн. физ.-матем. фак. пед. ин-тов, Изд. 3-е, испр. Брадис В. М. М., Учпедгиз, 1958, 126 стр, 1 р. 95 к.

5434 К. Придумайте число. Т. 1, 2. Мосс (Think of a number. Moss Grace A. Oxford, Blackwell, 1958, Book I. 26 pp., ill., 2 sh. Book 2. 26 pp., ill., 2sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 459, 10 (англ.)

5435 К. Справочник по высшей математике. Изд. 3-е, стереотипн. Выгодский М. Я., М., Физматгиз, 1958, 783, стр., илл., 13 р. 40 к.

5436 К. Задачи по высшей математике. Часть 3. Альбрехт, Хохмут (Übungsaufgaben zur höheren Mathematik. Teil 3. Albrecht Rudolf, Hochmuth Hans. München, R. Oldenbourg, 1956, 128 S., 9.80DM), (нем.)

Части 1 и 2 см. РЖМат, 1956, 6644К; 1958, 3501К. Эта часть содержит задачи по обыкновенным дифференциальным уравнениям и по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 467.

5437 К. Сборник задач по высшей математике. Учебное пособие машиноэлектротехнического института. Петрова-Денева, Кожухаров, Димова-Нанчева, Бояджиев (Сборник от задачи по висша математика. Уч. пособие. Машинно-електротехн инст. Петрова-Денева А., Кожухаров Ив., Димова-Нанчева В., Бояджиев Г. София, Наука и изкуство, 1958, 304 с., ил., 9.90 лв.), Бълг. книгопис, 1958, 62, № 3, 7 (болг.)

5438 К. Сборник математических формул. 6-е изд. Камм (Mathematical tables formulae. 6th ed. Camm Frederick James. (N. I., Waysider, pseuds.). New York, Philos. Libr., 1958, 144 pp., ill., 2.75 doll.) Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 26, 90 (англ.)

5439 Д. Некоторые вопросы повторения математики в средней школе. Аракелян О. А. Автореф. дисс. канд. пед. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1958

5440 Д. Общее учение об уравнениях в курсе элементарной математики. Бондарев А. Л. Автореф. дисс. канд. пед. н., Н.-и. ин-т методов обучения Акад. пед. наук, РСФСР, Краснодар, 1958

5441 Д. Развитие понятия степени в курсе алгебры средней школы. Осипова М. И. Автореф. дисс. канд. пед. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1958

5442 Д. О некоторых вопросах преподавания математики в Коми школах. Попов А. А. Автореф. дисс. канд. пед. н., Н.-и. ин-т методов обучения Акад. пед. наук РСФСР, Сыктывкар, 1958

См. также: 5469—5473, 5526К—5529К, 5520К, 5534К, 5537, 5540, 5687, 5719К, 5802К, 5830К—5833К, 5862К, 5902, 5931К—5946К, 6062К, 6063К, 6093К—6098К, 6120, 6134, 6197К, 6199К, 6200, 6202, 6208, 6227, 6280, 6282, 6286, 6331, 6396, 6404.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

5443. Об алгоритмических проблемах в эффективно-полных классах групп. Адян С. И., Докл. АН СССР, 1958, **123**, № 1, 13—16

Дальнейшее обобщение результатов автора (РЖМат, 1956, 962; 1958, 8524; 1959, 2233) о неразрешимых алгоритмических проблемах теории групп. В первой части статьи приводится усиление основной леммы последней из перечисленных работ. Даются вместе с доказательствами все вспомогательные леммы, необходимые для проведения доказательства этого усиления по той же схеме, по которой была доказана основная лемма во второй из перечисленных работ автора.

Во второй части статьи с помощью указанного усиления получены результаты о неразрешимости некоторых алгоритмических проблем для эффективно-полных классов конечно-определенных групп (к.-о.групп).

Класс K к.-о. групп автор называет эффективно-полным, если существует алгоритм $\mathfrak{R}$, перерабатывающий задание произвольной к.-о. группы F в задание такой группы из класса K, некоторой подгруппе которой изоморфна группа F. При этом алгоритм $\mathfrak{R}$ автор называет алгоритмом, эффективизирующим полноту класса K. Автор говорит, что $\mathfrak{R}$ оставляет группу F_0 неподвижной, если он перерабатывает любое задание группы F_0 в задание той же самой группы. Автор говорит, что для пары (K, α), где K — некоторый класс к.-о. групп, а α — любое инвариантное групповое свойство, выполняется условие T, если можно указать к.-о. группу F_1 из класса K, обладающую свойством α, и такую к.-о. группу F_2, которая не может быть вложена ни в какую к.-о. группу со свойством α.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть K — некоторый эффективно-полный класс к.-о. групп. Если инвариантное свойство α таково, что для пары (K, α) выполняется условие T, причем алгоритм $\mathfrak{R}$, эффективизирующий полноту класса K, оставляет группу F_1 со свойством α неподвижной, то проблема распознавания свойства α для групп класса K неразрешима.

Теорема 2. (Частный случай теоремы 1). Пусть K — эффективно-полный класс к.-о. групп, эффективизирующий алгоритм которого оставляет неподвижной любую группу этого класса. Если инвариантное свойство α таково, что для пары (K, α) выполняется условие T, то проблема распознавания свойства α для групп класса K неразрешима.

Теорема 3. Пусть K — рекурсивный и эффективно-полный класс к.-о. групп, а α — некоторое инвариантное групповое свойство. Если для пары (K, α) условие T выполняется, то проблема распознавания свойства α неразрешима.

Теорема 4. Пусть K_1 — класс условно единичных групп относительно некоторой системы нетривиальных тождественных соотношений (РЖМат 1959, 2233). Если инвариантное групповое свойство α таково, что для пары (K_1, α) выполняется условие T, то проблема распознавания свойства α для групп класса K_1 неразрешима.

Н. М. Нагорный

5444. Ограниченно-рекурсивные функции и метод мажорирования Аккермана. Петер (Die beschränkt-rekursiven Funktionen und die Ackermannsche Majorisierungsmethode. Péter Rózsa), Publs math., 1956, 4, № 3-4, 362—375 (нем.)

Известно (см., например, Петер Р., Рекурсивные функции, М., 1954, §§ 9—10; РЖМат, 1955, 5573), что многократная рекурсия со вставками, вообще говоря, выводит за пределы класса примитивно-рекурсивных функций. В данной работе доказано, что если к рекурсивным равенствам многократной рекурсии со вставками присоединить неравенство $\varphi(n_1, \ldots, n_r) \leqslant \gamma(n_1, \ldots, n_r)$, где φ — определяемая функция и γ — уже определенная примитивно-рекурсивная функция, то такая рекурсия уже не выведет за пределы класса примитивно-рекурсивных функций.

А. В. Гладкий

5445. Примитивно-рекурсивные алгебраические и трансцендентные числа. Гудстейн (Primitively recursive algebraic and transcendental numbers. Goodstein R. L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 7 (англ.)

Пусть сокращение п.р. означает примитивную рекурсивность. Рациональнозначная п.р. функция $a(n)$ называется п.р. сходящейся, если может быть найдена такая п.р. функция $\alpha(n)$, что $m, n \geqslant \alpha(k) \to |a(m) - a(n)| < 2^{-k}$. П. р. сходящаяся п.р. функция называется п. р. действительным числом. П.р. действительное число $a(n)$ называется п.р. рациональным, если существуют такие целые числа p, $q \geqslant 1$ и такая п.р. функция $R(k)$, что $n \geqslant R(k) \to |a(n) - p/q| < 2^{-k}$. Если могут быть найдены такие п.р. функции $i(p, q)$, $I(p, q)$, что $n \geqslant I(p, q) \to |a(n) - p/q| > 2^{-i(p, q)}$, то $a(n)$ — п.р. иррационально. Аналогично определяются п.р. алгебраичность и п.р.-трансцендентность.

В 1947 г. автором была доказана п.р. иррациональность $e^{p/q}$, в 1954 г. — п.р. иррациональность π (РЖМат, 1956, 5681); новые результаты устанавливают п.р.-трансцендентность e и π.

5446. Доказательство непротиворечивости рекурсивной арифметики. Черч (Consistency proof of recursive arithmetic. Church A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 6 (англ.)

Для рекурсивной арифметики в смысле Сколема элементарное доказательство непротиворечивости дано Гильбертом и Бернайсом (Hilbert D., Bernays P., Grundlage der Mathematik, 1934, Vol. 1, § 7). Этот метод показывает, что каждая теорема выполнима произвольной подстановкой цифр (или, как иногда говорят, нумералов) вместо ее переменных (так как аксиомы выполнимы таким способом и правила вывода сохраняют это свойство). Это доказательство непротиворечивости может быть перенесено в метаязык, который сам является разновидностью рекурсивной арифметики. Отсюда, по теореме Гёделя, могут быть получены результаты относительно независимости различных форм правила индукции в рекурсивной арифметике.

5447. Формальная система для предикативного анализа. Лоренцен (A formal system for predicative analysis. Lorenzen P.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 8 (англ.)

Строится формальная система для анализа, которая, подобно разветвленной теории типов, является предикативной, но допускает индуктивные определения без ограничения на порядок, так что, например, в этой системе может быть построена вся «оперативная» математика.

Из резюма автора

5448. Определимость и простота. Свенониус (Definability and simplicity. Svenonius Lars), J. Symbolic Logic, 1955, 20, № 3, 235—250 (англ.)

Автор называет матрицей всякое множество, элементами которого служат конечные последовательности элементов некоторого фиксированного множества U — „универсума". Упорядоченная пара (R, u), где R — отношение и u — матрица, называется объемом отношения R (содержательно u означает здесь множество тех упорядоченных наборов элементов U, для которых R истинно). Если K — класс отношений, то объемом K называется класс объемов отношений из K, в котором для каждого отношения $R \in K$ содержится один и только один его объем. Каждому классу отношений K ставится в соответствие некоторый класс $t(K)$ объемов K, называемых „возможными объемами K". Класс $t(K)$ подчинен определенным требованиям, выраженным посредством постулатов. В частности, требуется, чтобы вместе со всяким объемом K, имеющим вид $\{(R_i, u_i)\}$, в $t(K)$ содержался также объем $\{(R_i, Pu_i)\}$, где P — произвольное взаимно однозначное отображение U на себя. Понятие „возможного объема" используется далее для формализации понятия определимости отношения (или класса отношений) через другое отношение (или другой класс отношений). Понятие определимости сопоставляется с понятием „большей или меньшей сложности" отношений и классов отношений, введенным Гудманом (Goodman N., The structure of appearance). В качестве применения введенных понятий доказываются теоремы о взаимной сложности классов n-местных n — 1-местных отношений, а также классов симметрических и асимметрических двуместных отношений.

А. В. Гладкий

5449. О некоторых классификациях отношений с помощью ограниченных изоморфизмов. I. Общая теория. Фраиссе (Sur quelques classifications des relations, basées sur des isomorphismes resteints. I. Étude générale. Fraïssé Roland), Publs scient. Univ. Alger, 1955, A2, № 1, 15—60 (франц.)

Первая из трех частей работы под общим названием, указанным в заголовке.

Основные определения: m-отношением R с базой E называется функция на множестве E^m со значениями во множестве $\{+, -\}$. Отношение S с базой $F \subseteq E$, совпадающее с R на F, называется ограничением R на F и обозначается $S = R|F$. В этом случае R называется продолжением S. Два m-отношения R и R' с базами E и E' соответственно называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение φ базы E на E' такое, что $R(x_1, \ldots, x_m) = R'(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_m))$.

Под ограниченным изоморфизмом φ отношения R с базой E в отношение R' с базой E' понимается изоморфизм ограничений $R|F$ и $R'|\varphi(F)$, где $F \subseteq E$, а φ определено на F и взаимно однозначно отображает F на $\varphi(F) \subseteq E'$. Из соображений удобства вводится элемент $\varphi_\varnothing$ с условиями: $\varphi_\varnothing$ есть взаимно однозначное отображение пустого множества на себя, для всяких двух m-отношений R и R', $\varphi_\varnothing$ есть ограниченный изоморфизм R в R', всякое отображение является продолжением $\varphi_\varnothing$.

Ограниченные изоморфизмы φ отношения R в R', определенные на конечных частях базы E, классифицируются следующим образом: Пусть F — множество, на котором определено φ, q — число элементов и $p \geqslant q$

Говорят, что φ есть $\begin{bmatrix} o \\ p \end{bmatrix}$-изоморфизм; далее по индукции: если для всякой части $\overline{F}(F \subset \overline{F} \subset E)$, имеющей не более p элементов, существует взаимно однозначное отображение $\overline{\varphi}$, являющееся продолжением φ на $\overline{F}$, которое есть $\begin{bmatrix} n-1 \\ p \end{bmatrix}$-изоморфизм, и то же с переменной мест R и R', φ и φ^{-1}, то φ называется $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-изоморфизмом.

Наконец, для m-отношений определяются эквивалентности $\overset{n}{\underset{p}{\sim}}$, $\sim \overset{n}{o} \sim$ и $\sim \overset{\omega}{o} \sim$, изучению которых и посвящена данная статья. Именно, $R \overset{n}{\underset{p}{\sim}} R'$ означает, что отображение $\varphi_{\mathfrak{A}}$ является $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-изоморфизмом отношения R в R' (в этом случае R' называется также $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-родственным (parente) отношению R); $R \sim \overset{n}{o} \sim R'$ означает, что $R \overset{n}{\underset{p}{\sim}} R'$ для всякого целого $p \geqslant 0$; $R \sim \overset{\omega}{o} \sim R'$ означает, что $R \sim \overset{n}{o} \sim R'$ для всякого целого $n \geqslant 0$.

Основные результаты содержатся в теоремах I—VI.

Теорема I. Для данных m, n, p число классов m-отношений по эквивалентности $\overset{n}{\underset{p}{\sim}}$ конечно.

Теорема II. Если даны отношение R с бесконечной базой E и бесконечная часть D в E, то существует множество $\overline{D}(D \subset \overline{D} \subset E)$ той же мощности, что и D, так что $R \mid \overline{D} \sim \overset{\omega}{o} \sim R$.

Теорема III. Пусть дано семейство пар чисел n_i, p_i; обозначим через Γ_i классы m-отношений, определенные каждый посредством $\overset{n_i}{\underset{p_i}{\sim}}$. Если пересечение Γ_i пусто, то пусто пересечение конечного числа из них.

Теорема IV. Пусть даны два отношения R и S. Если всякое ограничение S на конечную часть своей базы изоморфно некоторому ограничению R, то существует продолжение $\overline{S}$ отношения S такое, что $\overline{S} \sim \overset{\omega}{o} \sim R$. Кроме того, можно выбрать $\overline{S}$ так, что его база будет той же мощности, что и база S.

Теорема V. Пусть даны отношение R, база которого имеет бесконечную мощность π, и мощность $\overline{\pi} > \pi$. Тогда существует продолжение $\overline{R}$ отношения R такое, что $\overline{R} \sim \overset{\omega}{o} \sim R$ и база $\overline{R}$ имеет мощность $\overline{\pi}$.

Теорема VI. Для всякого множества отношений R_i, принадлежащих одному классу Γ по эквивалентности $\sim \overset{\omega}{o} \sim$, существует в Γ продолжение, общее для всех R_i (или для изоморфных отношений).

Для доказательства теорем I — III строится специальная теория цепей отношений. Укажем лишь на главные понятия. m-цепью называется семейство R m-отношений R_i (i пробегает упорядоченное множество I) такое, что для $i < j$ отношение R_j есть ограничение отношения R_i (возможно $R_j = R_i$; через $R^{[n]}$ обозначается цепь из $n+1$ членов, равных R). Ограничением цепи $R = \{R_i\}$ $(i \in I)$ называется цепь $R' = \{R'_i\}$ $(i \in I)$, в которой каждое R'_i есть ограничение R_i. Аналогичным образом с m-отношений на m-цепи перенесены понятия изоморфизма, $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-изоморфизма и $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-родства. Наконец, $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-связность цепи $R' = \{R'_i\}$ $(i \leqslant r', E'_i$-базе $R'_i)$ с цепью $R = \{R_i\}$ $(i \leqslant r, E_i$-базе $R_i)$, где $n \leqslant \min[r, r']$, означает, что для всякого $i \leqslant n$ и всякой части H пересечения $E_i \cap E'_i$, имеющей не более p элементов, тождественное отображение H на себя является $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-изоморфизмом цепи R в R' (нетранзитивное отношение $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-связности цепей рефлексивно и симметрично и обозначается через $R \overset{n}{\underset{p}{\leftrightarrow}} R'$). Автор устанавливает большое число предложений, как вспомогательных, так и имеющих самостоятельный интерес.

Доказательство теорем IV — VI основывается на теории проекционных фильтров, развитой автором в предыдущих работах (РЖМат, 1957, 2848; 1958, 1771) и в данной статье (§§ 5, 6). Главные понятия здесь следующие. Под фильтром понимается система непустых множеств, в которой пересечение всяких двух множеств содержит множество системы. Фильтр Φ, определенный на множествах отображений φ базы E в E', называется проекционным фильтром E в E'. Отношение R называется обратной проекцией отношения R' по Φ, если отображения φ, удовлетворяющие равенству $R(a_1, \ldots, a_m) = R'(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m))$, образуют элемент фильтра Φ, каковы бы ни были $a_1, \ldots, a_m$ из E. Естественным образом для проекционных фильтров определяются понятия ограничения и продолжения. Фильтр Φ называется нормальным, если для каждой конечной части $F \subset E$ множество отображений φ, взаимно однозначных на F, является элементом Φ. Наконец, важную роль в доказательствах играют условия $K_{n,p}(F, U)$: пусть F — конечная часть E, а U — некоторое семейство отображений φ множества E в D-базу отношения R; говорим, что F и U удовлетворяют условию $K_{n,p}(F, U)$ (n, p — целые $\geqslant 0$), если существует конечная последовательность множеств $F_i (i \leqslant n)$ такая, что $E \supset F_0 \supset \ldots \supset F_n \supset F$ и цепь $R = \{R \mid \varphi(F_i)\}$ является $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-связной с $R^{[n]}$ для всякого $\varphi \in U$. Вводится также ряд других понятий. Доказано, кроме основных, много промежуточных результатов.

Проблемы. P_1: Даны отношения R и S из одного класса Γ, определенного посредством $\sim \overset{\omega}{o} \sim$; существует ли в Γ отношение, изоморфное одновременно некоторому ограничению R и некоторому ограничению S? P_2 (Д. Скотт): Если $R \sim \overset{1}{o} \sim S$, то существуют ли R', S' такие, что каждое из них изоморфно ограничению другого и $R' \sim \overset{\omega}{o} \sim R$, $S' \sim \overset{\omega}{o} \sim S$? P_3: Если дана бесконечная цепь отношений R_n (R_{n+1} — продолжение R_n), принадлежащих одному и тому же классу Γ по эквивалентности $\sim \overset{\omega}{o} \sim$, то существует ли цепь отношений R'_n (R'_{n+1} — продолжение R'_n) такая, что R'_n изоморфно R_n при любом n, а продолжение P всех R'_n на объединении их баз принадлежит Γ? Определение: отношение R с базой E называется совершенным, если для любой конечной части F базы E всякий $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$-изоморфизм R в R, определенный на F, является ограничением некоторого автоморфизма R. P_4: Всякий ли класс отношений по эквивалентности $\sim \overset{\omega}{o} \sim$ содержит совершенное отношение с конечной или счетной базой? (Частичный ответ — в II части работы (реф. 5450)).

Наконец, автор указывает на связь полученных результатов с рядом известных предложений математической логики. Именно, в силу одного результата автора (РЖМат, 1957, 3717) теоремы II, III, IV, V соответственно следует рассматривать как теоретико-множественные эквиваленты следующих теорем: Левенгейма — Сколема; Гёделя — о полноте узкого исчисления предикаторов (в форме теоремы компактности Тарского, см. Proc. Internat. Congr. Math., 1950, 705—720, теорема 13); Хенкина (РЖМат, 1954, 5426; теорема 1); Мальцева (Матем. сб., 1936, **1**, 323—336, § 6). При этом эквивалентность $\overset{\omega}{\sim} o \sim$ является теоретико-множественным толкованием „арифметической эквивалентности" Тарского (см. там же, опред. 21). Д. А. Захаров

5450. О некоторых классификациях отношений с помощью ограниченных изоморфизмов. II. Применение к отношениям порядка и построение примеров, доказывающих различие этих классификаций. Фраиссе (Sur quelques classifications des relations, basées sur des isomorphismes restreints. II. Application aux relations d'ordre et construction d'exemples montrant que ces classifications sont distinctes. Fraïssé Roland), Publs scient. Univ. Alger, 1955, **A2**, № 2, 273—295 (франц.)

Продолжение публикации (реф. 5449). Изучаются эквивалентности $\overset{n}{\underset{p}{\sim}}$, $\overset{n}{\sim} o \sim$, $\overset{\omega}{\sim} o \sim$ на семействах порядковых типов и трансфинитных чисел. Основные результаты:

Теорема I. 1) Пусть α_i, α_i' — два семейства порядковых типов; σ и σ' — суммы α_i и α_i' соответственно, упорядоченные с помощью одного и того же отношения порядка I. Если $\alpha_i \overset{n}{\underset{p}{\sim}} \alpha_i'$ для всякого i (n, p — целые $\geqslant 0$), то $\sigma \overset{n}{\underset{p}{\sim}} \sigma'$. 2) Пусть α, α', β, β' — порядковые типы; если $\alpha \overset{n}{\underset{p}{\sim}} \alpha'$ и $\beta \overset{n}{\underset{p}{\sim}} \beta'$, то $\beta\alpha \overset{n}{\underset{p}{\sim}} \beta'\alpha'$. 3). 1) и 2) верны и для $\overset{n}{\sim} o \sim$, $\overset{\omega}{\sim} o \sim$.

Теорема II. Пусть α и α' — трансфинитные числа.

1) Если $\alpha < \omega^\omega$ и $\alpha' \overset{n}{\sim} o \sim \alpha$, то $\alpha' = \alpha$.

2) Если $\alpha \geqslant \omega^\omega$, $\alpha = \lambda\omega^\omega + \rho$, $\rho < \omega^\omega$, то числа α' такие, что $\alpha' \overset{\omega}{\sim} o \sim \alpha$, имеют вид $X\omega^\omega + \rho$, где λ' — любое трансфинитное число $\neq 0$.

§§ 4, 5 посвящены доказательству различия $\overset{n}{\sim} o \sim$ при разных n. Показано, например, что $\omega^n \overset{2n}{\sim} o \sim \omega^{n+1}$, но не $\omega^n \overset{2n+1}{\sim} o \sim \omega^{n+1}$ ($n \geqslant 1$) и $\omega^{n+1} \overset{2n+1}{\sim} o \sim \omega^{n+1} + \omega^n$, но не $\omega^{n+1} \overset{2n+2}{\sim} o \sim \omega^{n+1} + \omega^n$ ($n \geqslant 0$). Наконец, доказаны два утверждения части I (реф. 5449). Д. А. Захаров

5451. Полнота содержащих импликацию двузначных исчислений высказываний и исчислений предикатов первой ступени. Шрётер (Die Vollständigkeit der die Implikation enthaltenden zweiwertigen Aussagenkalküle und Prädikatenkalküle der ersten Stufe. Schröter Karl), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1957, **3**, № 2, 81—107 (нем.)

Автор излагает метод установления полноты логических исчислений, основанный на следующих соображениях.

Пусть даны два логических исчисления K_1 и K_2, причем относительно K_2 известно, что оно полно. Пусть имеется отображение φ, ставящее каждой формуле P исчисления K_1 формулу $\varphi(P)$ исчисления K_2 так, что если P общезначима, то $\varphi(P)$ также общезначима. Пусть имеется отображение ψ, ставящее каждой формуле Q исчисления K_2 формулу $\psi(Q)$ так, что если Q выводима в K_2, то $\psi(Q)$ выводима K_1. Пусть, наконец, $\psi(\varphi(P))$ выводима в K_1 одновременно с P. Тогда исчисление K_1 полно. Действительно, если P общезначима, то $\varphi(P)$ общезначима. Так как K_2 полно, то $\varphi(P)$ выводима в K_2, а тогда и $\psi(\varphi(P))$ выводима в K_1. Следовательно, и P выводима в K_1.

Этот метод автор применяет для построения простых по структуре полных систем аксиом, содержащих импликацию двузначных исчислений высказываний и исчислений предикатов первой ступени с произвольным образом вводимыми логическими связками.

Н. М. Нагорный

5452. Предметные области и соответствующие исчисления. Сталь (Les univers du discours et les calculs correspondants. Stahl Gerold), Ann. Univ. Paris, 1957, **27**, № 4, 530—539 (франц.)

Вводится определение выполнимости и общезначимости формул узкого исчисления предикатов для случая пустой области индивидуумов. Исследуется задача построения исчислений, теоремами которых являлись бы формулы, общезначимые в любой области, содержащей соответственно не более n, в точности n, по крайней мере n индивидов, n — целое неотрицательное число.

Ю. Т. Медведев

5453. Относительно проблемы Шольца. Мостовский (Concerning a problem of H. Scholz. Mostowski Andrzej), Z. math. Logik und Grundl. Math. 1956, **2**, № 3, 210—214 (англ.)

Дается доказательство тех результатов решения проблемы Шольца (Scholz H., J. Symbolic Logic, 1952, **17**, 160), которые отличны от результатов, полученных Ассером (РЖМат, 1958, 1763).

Определяется K — наименьший класс неотрицательных функций от конечного числа аргументов, принимающих неотрицательные целые значения и удовлетворяющих следующим условиям:

1. К классу K принадлежат функции Z_k, U_k^i, S, C ($k = 1, 2, \ldots; i \leqslant k$):

$Z_k(x_1, \ldots, x_k, n) = 0$,

$U_k^i(x_1, \ldots, x_k, n) = \min(x_i, n)$,

$S(x, n) = \min(x + 1, n)$,

$C(n) = n$.

2. Если функции $f_h(x_1, \ldots, x_k, n)$, $f_l(y_1 \ldots, y_p, n)$ принадлежат к K, то сложная функция

$f_h(x_1, \ldots, x_{j-1}, f_l(y_1, \ldots, y_{p_1}, n), x_{j+1}, \ldots, x_k, n)$

также принадлежит к K (y_k не обязаны быть отличными от x_k).

3. Если к K принадлежат функции $f_h(x_1, \ldots, x_k, n)$, $f_l(x, y, x_1, \ldots, x_k, n)$ и если $f_i(0, x_1, \ldots, x_k, n) = f_h(x_1, \ldots, x_k, n)$, $f_i(x + 1, x_1, \ldots, x_k, n) =$

$= \min(f_l(x, f_i(x, x_1 \ldots, x_k, n), x_1, \ldots, x_k, n), n)$, то f_i принадлежит к K.

Доказывается теорема: Для каждой функции $f(n)$ из K существует формула F исчисления предикатов первой ступени с тождеством такая, что F имеет модель на множестве из $n + 1$ элемента в том и только том случае, если $f(n) = 0$. В процессе доказательства указан метод построения формулы F исчисления предикатов первой ступени с тождеством по функции из класса K.

Далее с помощью функций, принадлежащих классу K и удовлетворяющих условию теоремы, определяется множество простых чисел и множество таких n, что $n^2 + 1$ — простое число. Положительное решение про-

блемы Шольца для множества простых чисел и множества n, для которых n^2+1 — простое, следует из доказанной теоремы. Ставится вопрос: имеет ли проблема Шольца положительное решение для множества простых чисел Ферма $2^{2^n}+1$. Т. Л. Майстрова

5454. Семантическая характеризация инвариантных и абсолютных формул. Мостовский (A semantical characterization of invariant and absolute formulas. Mostowski A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 9 (англ.)

Пусть $F(R_1, \ldots, R_n)$ — формула простой теории типов (Church, J. Symbolic Logic, 1940, 5, 56) такая, что тип ее свободных переменных совпадает с типом отношений между индивидуалами. F называется (a) инвариантной, (b) дуально инвариантной, (c) абсолютной, если для произвольных отношений $R_1, \ldots, R_n$ и произвольной модели M (Henkin L., J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 81), содержащей $R_1, \ldots, R_n$, условие (1), что $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяют F в M (a) влечет, (b) вытекает из, (c) эквивалентно условию (2), что $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяют F в стандартной модели с теми же самыми индивидуалами, что и M.

Теорема. Для всякой F, которая (a) инвариантна, (b) дуально инвариантна, (c) абсолютна, существует формула $G(R_1, \ldots, R_n, X_1, \ldots, X_p)$ такая, что (i) $p=0$ в случае (c) и произвольные отношения $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяют F в стандартной модели M_0, если они удовлетворяют в M_0 формуле (a) $(EX_1, \ldots, X_p)G$, (b) $(X_1, \ldots, X_p)G$, (c) G

5455. Распространение теоремы Лёвенгейма — Сколема на логику второй ступени. Тарский (An Extension of the Löwenheim-Skolem theorem to a second-order logic. Tarski A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 10 (англ.)

Рассматривается логика L второй ступени со следующими видами символов: индивидуальные переменные; переменные множества, пробегающие произвольные конечные множества индивидуалов; пропозициональные связки; кванторы, связывающие переменные любого вида; знак равенства; другие постоянные предикаты с индивидуальными переменными в качестве аргументов; знак принадлежности $\in$. Как и в логике первой ступени, если дано множество Σ суждений в L, всякая структура бесконечной мощности α, являющаяся моделью Σ, имеет подструктуры любой бесконечной мощности $<\alpha$, которые также являются моделями Σ. Однако, в отличие от логики первой ступени, Σ может не иметь модели мощности $>\alpha$.

5456. Счетные модели в теории множеств. Ганди (Denumerable models in set theory. Gandy R. O.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 6 (англ.)

Показано, что множества, конструируемые (в смысле Гёделя) с использованием только рекурсивных порядковых чисел, образуют модель для систем трансфинитных типов, предложенных Лоренценом и Ваном. Обсуждается возможность использования высших счетных порядковых чисел для построения подобных моделей для непредикативных систем.

5457. Метод доказательства невыводимости для интуиционистского исчисления высказываний. Крейсел, Патнам (Eine Unableitbarkeitsbeweismethode für den intuitionistischen Aussagenkalkül. Kreisel G., Putnam H.), Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1957, **3**, № 3-4, 74—78 (нем.)

Лукасевич (Lukasiewicz J., Indagationes math., 1952, **14**, 209) высказал предположение, которое равносильно следующему утверждению: Пусть K — класс формул интуиционистского исчисления высказываний I, обладающий следующими свойствами: а) K замкнут относительно правил подстановки и modus ponens, б) K содержит все формулы, выводимые в I, в) если K содержит $(A \vee B)$, то K содержит A или B. Тогда K совпадает с классом всех выводимых формул I или K противоречив.

Авторы опровергают предположение Лукасевича. Именно, доказана следующая теорема: Пусть K — класс формул, выводимых в I из формул вида

$$((\neg P \supset (Q \vee R)) \supset ((\neg P \supset Q) \vee (\neg P \supset R))).$$

K шире класса формул, выводимых в I. K замкнут относительно правил подстановки и modus ponens. Если K содержит $(A \vee B)$, то K содержит A или B. K непротиворечив.

Авторы отмечают неточность в формулировке теоремы 1 работы Б. Ю. Пильчак (Укр. мат. ж., 1952, 4, 174—194) Н. М. Нагорный.

5458. Конечно-модельное свойство и подсистемы классического исчисления высказываний. Харрон (The finite model property and subsystems of classical propositional calculus. Harrop R.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 7, (англ.)

Исчисление высказываний обладает конечно-модельным свойством (the finite model property), если для всякой невыводимой формулы существует конечная модель, в которой эта формула не выполняется. Классическое и интуиционистское исчисления обладают этим свойством. Неразрешимое исчисление не может обладать им. В недавно опубликованной статье показано, что существует разрешимое исчисление без этого свойства. Этот и некоторые другие результаты этой статьи распространяются на подсистемы классического исчисления высказываний. Связки в ранее построенных исчислениях мало похожи на обычно употребляемые (импликацию, отрицание и т. д.).

5459. Об одном фрагменте импликативного исчисления высказываний. Расёва (On a fragment of the implicative propositional calculus. Rasiowa Helena), Studia Logica, 1955, **3**, 208—226 (польск.; рез. русск., англ.)

Рассмотрим множество всех общезначимых формул с импликацией (C) в качестве единственного функтора и таких, что после замены C эквивалентностью (E) они остаются общезначимыми. Это множество характеризуется произведением в смысле Калицкого (Kalicki, J. Symbolic Logic., 1950 **15**, 174—181) матриц импликации и эквивалентности, которое является четырехзначной матрицей

C	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	1	2	1	2
4	2	1	2	1

Изучаемые формулы могут быть описаны, так же как такие общезначимые формулы, в которых всякая переменная входит четное число раз. Автор показывает, что каждая такая общезначимая формула является следствием (по правилам modus ponens и подстановки) следующих взаимно независимых аксиом:

1. $CCpq\,CCqr\,Cpr$; 2. $Cq\,Cp\,Cpq$; 3. $CCCpq\,CCpqpp$. Добавление любой импликационной общезначимой формулы, независимой от 1—3 (т. е. с некоторой переменной, входящей нечетное число раз), дает полное исчисление высказываний. Если добавить обычные правила для кванторов, то из 1—3 можно вывести полную импликационную логику. Последний результат принадлежит Слупецкому. H. Hiż

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 3,226.

5460. Производные правила и анормальные матрицы в исчислении высказываний. Порт (Derived rules and non-normal matrices in the propositional calculus.

Porte J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 9 (англ.)

Определяются следующие понятия. Строгая выполнимость правила на матрице (регулярная матрица — это такая, на которой строго выполним modus ponens); связочные правила (modus ponens — связочное правило, а правило подстановки — нет); органические правила (т. е. нетривиальные правила). Затем с помощью распространения обобщенного Лосем метода Линденбаума доказывается, что для всякого связочного и органического производного правила в исчислении высказываний имеется конечная характеристическая матрица, на которой это правило не выполняется строго. Такие матрицы являются анормальными.

5461. Метод упрощения форм выражения функций истинности. Войшвилло Е. К., Научн. докл. высш. школы. Филос. н., 1958, № 2, 120—135

Предлагается способ нахождения упрощенных нормальных форм (силлогистических многочленов) (Blake A., Canonical expression in Boolean algebra. Diss. Chicago, 1937 (1938)) и всевозможных минимальных нормальных форм (конъюнктивных и дизъюнктивных) для функций алгебры логики. Автор рассматривает различные множества наборов букв. При этом каждое множество наборов естественным образом связывается с соответствующей нормальной формой (конъюнктивной (к. н. ф.) или дизъюнктивной (д. н. ф.)).

Так, для множества $\{ab; a\bar{b}c; ad; \bar{a}\}$ соответствующая к.н.ф. будет $(a \vee b)(a \vee \bar{b} \vee c)(a \vee d)\,\bar{a}$; соответствующая д.н.ф. будет: $ab \vee a\bar{b}c \vee ad \vee \bar{a}$. Всякой нормальной форме соответствует в свою очередь определенное множество (наборов).

Замыкающим набором для данного множества (наборов) называется такой набор, который содержит хотя бы одну букву из каждого набора этого множества. Простым замыкающим набором называется замыкающий набор, из которого нельзя выбросить ни одной буквы так, чтобы он остался замыкающим. Нахождение упрощенной нормальной формы сводится к нахождению множества всех простых замыкающих наборов некоторого множества наборов. Двойственный результат формулируется для исходной к. н. ф.

Указывается метод, который позволяет для любого множества наборов найти все возможные простые замыкающие наборы; тем самым полностью решается задача нахождения упрощенных нормальных форм. Предложенный метод упрощения, по мнению автора, является во многом более удобным, простым и коротким по сравнению с другими известными методами.

Во второй части предлагаются два способа нахождения всех минимальных нормальных форм для функций, заданных в нормальной форме. Благодаря применению методов, развитых автором, эти способы имеют ряд преимуществ перед другими способами минимизации. Автор считает что предложенный им 2-й способ можно будет легко машинизировать. В работе замечен ряд опечаток. Ю. Хмелевский

5462. О суждениях ни необходимых, ни невозможных. Прайор (On propositions neither necessary nor impossible. Prior A. N.), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 2, 105—108 (англ.)

У Аристотеля встречается тезис, который Бохенский (Bochenski I. M., La logique de Théophraste, гл. V) формализует в виде формулы $EMpMNp$ («p возможно тогда и только тогда, когда возможно $\neg p$»). Согласно Бохенскому, Аристотель понимал суждение «p возможно» как «p ни необходимо, ни невозможно». Автор статьи считает, что при таком понимании этот тезис приемлем в модальной логике, и рассматривает возражения Лукасевича, который считает, что употребление этого тезиса приводит к противоречию. Лукасевич (пользуется при этом тезисом Лесневского $CK\varphi p\varphi Np\varphi$ (если «φp и $\varphi \neg p$, то φq»), заменяя в нем оператор φ модальной функцией M («возможно»). Автор считает такую замену неравномерной и приводит доводы в пользу своей точки зрения. Н. М. Нагорный

5463. Теория нормативных предложений. Калиновский (Teoria zdań normatywnych. Kalinowski Jerzy), Studia Logica, 1953 (1954), **1**, 147—184 (польск.)

Польский вариант статьи, прореферированной ранее (РЖМат, 1958, 3503).

5464. Автоматизация силлогизмов в многозначной логике. Бадильо-Баральят (Automatización de los silogismos en una lógica polivalente. Badillo-Barallat M. C.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1956, **5**, № 14, 1—10 (исп.; рез. англ.)

Статья общего характера о связи между многозначной логикой и вычислительными машинами. Н. М. Нагорный

5465. Справедливые пари и индуктивные вероятности. Кемень (Fair bets and inductive probabilities. Kemeny John G.), J. Symbolic Logic, 1955, **20**, № 3, 263—273 (англ.)

Рассматривается система индуктивной логики Карнапа и ее центральное понятие — степень подтверждения $c(h, e)$. Это функция, выражающая вероятность истинности гипотезы h, если известно, что e истинно (степень подтверждения гипотезы h знанием e), где h и e — предложения в логическом языке и им приписаны некоторые числа, определяемые (с помощью так называемой «функции меры») их формальной структурой в этом языке (см. также реф. 5466). Класс допустимых (по Карнапу, «регулярных») c-функций определяется следующими пятью условиями:

1) $0 \leqslant c(h, e) \leqslant 1$;

2) если h и e эквивалентны h' и e' соответственно, то $c(h, e) = c(h', e')$;

3) если из e имплицирует h, то $c(h, e) = 1$;

4) если из e следует, что h и h' не могут быть одновременно истинными, то

$$c(h \vee h', e) = c(h, e) + c(h', e).$$

5) $c(h \,\&\, h', e) = c(h, e) \times c(h', h \,\&\, e)$.

Автор считает, что Карнап не дал достаточного оправдания для выбора именно этих пяти услозий, и предлагает такое оправдание с помощью понятий системы пари и справедливого коэффициента. Пусть при определенных обстоятельствах e двое делают ставки относительно осуществления события h. Каждый должен уплатить сумму qS, если он неправ, и получить сумму $(1 - q)S$, если он прав. Система пари состоит из следующих решений: 1) при каких обстоятельствах происходит пари и какие гипотезы делаются при этих обстоятельствах, т. е. выбор (e, h)-пар; 2) выбор q и S для каждой пары; 3) решение о том, ставить ли «за» или «против» h в каждом случае. Множество коэффициентов q пари (для всех (e, h)-пар) является справедливым, если не существует системы пари, которая гарантирует выигрыш. Доказывается, что всякая функция $c(h, e)$, определяемая условиями 1)—5), образует множество справедливых коэффициентов. О. П. Кузнецов

5466. Замечания о двуместных предикатах и правильных последовательностях функций меры. Рубин, Сапс (A note on two-place predicates and fitting sequences of measure functions. Rubin H., Suppes P.), J. Symbolic Logic, 1955, **20**, № 2, 121—122 (англ.)

Рассматриваются вопросы, связанные с системой индуктивной логики Карнапа. В системе Карнапа для языков L_n (n — число индивидуумов) с фиксированным числом предикатов определяется «функция меры» m^*, приписывающая каждому предложению i в L_n некоторое число $m^*(i)$ в интервале (0,1). С помощью этих

чисел определяется затем функция $c(h, e)$ — степень подтверждения гипотезы h знанием e (h и e — предложения в L_n), т. е. вероятность истинности h, если известно что e истинно (см. также реф. 5465). Функция меры строится с помощью понятий описания состояния и описания структуры. Описание состояния для языка L_n с m одноместными предикатами есть конъюнкция вида $P_1 a_1 \,\&\ldots\&\, P_1 a_n \,\&\, P_2 a_1 \&\ldots.\,\&\, P_m a_n$, причем над некоторыми из $P_i a_j$, возможно, стоят отрицания. Пусть $S(N)$ — некоторое описание состояния, где N — упорядоченная система из n индивидуумов $a_1 \ldots a_n$. Описания состояния $S(N_1)$ $S(N_2)$ называются изоморфными тогда и только тогда, когда N_2 есть перестановка N_1. Описанием структуры Карнап называет дизъюнкцию всех изоморфных описаний состояния Он определяет функцию меры m^* только для языков с одноместными предикатами, причем так, что для любого предложения $im^*(i)$ одинаковы во всех языках, где i встречается (для этих языков $m^*(i)$ образует правильную (fitting) последовательность). В данной заметке показывается, что это свойство m^* не сохраняется для языков с двухместными предикатами. При этом используется результат Дэвиса (РЖМат, 1954, 2489), подсчитавшего число описаний структуры в таких языках (Карнапу это числоне было известно). О. П. Кузнецов

5467. О «хорошей» и «плохой» индукции. Кокошинская (O «dobrej» i «złej» indukcji. Kokoszyńska Maria), Studia log., 1957, **5**, 43—70 (польск.)

Автор пользуется термином «индуктивный вывод» для обозначения недедуктивного вывода. Возникает вопрос, как отличать «правильные» индуктивные выводы от „неправильных". Автор считает, что логическая теория вероятностей (в смысле Кэйнса) дает почву для введения понятия правильности индуктивного вывода. На основе аксиом этой теории, данных О. Хелмером и П. Оппенгеймом, можно ввести два понятия правильности индуктивного вывода. Индуктивный вывод является правильным в нерелятивизованном смысле, если вероятность заключения по отношению к посылкам и начальной информации (assumed knowledge) больше, чем вероятность заключения только по отношению к начальной информации. Второе, релятивизованное, понятие правильности индуктивного вывода позволяет нам только утверждать, что один индуктивный вывод является более или менее правильным, чем другой. Автор придает большое значение этим понятиям правильности и ошибочности индукции и надеется, что они окажутся полезными в методологии науки. R. Suszko

5468. Об операторах, реализуемых в логических сетях. Трахтенброт Б. А., Докл. АН СССР, 1957, **112**, № 6, 1005—1007

Оператор без предвосхищения задается посредством рекурсивной схемы $z(t) = \Phi[x(t), q(t-1)]$, $q(t) = \Psi[x(t), q(t-1)]$, где $t = 1, 2, \ldots$, а $x(t)$, $z(t)$ и $q(t)$ — соответственно входная, выходная и вспомогательная буквы (принадлежащие некоторым конечным алфавитам) в момент времени t; $q(0)$ — начальная вспомогательная буква. Операторы, перерабатывающие одинаковые последовательности входных букв $(x(1), x(2), \ldots)$ в одинаковые же последовательности выходных букв $(z(1), z(2), \ldots)$, считаются совпадающими.

Весом оператора без предвосхищения называется минимальное число вспомогательных букв, с помощью которых этот оператор может быть задан. Удельной памятью оператора, определенного на множестве X^μ всех входных последовательностей конечной длины μ, называется отношение $\log_2 k/\mu \log_2 m$, где k — вес оператора, m — число входных букв.

Теорема. При любом $\varepsilon > 0$ отношение числа операторов на X^μ, имеющих удельную память $< 1 - \varepsilon$, к общему числу операторов на X стремится к 0 при $\mu \to \infty$.

Периодом и приведенной длиной периодической последовательности $x(1), x(2), \ldots, x(p), (x(p+1), \ldots, x(p+r)$ называются соответственно числа r и $p + r$.

Теорема. Оператор с весом k переводит любую периодическую последовательность с периодом r и приведенной длиной $p + r$ в периодическую последовательность с периодом $\leqslant k \cdot r$ и приведенной длиной $\leqslant p + k \cdot r$.

Автор указывает далее, что два оператора веса k, совпадающие на X^{2k-1}, совпадают вообще (Аналогичное утверждение было доказано в статье Э. Ф. Мура (см. сб. Автоматы, М., Изд-во ин. лит. 1956, стр. 201.)

Ю. Т. Медведев

5469. Дополнительность и логика. Вейцзеккер (Komplementarität und Logik. Weizsäcker C. F. v.), Naturwissenschaften, 1955, **42**, № 19, 521—529; № 20, 545—555 (нем.)

В отличие от обычного понимания принципа дополнительности, основанного на соотношении неопределенности (дополнительность координаты и импульса), автор показывает, что ядром принципа дополнительности Бора является несовместимость пространственно-временного представления как формы созерцания и требования детерминизма.

В связи с этим ставится задача построения логики дополнительности, которая относилась бы к классической логике так, как относится к классической механике квантовая, а именно, чтобы классическая логика явилась бы как методическим априори, необходимым в метаязыке для формулирования логики дополнительности, так и ее предельным случаем.

Предлагается следующий вариант логики дополнительности (точнее, исчисления высказываний). Элементарным называется высказывание, описывающее «чистый случай». Предполагается, что элементарное высказывание может иметь значениями истинности не только 0 и 1, но и любое комплексное число. Элементарное высказывание истинно, если его значение есть 1, ложно, если оно есть 0, неразрешимо во всяком другом случае. На этой основе вводится ряд логических и онтологических понятий.

Элементарное высказывание разрешимо, если оно не неразрешимо; два элементарных высказывания дополнительны, если они не могут быть разрешимыми одновременно. В последнем случае обозначенные элементарными высказываниями состояния называются коэкзистентными.

Понятию физического эксперимента соответствует логическое понятие вопроса. Вопрос является альтернативой, если из истинности одного ответа следует ложность остальных и из ложности всех, кроме одного, истинность этого последнего. Альтернатива в исчислении высказываний, например, вопрос «Через какое из двух отверстий прошел электрон», не обязательно предполагает истинность одного из двух ответов. В то же время в метаязыке можно сформулировать соответствующий данной альтернативе вопрос, из множества ответов на который один окажется истинным. В нашем примере таким вопросом будет: «Какие значения истинности имеют высказывания: «Электрон прошел через первое отверстие» и «Электрон прошел через второе отверстие»?. Таким образом в метаязыке будет справедлива классическая логика. Логические связки вводятся по Биркгофу и Нейману (Birkhoff G., Neumann J., Ann. Math., 1936, **37**, 823).

Делается предположение, что введение дополнительности также и в метаязык равнозначно с вторичным квантованием.

В. А. Янков

5470. Логика экспериментальных предложений. Детуш-Февриe (La logique des propositions expérimentales. Destouches-Février P.), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, **A5**, 115—118 (франц.)

Автор различает две стадии в процессе выявления структуры физических теорий. На первой стадии, полуинтуитивной, исследованию которой посвящена книга автора La structure des théories physiques (Presses Universitaires, Paris, 1951), констатируется необходимость проведения рассуждений на нескольких уровнях. Реферируемая статья дает схематическое описание второй стадии, на которой это различие уровней становится явным благодаря формализации. В основу последней кладутся «эмпирические предложения», т. е. высказывания типа «В момент времени t_0 результат измерения величины A лежит в интервале E». Концами интервала E являются рациональные числа; длина его определяется точностью прибора, служащего для измерения величины A. В определении «экспериментальных предложений», в отличие от эмпирических предложений, фигурирует не весь интервал E, а пересечение его со «спектром» рассматриваемой физической величины A, который учитывает квантовый характер изменения A. Обсуждается также случай нескольких величин (которые могут и не быть одновременно измеримыми). Приводится эскиз формального языка для выражения логических соотношений между экспериментальными предложениями физической теории. Ю. Т. Медведев

5471. Логика и физические теории. Детуш (La logique et les théories physiques. Destouches Jean-Louis), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A5, 119—128 (франц.)

Доклад посвящен роли различных логических исследований в построении физических теорий. Обсуждаются, в частности, следующие типы логических исследований в физике: а) чисто логические исследования, в которых физическая теория рассматривается только как дедуктивная теория; б) различные виды «физико-логических» исследований, учитывающих не только дедуктивный характер теории, но и ее связь с опытом; в) исследования, относящиеся к «исчислению экспериментальных высказываний», а также к различным исчислениям высказываний, к введению модальностей в физические теории и т. п. Приводятся также выступления участников прений. А. В. Гладкий

5472. Логические основания квантовой теории. Применение трехзначной логики. Рейхенбах (Les fondements logiques de la théorie des quanta. Utilisation d'une logique à trois valeurs. Reichenbach Hans), Collect. logique math., 1952, Paris, 1954, A5, 103—114 (франц.)

Доклад посвящен применению к квантовой физике трехзначной логики, в которой высказывания могут принимать значения «истинно», «ложно», «неопределенно». Впервые применила многозначную логику к квантовой теории Детуш-Феврие (1937); впоследствии автор дал другую интерпретацию (Reichenbach H., Philosophic foundations of quantum mechanics, University of California Press, Berkley, 1944). В докладе обсуждается только вторая интерпретация, в которой высказываниям о ненаблюдавшихся объектах приписывается значение «неопределенно». Автор приводит различные доводы в пользу этой интерпретации, противопоставляя ее точке зрения Бора и Гейзенберга, согласно которой высказывания о ненаблюдавшихся объектах не имеют смысла.

Значительная часть прений посвящена вопросу о различии между предложениями, излагающими факты, и предложениями, излагающими законы. Автор сводит это различие к различию между единичными и общими высказываниями. Возражая ему, Феврие видит главное различие в том, что первые предложения получаются путем эксперимента, а вторые дедуктивным путем. А. В. Гладкий

5473. Аксиоматизация арифметики. Ван Хао (The axiomatization of arithmetic. Wang Hao), J. Symbolic Logic, 1957, 22, № 2, 145—158 (англ.)

Статья посвящена истории аксиоматизации арифметики — вопросу, который исследован еще недостаточно. В качестве первой серьезной попытки построить арифметику на аксиоматической базе рассматривается труд Р. Грассмана Lehrbuch der Arithmetic (1861). Хотя система Грассмана (оперировавшего с множеством всех целых чисел) не представлена в явной аксиоматической форме, она фактически содержит некоторую аксиоматику, выявленную автором статьи в виде исчисления L_2, и характеризующую целые числа как упорядоченную область целостности, в которой каждое множество положительных чисел обладает наименьшим элементом, что явствует из сравнения L_2 с аксиоматической характеристикой целых чисел, принятой в современной алгебре; эта последняя характеристика оформляется в статье (со ссылкой на книгу Биркгофа и Мак-Лейна (Birkhoff G., Maclane S., A survey of modern algebra, 1941, гл. 1) как исчисление L_1, и утверждается (без доказательств, но со ссылками на соответствующие параграфы труда Грассмана), что все аксиомы исчисления L_1 выводимы из аксиом и определений исчисления L_2. Недостатком системы Грассмана является то, что его аксиомы удовлетворяются и в случае, если все целые числа рассматриваются как совпадающие друг с другом.

Далее рассматривается история аксиом Пеано. Известно, что Пеано заимствовал свои аксиомы у Дедекинда. В статье рассматривается вопрос о том, как Дедекинд пришел к этим аксиомам и какова та форма, в которой они у него выражены. Публикуется малоизвестное письмо Дедекинда д-ру Кеферштейну от 27 февраля 1890 г., которое может служить руководством при изучении очерка Дедекинда „Was sind und was sollen die Zahlen» (1888), так как Дедекинд разъясняет в нем ход мыслей, который привел его к тому определению целых положительных чисел (основанному на введенном им понятии цепи), которое дано в этой работе. Чтобы разъяснить письмо, автор разбирает содержание упомянутого очерка, показывая, в частности, что аксиоматика Пеано не только содержится уже в Дедекиндовом определении целых положительных чисел (см. указанное письмо Дедекинда и § 6 его очерка), но что она явно сформулирована Дедекиндом (в терминах его теории) в § 10. Основной вывод, к которому приходит автор, состоит в том, что в письме обнаруживается представление о нестандартных моделях (интерпретациях) системы аксиом для целых положительных чисел; оно не получает, однако, четкого выражения, так как, понятие интерпретации не сделано у Дедекинда достаточно явным. Останавливаясь в этой связи на нестандартных моделях аксиом Пеано, автор приводит пример нестандартной модели этих аксиом для языка, в котором каждое свойство, в нем выразимое, имеет силу или для чисел некоторого конечного (возможно, пустого) множества, или для всех чисел, исключая некоторое конечное множество.

В письме Дедекинда упоминаются работы Фреге, 1879 и 1884 гг., с которыми, как явствует из письма, Дедекинд познакомился в 1889 г., ответив, что развитый Фреге метод определения натуральных чисел по существу соответствует предложенному им определению целых положительных чисел (в отличие от Дедекинда Фреге начинал не с 1, а с 0). В статье освещаются некоторые черты подхода Фреге к понятию числа. Сопоставляя Дедекинда и Фреге, автор отмечает, что оба они считали арифметику частью логики, но расходились в понимании последней. Фреге дал точную формулировку логики дедукции, содержавшую как исчисление высказываний, так и исчисление предикатов, Дедекинд же (как и Грассман) логику в явном виде не формулировал. В заключение автор сопоставляет различные точки зрения на отношение между математикой и логикой,

не выявляя, однако, своих взглядов по этому вопросу. Б. В. Бирюков

5474. Логика конечного и конкретного. Андреоли (La logica del finito e del concreto. Andreoli Giulio), Giorn. mat. Battaglini, 1956, **84**, № 1, 19—48 (итал.)

Автор посвящает работу вопросам логики научного мышления. В первых двух главах рассматриваются логические системы с конечным числом индивидуумов и некоторые их обобщения.

В последней, третьей главе, на основе определений гл. I, II дается классификация различных методов мышления, соответствующих различным видам человеческого познания, а также классификация научных теорий.

В качестве приложения воспроизводится текст более ранней работы автора, посвященной тому же кругу вопросов (Boll. Accad. Gioenia Sci. Natur. Cantania, 1932, 62, ser. 2^a). Ф. А. Кабаков

5475. Доказательство леммы Крейга при помощи семантических таблиц. Бет (A proof of Craig's lemma by means of semantic tableaux. Beth E. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 5 (англ.)

5476. Аксиомы и постулаты в основаниях геометрии. Гуггенхеймер (Axioms and postulates in the foundations of geometry. Guggenheimer H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh 1958, 107 (англ.)

5477. Функциональные построения в многозначных логиках. Яблонский С. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2, М., АН СССР, 1956, 71—73

5478 К. Проблемы разрешимости. Гжегорчик (Zagadnienia rozstrzygalności. Grzegorczyk Andrzej. Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1957, 140 s., 16 zł.) (польск.)

Книга является введением в проблематику вычислимых функций и разрешимости. Она предназначена не только для начинающих, но и для математиков, желающих получить обзор этой современной отрасли математики.

Книга состоит из следующих глав: 1. Эффективные методы; 2. Содержательный смысл понятия вычислимости; 3. Точный смысл понятия вычислимости; 4. Эффективность логических методов; 5. Метаматематическая трактовка вычислимости; 6. Неразрешимость арифметики; 7. Теория алгоритмов; 8. Советы для дальнейшего изучения литературы.

Две первые главы являются только содержательным разъяснением подлежащих изучению понятий, в гл. 3 мы находим точное определение вычислимых функций с помощью операций суперпозиции и эффективного минимума. Арифметизация формализованной теории и определение разрешимости такой теории излагаются в гл. 4, а в гл. 5 строятся формализованная арифметика и метаматематическая теория вычислимых функций. Гл. 6 содержит основные теоремы о существенной неразрешимости и неполноте арифметики. Две последние главы содержат очерк некоторых специальных вопросов, относящихся к теории вычислимых функций и конструктивности. Гл. 7 посвящена теории алгоритмов, а в гл. 8 рассматриваются определимые множества, доказательства неразрешимости математических теорий, вычислимый анализ, конструктивные порядковые числа и интуиционистская логика.

Прилагается перечень 60 статей, цитируемых в книге. J. Łoś

5479 К. Прикладная математическая логика. Фрёйденталь (Logique mathématique appliquée. Freudenthal H. Paris, Gauthier-Villars; Louvain, E. Nauwelaerts, 1958, 58 p., ill., 1200 fr.) (франц.)

Автор ставит своей целью дать обзор применений математической логики вне математики. Единственной областью, в которой такое применение оказалось плодотворным, является, по мнению автора, теория электрических схем и цифровых вычислительных машин. Излагаются принципы использования двузначной логики высказываний для описания схем некоторых переключательных и арифметических устройств. Автор замечает, что применявшиеся ранее методы математической логики—статические, тогда как вычислительным машинам присущ динамический, временной характер функционирования. В связи с этим он намечает формализацию логических связей, учитывающую порядок событий во времени (которое предполагается дискретным). Например, отношение «из p в какой-то момент времени следует q в последующий момент времени» записывается посредством формулы $p \overset{*}{\rightarrow} q$. Аналогичный смысл имеют формулы $p \overset{*}{\vee} q$, $p \overset{*}{=} q$ и т. д. (Автору, по-видимому, не была известна вышедшая в 1943 г. работа Мак-Каллока и Питтса (см. сб. Автоматы, М., Изд-во ин. лит., 1956, стр. 362), содержащая более развернутое построение аналогичного аппарата). Далее следует критический обзор влияния, оказанного на философию и лингвистику развитием современной математической логики. Две последние главы посвящены более специальным вопросам: одному синтаксическому явлению, названному автором интенсиональным и модальным переносом, и проблеме интерпретации импликации. Вводится новое понятие—так называемой полной импликации $p \rightarrow q$, которая отличается от обычной импликации тем, что является не высказыванием, а двучленным отношением между p и q, учитывающим природу этих высказываний. Полная импликация $p \rightarrow q$ имеет место в том и только в том случае, если любая пара значений истинности p и q—кроме той, в которой p истинно, а q ложно—является априори возможной. Например, между высказываниями «Идет дождь» (p) и «На улице сыро» (q) полная импликация $p \rightarrow q$ имеет место, а между высказываниями «Дважды два—четыре» и «Число π трасцендентно» полная импликация не имеет места. Так называемый «парадокс термометра» («Вода имеет температуру 20°» означает, что «Если в воду опустить термометр, то ртуть остановится на делении с отметкой 20». Таким образом, вода имеет температуру 20° всякий раз, когда в нее не опускается термометр) находит объяснение с помощью полной импликации. Автор отмечает, что идея полной импликации возникла у него при рассмотрении электрических схем.

Ю. Т. Медведев

5480 К. Элементы математической логики. Изд. 2-е. Лукасевич (Elementy logiki matematycznej. Wyd. 2. Łukasiewicz Jan. Warszawa, PWN, 1958, 99 s., il., 20 zł.), Przew. bibliogr., 1958, **14**, № 26, 341 (польск.)

См. также: 5381, 5382, 5627, 5629, 5719.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

5481. О некоторых аддитивных проблемах линейных точечных множеств. Шелль (Über einige Probleme der Addition von linearen Punktmengen. Schell Hugo), J. reine und angew. Math., 1958, 200, № 1-2, 52—88 (нем.)

Две главные проблемы аддитивной теории целых

чисел: (*A*) Оценки конечной (асимптотической) плотности суммарного множества по заданным конечным (асимптотическим) плотностям слагаемых. (*B*) Оценки для существенных компонент.

Исследуется вопрос о возможности перенесения результатов решения проблем (*A*) и (*B*) на континуальные линейные точечные множества. При этом перечисляющая функция заменяется лебеговой мерой. Основные понятия плотности, суммы множеств, базиса и т. д. берутся в форме, разработанной Д. А. Райковым (Матем. сб., 1939, 5, 47, 425—440). Показывается, что теоремы Манна и Ф. Дайсона о плотности суммы множеств и обобщение этих теорем с помощью весовых функций, принадлежащее Корпуту, во всей общности переносятся на линейные точечные множества.

Теоремы Манна и Ф. Дайсона обобщаются в континуальном случае и на асимптотические плотности, что невозможно в случае натуральных чисел (РЖМат, 1957, 1137).

Оценки Каша (РЖМат, 1956, 8541) для существенных компонент в конечном и асимптотическом случаях также обобщаются с небольшим ограничением на линейные точечные множества.

Аналоги оценок Каша применяются при рассмотрении разностей континуальных множеств.

Б. М. Бредихин

5482. О новых разбиениях чисел. Датта (On new partitions of numbers. Dutta Mahadev), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 4, 221—224 (англ.)

Пусть ${}_dp(n)$—число разбиений n на слагаемые, среди которых имеется не более d повторяющихся, $p'(n)$—число разбиений n на слагаемые, не делящиеся на $d+1$. В работе доказывается, что ${}_dp(n) = p'(n)$ для всех целых положительных n и $d \geqslant 1$ (обобщение теоремы Харди с $d=1$).

Методом производящих функций найдено рекуррентное соотношение для ${}_dp(n)$ и выражение ${}_dp(n)$ через число разбиений $n-p(n)$. Найдены сравнения:

${}_6p(7m+5) \equiv 0 \pmod 7$, ${}_{24}p(5m+4) \equiv 0 \pmod 5$, ${}_{48}p(7m+5) \equiv 0 \pmod 7$, ${}_{120}p(11m+6) \equiv 0 \pmod{11}$. Для функции ${}_dp(n/m)$, означающей число разбиений целого n на m слагаемых, среди которых имеется не более d повторяющихся, найдена производящая функция и рекуррентное соотношение.

Б. В. Левин

5483. Некоторые преобразования уравнений в теории разбиений. Исэки (Some transformation equations in the theory of partitions. Iseki Sho), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 3, 131—135 (англ.)

Рассматривается функция Рамануджана $p(n; a, M)$, означающая число разбиений целого $n>0$ на сумму положительных слагаемых вида $Ml \pm a$ $(l = 0,1,2, \ldots)$, где a и M—целые, $M \geqslant 2$, $0<a<M$, $(a,M)=1$. Для $p(n;a,M)$ строится производящая функция

$$F(x,a,M) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n; a, M)\, x^n, \quad |x| < 1$$

и рассматривается функциональное уравнение для нее при некоторых частных предположениях, а также различные ее выражения в некоторых частных случаях. Работа является продолжением работ Хуа Ло-кэна, Нивена, Ленера, Ливингуда.

В. М. Архангельская

5484. Слабые асимптотические свойства разбиений. Колбеккер (Weak asymptotic properties of partitions. Kohlbecker Eugene E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, № 2, 346—365 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть

$$f(s) = \exp\left\{ s \int_0^{\infty} \frac{e^{-su}}{1-e^{-su}}\, n(u)\, du \right\} = s \int_0^{\infty} P(u) e^{-su}\, du,$$

причем $n(u)$ и $P(u)$—неубывающие функции с существующими (в смысле Лебега) для любого $R>0$ интегралами

$$\int_0^R \frac{n(u)}{u}\, du, \quad \int_0^{\infty} \frac{n(u) \log u}{u}\, du \quad \text{и} \quad \int_0^R P(u)\, du.$$

Тогда утверждения $n(u) \sim u^{\alpha} L(u)$ и $\log P(u) \sim u^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} L^*(u)$ при $u \to \infty$ эквивалентны. Здесь α—положительная постоянная, $L(u)$ и $L^*(u)$—специальным образом связанные между собой медленно растущие функции. Во многих случаях, например, когда $L(u)$ является произведением степеней итерированных логарифмов, связь между $L(u)$ и $L^*(u)$ легко устанавливается эффективно.

Доказательство основано на полученных автором теоремах типа Абеля и типа Таубера, связывающих поведение $f(s)$ при $s \to 0$ и $P(u)$ и $n(u)$ при $u \to \infty$.

Следствия этой теоремы обобщают результаты Эрдёша, Кноппа и Бригема об асимптотических свойствах „взвешенной" функции разбиений. Много опечаток.

М. Б. Барбан

5485. Одна проблема разбиения и ее функционально-теоретическое решение. Егер (Ein Partitionsproblem und seine funktionentheoretische Lösung. Jeger M.), Elem. Math., 1958, **13**, № 5, 97—104 (нем.)

Ставится задача о числе решений $A(N)$ неопределенного уравнения $\mu_1 + 2\mu_2 + 5\mu_3 + 10\mu_4 + 20\mu_5 + 50\mu_6 = N$ в целых неотрицательных μ_i $(i = 1, \ldots, 5)$. Рассматривая производящий ряд и применяя теорему Коши о вычетах, автор получает формулу

$$A(N) = \sum_{k=0}^{[n/10]} B_k B_{n-10k},$$

где $B_n = [2n^2 + 16n + 27 + 5\,(-1)^n + 8\Omega(n)]/40$; $\Omega(n)=0$, если $n \equiv 1 \pmod 5$ и 1 во всех остальных случаях.

Б. В. Левин

5486. Сложение простого числа с простой степенью заданного простого. Лаврик А. Ф., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1085—1087

Рассматриваются аддитивные задачи бинарного типа с простыми числами. Пусть P — множество всех простых чисел; L —одно из следующих двух множеств: (1) $L = \{p_2^{p_3}\}$, где p_2—фиксированное простое и p_3 пробегает последовательные простые, (2) $L = \{a^m\}$, где фиксированное целое $a \geqslant 2$ и $m = 1^k, 2^k, \ldots$, с фиксированным $k \geqslant 2$. Показывается, что „почти" все числа последовательности $\{p + l\}$, где $p \in P$ и $l \in L$, являются различными. Выводятся асимптотические формулы для числа различных чисел $n \in \{p + l\}$ и не превосходящих заданной границы. Доказательства основаны на методе решета Вигго Бруна и некоторых тождествах, принадлежащих Н. П. Романову.

Б. М. Бредихин

5487. Комбинирование элементарного и аналитического методов в теории чисел. Климов Н. И., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 145—164

Аналитическим методом вычисляется асимптотика суммы, входящей в данную Сельбергом оценку сверху числа чисел последовательности $a_n, 1 \leqslant n \leqslant N$, не делящихся на простые, не превосходящие z. Рассмотрены многочисленные теоретико-числовые следствия, большинство из которых является некоторым уточнением и обобщением результатов И. В. Чулановского (РЖМат, 1954, 3229 Д). Новой является оценка $\pi_k^{(2)}(K; \cdot N, z)$

числа чисел $P=M^2+K$, содержащих только простые множители, большие z, причем $h<M\leqslant h+N$, $(-K)$ не равно точному квадрату $K=O(\ln^B z)$, $z\leqslant\sqrt{N}/\ln^a N$,

$$\pi_h^{(2)}(K;N,z)\leqslant\frac{2}{2-\varkappa(2)}\prod_{p>2}\frac{p(p-1-\varkappa(p))}{(p-1)(p-\varkappa(p))}\times$$

$$\times\frac{1}{L(1,\varkappa)}\frac{N}{\ln z}\left(1+O\left(\frac{K^{1/B}}{\ln z}\right)\right).$$

Результат получен с привлечением оценки

$$L(s,\varkappa)=O(\ln^2(D+C)(|t|+1)^{1-d})$$

при $\sigma\geqslant d$, $d=1-1/\ln(D+C)$, где $\varkappa(n,D)$ — неглавный характер. М. Б. Барбан

5488. Одна асимптотическая формула теории чисел. Хули (An asymptotic formula in the theory of numbers. Hooley C.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 27, 396—413. (англ.)

С помощью оценок Вейля (Weil A., Proc. Nat. Acad. Sci. U S A, 1948, **34**, 204—207) и особых приемов, разработанных автором, доказываются теоремы о $d_3(n)$ и $d_2(n)=d(n)$ ($d_k(n)$ — число решений уравнений $n=x_1x_2\ldots x_k$ в натуральных числах x_i $(i=1,2,\ldots,k)$).

Теорема 1.

$$\sum_{n<x}d_3(n)\,d(n+a)=\frac{1}{2}A(a)x\ln^3x+O(x(\ln x\ln\ln x)^2),$$

$$\sum_{n<x}d(n)\,d_3(n+a)=\frac{1}{2}A(a)x\ln^3x+O(x(\ln x\ln\ln x)^2),$$

$A(a)$ — довольно сложная функция целой постоянной a, выражение которой дается.

Теорема 2. При $m\to\infty$

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}d_3(m-\nu)\,d(\nu)=\frac{1}{2}A(m)m\ln^3m+$$

$$+O\left(m\left(\ln m\ln\ln m\sum_{l\mid m}\frac{d(l)\ln l}{l}-\right)^2\right),$$

где $A(m)$ определена выше; она $>B>0$ и

$$\sum_{l\mid m}\frac{d(l)\ln l}{l}=O((\ln\ln m)^3).$$

Примечание референта. Более общие и точные результаты (для $d_k(n)$ при любом $k\geqslant 2$) получены иным способом референтом (реф. 5489). Ю. В. Линник

5489. Дисперсия делителей и квадратичных форм в прогрессиях и некоторые бинарные аддитивные задачи. Линник Ю. В., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 5, 960—962

Пусть $\tau_k(n)$ — число решений в натуральных числах уравнения $x_1x_2\ldots x_k=n$; в частности, $\tau_2(n)=\tau(n)$ числу делителей n. Пусть далее $Q(u,v)$—целочисленная положительная примитивная бинарная форма с дискриминантом $d<0$. Полагаем: $T(n,D,l)=\sum\tau(m)$, где m пробегает значения $m\equiv l\pmod D$, $(l,D)=1$. $l<D, m\leqslant n$, $S(n,Q)$ равно числу пар (u,v) таких, что $Q(u,v)\equiv n\pmod D$ и $Q(u,v)\leqslant n$;

$$\delta(n,D,l)=T(n,D,l)-n\ln n\frac{\varphi(D)}{D^2}\rho(n,D),$$

$$\Delta(n,Q)=S(n,Q)-2\pi nD^{-1}|d|^{-1/2}\sigma(n,D),$$

где $\rho(n,D)$ и $\sigma(n,D)$ — специальные арифметические функции, связанные с каноническим представлением числа D.

Методы А. Вейля позволяют получить оценки

$$\delta(n,D,l,)=O(n^{1-\alpha_1}),\qquad\Delta(n,Q)=O(n^{1-\alpha_1}),\qquad(1)$$

где $\alpha_1>0$, $D<n^{2/3-\varepsilon}$.

Для $D>\sqrt{n}$ автор доказывает следующую „дисперсионную" теорему: Пусть $\sqrt{n}\leqslant D_1<n^{1-\eta_1}$, $D_2=D_1^{1-\eta_2}$.

Тогда

$$\sum_{(E)}\delta^2(n,D,l)=O(n^{2-\eta_3}D_2D_1^{-2}),$$

$$\sum_{(E')}\Delta^2(n,Q)=O(n^{2-\eta_3}D_2D_1^{-2}),\qquad(2)$$

где E — совокупность всех пар с условием: $l<D$, $(l,D)=1$, $D\in E^1$, $E'=[D_1,D_1+D_2]$. Оценка (2) указывает на то, что (1) имеет место для почти всех D, за исключением, может быть, множества значений D, содержащего $O(D_1^{1-\eta_4})$ элементов. (1) и (2) влекут за собой следствия:

1)

$$\sum_{m<n}\tau(m)\,\tau_k(m+1)=nP_k(\ln n)+O(n^{1-\xi_0}),$$

где $P_k(x)$ — многочлен, зависящий только от k, $\xi_0>0$.

2) K — поле алгебраических чисел, дискриминант которого равен Δ, g — натуральное и $(d,g\Delta)=1$. Тогда для $n>n_0$ разрешимо уравнение

$$n=Q(u,v)+gN(\mathfrak{a}),$$

$\mathfrak{a}$ — целый идеал поля K. Число решений подчинено асимптотическому закону.

3) D натуральное; для $n>n_0$ разрешимо уравнение

$$n=\Pi_1+\Pi_2,$$

Π_1=произведению простых $\equiv 1\pmod 4$, Π_2=произведению простых $\equiv 1\pmod D$. Для числа решений существует асимптотический закон. Н. Г. Чудаков

Примечание редакции. Как сообщил автор статьи, в силу допущенной им неточности, асимптотическая теорема работы получается с остаточными членами, достаточно малыми, но дающими понижение слабее степенного.

5490. Заметка о неправильности в распределении. Давенпорт (Note on irregularities of distribution. Davenport H.), Mathematika, 1956, **3**, № 6, 131—135 (англ.)

Пусть $(x_1,y_1),\ldots,(x_N,y_N)$ — точки (не обязательно различные) в квадрате $0\leqslant x<1$, $0\leqslant y<1$. Обозначим через $S(\xi,\eta)$ число точек (x_i,y_i) в прямоугольнике $0\leqslant x>\xi$. $0\leqslant y<\eta$.

Ротом было доказано (РЖМат, 1956, 1943), что

$$\int_0^1\int_0^1(S(\xi,\eta)-N\xi\eta)^2\,d\xi d\eta>c\log N,\qquad(1)$$

где c—положительная абсолютная константа. Им также

было замечено, что неравенство (1) распространяется на случай N точек в едином кубе k-мерного пространства с $(\log N)^{k-1}$ в правой части (1). Автор показывает, что результат Рота не может быть улучшен, так как неравенство (1) перестает быть справедливым при больших N, если c достаточно велика. Доказывается, что при любом иррациональном θ, разлагающемся в непрерывную дробь с ограниченными неполными частными, и любом множестве точек с координатами $x_\nu = \{\pm \nu\theta\}$, $y_\nu = \nu/M$ $(\nu = 1, \ldots, M)$, имеем

$$\int_0^1\int_0^1 (S(\xi,\eta) - 2M\xi\eta)^2\, d\xi d\eta < c_1(\theta)\log 2M, \qquad (2)$$

где M—любое натуральное число, $\{\alpha\}$ — дробная часть от α и $c_1(\theta)$ зависит только от θ. Доказательство основывается на том, что $\nu \| \nu\theta \| > c_2(\theta) > 0$ тогда и только тогда, когда неполные частные θ ограничены. Здесь $\| \alpha \|$ обозначает расстояние α до ближайшего целого числа. Результат (2) распространяется на случай трехмерного единичного куба, если существуют иррациональные числа θ и ψ, удовлетворяющие неравенству $\nu \| \nu\theta \| \, \| \nu\psi \| > c_3 > 0$ для всех натуральных ν.

Р. В. Уждавинис

5491. О суммах степеней комплексных чисел. Туран (Über die Potenzsummen komplexer Zahlen. Turán P.), Arch. Math., 1958, **9**, № 1—2, 59—64 (нем.)

Пусть C—поле комплексных чисел, $C^{(n-1)} = C \times C \times \ldots \times C$, $(z_1 \ldots z_{n-1}) \in C^{(n-1)}$, $s_\nu = z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_{n-1}^\nu + 1$,

$$f(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} |s_\nu|^2, \quad F(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1} |s_\nu|^2,$$

$M(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \max |s_\nu|$ для $\nu = 1, \ldots, n$, M_n, μ_n, m_n— соответственно минимумы функций $M(z_1, \ldots, z_{n-1})$, $f(z_1, \ldots, z_{n-1})$ и $F(z_1, \ldots, z_{n-1})$ во всем пространстве $C^{(n-1)}$.

Предполагается, что

$$M_n > c > 0, \qquad (1)$$

где c не зависит от n. Известно, что для $n \geqslant n_0(\varepsilon)$

$$M_n > (1-\varepsilon)\frac{\ln\ln n}{\ln n}.$$

Далее справедливы неравенства

$$M_n \geqslant (\mu_n n^{-1})^{1/4}, \quad M_n \geqslant m_n^{1/4} \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-1}\right)^{-1/4}.$$

Показывается, что $m_n \leqslant e_4$. Это указывает на недостаточность последнего неравенства для доказательства гипотезы (1). Пусть, далее, точка $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ такова, что $\zeta_1 \ldots \zeta_{n-1} \neq 0$, $F(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) = m_n$ (примитивная экстремальная система),

$$\psi(z) = (1-z)\prod_{\nu=1}^{n-1}(1-\overline{\zeta}_\nu z).$$

Автор показывает, что

$$\lambda\psi'(z) - \lambda z^{2n-1}\overline{\psi}'(z^{-1}) = z^n(1-z)^{-1}\psi(z)\,\overline{\psi}(z^{-1}),$$

где $\lambda = \lambda(n)$, т. е. функция n.

Н. Г. Чудаков

5492. Об арифметических функциях. Амицур (On arithmetic functions. Amitsur S. A.), J. analyse math., Итонлеаналиса математит, 1956—1957, **5**, part. 2, 273—314 (англ.)

Пусть $\mathfrak{M}$ — линейное пространство функций, определенных для $x \geqslant 1$, ограниченных в любом конечном интервале и принимающих комплексные или действительные значения. Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство арифметических функций, определенных для всех целых n.

Автор продолжает начатое Н. Шапиро и К. Ямамото исследование преобразований $S_g \in \mathfrak{M}$, определенных для любого $g \in \mathfrak{A}$ соотношением

$$(S_g f)(x) = \sum_{n \leqslant x} g(n) f\left(\frac{x}{n}\right).$$

Посредством сужения пространства $\mathfrak{M}$ до его подпространства $\mathfrak{L}$, состоящего из полиномов от $\log x$, и выделения остаточного члена вводится символическое исчисление. Арифметические функции аппроксимируются степенными рядами символа $D = \dfrac{d}{d\log x}$, нахождение коэффициентов которых дает многие известные и некоторые новые формулы относительно поведения арифметических функций. В частности, элементарно получены формулы

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1), \qquad (1)$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \log\frac{x}{n} = 1 + o(1), \qquad (2)$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x - C + o(1), \qquad (3)$$

где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса,

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{при } n = p^m, \\ 0 & \text{при } n \neq p^m \end{cases}$$

для любого целого $m > 0$, а C — константа Эйлера.

В статье имеется обобщение формулы (3) для простых чисел арифметических прогрессий, что дает новое элементарное доказательство теоремы простых чисел для таких прогрессий. Автор также дает общий метод для нахождения обобщений формул (1) — (3).

Э. И. Вилкас

5493. Об аналитических функциях, обладающих некоторыми арифметическими свойствами. Бертрандиа (Sur les fonctions analytiques possédant une certaine propriété arithmétique. Bertrandias Françoise), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 1, 22—24 (франц.)

Рассматривается аналитическая функция $f(x)$, $|x| = r$, такая, что $|f(x)| < e^{\gamma r}$, γ — постоянная > 0; при этом ее n-я производная $f^{(n)}(n)$ равна целому числу для $n = 0, 1, 2, \ldots$ Утверждается, что при некоторых дополнительных условиях $f(x)$ имеет представление

$$f(x) = \sum_{q=1}^{k} Q_q(x)\, e^{x m_q},$$

где $Q_q(x)$ — многочлены. Указываются условия, при которых $f(x)$ сводится к многочлену. Утверждается что доказательство основано на применении трансформаций Лапласа — Бореля. Доказательство не приведено.

В. М. Архангельская.

5494. Интерполяционный ряд непрерывных функций p-адической переменной. Малер (An interpolation series for continuous functions of a p-adic variable. Mahler K.), J. reine und angew. Math., 1958, **199**, № 1—2, 23—34 (англ.)

Так как неотрицательные целые числа образуют всюду плотное множество на множестве всех p-адических чисел, то непрерывная функция однозначно определяется ее значениями в целых точках и, следовательно, однозначно определяется заданием чисел

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Доказывается, что последовательность a_n является нулевой последовательностью и что интерполяционный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!}$$

сходится к соответствующей непрерывной функции. Таким образом всякая непрерывная функция разлагается в ряд полиномов, что является известным аналогом теоремы Вейерштрасса для поля p-адических чисел. Рассматриваются также вопросы дифференцируемости непрерывной функции p-адического переменного.

Н. П. Романов

5495. Теоремы о среднем значении для обобщенной функции Эпштейна $Z_{n,k}(s)$. Минь Сы-хао, И Вэнь-линь . On the mean-value theorems of $Z_{n,k}(s)$. (Min Szu-hoa, Yin Wen-lin), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, 1958, **4**, № 1, 41—50 (кит.; рез. англ.)

Пусть n четно, $\nu = n^{-1}$, $0 < a < k\nu$.

$$I(T) = \int_0^T |Z_{n,k}(a+it)|^2 dt = O(T^{\rho}),$$

$Z_{n,k}(s)$—обобщенная функция Эпштейна, $\rho = \max[2(n-1)\times \times (k\nu - \nu - a) - 2a + 2,\ n(k\nu - a) + 1 + \varepsilon]$.

Если $n > 2$, $a < k\nu - 2k\nu^2 - \nu + 2\nu^2$, то

$$I(T) \sim C(n, k, a)\, T^{2(n-1)(k\nu-\nu-a)-2a+2}.$$

Далее, пусть $\mu(\sigma)$ — функция Линделёфа для $Z_{n,k}(s)$, $\nu(\sigma) = \overline{\lim}\, \ln T^{-1} I(T)/\ln T$ при $T \to \infty$. Авторы предлагают гипотезу $\mu(\sigma) = \nu(\sigma)/2 = \max\{0, k\nu - \sigma - 1/2, (n-1)(k\nu - \nu - \sigma) - \sigma + 1/2\}$.

Н. Г. Чудаков

5496. О делимости ζ-функций Дедекинда. Исида . (On the divisibility of Dedekind's zeta-functions. Ishida Makoto), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 6, 293—297 (англ.)

Е. Артин высказал в 1923 г. гипотезу: $\zeta_k(s)/\zeta_k(s)$ — целая функция переменной s, где k — поле алгебраических чисел конечной степени, K — конечное расширение k („$\zeta_k(s)$ делит $\zeta_k(s)$“).

В статье дается обобщение работы Брауэра (Brauer R., Amer. J. Math., 1947, 121, 243—250), в которой был рассмотрен частный случай гипотезы Артина. Главный результат автора таков: пусть K^* — наименьшее нормальное расширение поля K; G и H — соответственно группы Галуа для K^*/k и K^*/K. Пусть H удовлетворяет условию (I): если $\sigma \in G \setminus H$, то $H \cap \sigma H \sigma^{-1} = \{e\}$, т. е. единичная подгруппа. Тогда $\zeta_k(s)$ делит $\zeta_k(s)$.

Далее, пусть M—группа, образованная единичным элементом e вместе со всеми элементами G, которые не принадлежат $U_\sigma \sigma H \sigma^{-1}$, σ пробегает все элементы G; K_0 — поле, соответствующее M. Тогда

$$(\zeta_K(s)/\zeta_k(s))^{(K_0:k)} = \zeta_{K^*(s)}/\zeta_{K_0(s)} \qquad (1)$$

Пусть, далее $K = k(\alpha)$, $K^* = k(\alpha, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)})$, где $\alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$ сопряжены α над k.

Автор показывает, что (1) справедливо, если соблюдается одно из условий.

Условие (II): если $i \geqslant 2$, то $K^* = k(\alpha, \alpha^{(i)})$.

Условие (III): если $\sigma \in G$ таково, что оно оставляет инвариантными два числа $\alpha^{(i)}$ и $\alpha^{(j)}$ $(i \neq j)$, то $\sigma = e$.

В заключение автор утверждает, что его результаты влекут за собой две теоремы Цассенхауза (Zassenhaus H., Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1936, **11**, 187—220) и теорему И. Р. Шафаревича (РЖМат, 1958, 9594).

Н. Г. Чудаков

5497. Об одном приложении нового метода к теории дзета—функции Римана. Туран (Über eine Anwendung einer neuen Methode auf die Theorie der Riemann'schen Zetafunction. Turan P.), Humboldt Univ. Berlin, Math.-naturwiss. Reihe, 1955-1956, **5**, № 4, 281-285

Реферат написан во исправление предыдущего (см. РЖМат, 1958, 4459).

Резюме доклада, в котором автор знакомит с ранее полученными и новыми результатами относительно ξ-функции Римана, полученными методами, им предложенными.

Новые результаты — неравенство

$$N(\alpha, T) < cT^{\frac{5}{2}(1-\alpha)},$$

имеющее место на отрезке $1 - 1/2^{18} \leqslant \alpha \leqslant 1$, где $N(\alpha, T)$ обозначает число нулей $\xi(s)$ в прямоугольнике: $\alpha \leqslant \sigma < 1$, $0 < t \leqslant T$ $(s = \sigma + it)$ $(T \geqslant 2, c$ —положительная постоянная), и новая, утверждающая больше чем предыдущая дедуктивная теорема в связи с так называемой гипотезой о плотности, которую автор с тех пор уже усилил. (РЖМат, 1959, 3458)

K. Corràdi

5498. Упрощенное доказательство функционального уравнения для дзета-функции Римана и формулы Гурвица. Миколаш (A simple proof of the functional equation for the Riemann zetafunction and a formula of Hurwitz. Mikolás Miklós), Acta scient. math., 1957, **18**, № 3-4, 261—263 (англ.)

Новое упрощенное доказательство формулы Гурвица для обобщенной дзета-функции $\xi(s, u)$ и функционального уравнения для $\xi(s)$ с помощью вычислений коэффициентов Фурье для $\xi(s, u)$.

В. М. Архангельская

5499. Об λ-аналоге μ-гипотезы Мертенса. Винтнер (On the λ variant of Mertens μ-hypothesis. Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 3, 639—642 (англ.)

Пусть $\mu(n)$ и $\lambda(n)$ обозначают соответственно функции Мёбиуса и Лиувилля. Мертенсом было высказано предположение, что

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = O(\sqrt{x}). \qquad (1)$$

Это предположение, до сих пор не доказанное и не опровергнутое, содержит в себе гипотезу Римана о том, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат на вертикали 1/2, но не является ее следствием. Автор показывает, что если верна оценка (1), то

$$\sum_{n \leqslant x} \lambda(n) = O(\sqrt{x}),$$

и наоборот.

А. Ф. Лаврик

5500. Асимптотико-геометрические и эргодические свойства множества целых точек на сфере. Линник Ю. В., Матем. сб., 1957, **43**, № 2, 257—276

Дается более простое доказательство результатов заметки автора (РЖМат, 1955, 1611). Доказываются следующие более общие результаты.

Пусть m и k — натуральные числа, $m \equiv 1, \pm 2, \pm 3 \pmod 8$, q — простое нечетное число с условием $\left(\frac{-m}{q}\right) = 1$, Сф (m) — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = m$; $H(m)$ и $H_0(m)$ — число всех целых, соответственно всех целых примитивных точек на Сф (m); Ω — сферический треугольник, ограниченный сечениями Сф (m) плоскостей $z = 0$, $y - z = 0$, $x - z = 0$, причем первые две сто-

роны к нему причисляются, а последняя не причисляется; $\mathfrak{A}$ — множество примитивных точек Ω. Найдутся ровно две ортогональные матрицы T третьего порядка с определителем 1, имеющие вид $T = \| a_{ij} \| q^{-k}$, где a_{ij} — целые числа и хотя бы одно из чисел $a_{ij}q^{-k}$ является несократимой дробью, и такие, что целая примитивная точка $L = (x, y, z) \in \Omega$ перейдет в целую примитивную точку $TL \in \Omega$, отличную от L. Выбирая определенным образом одну из матриц, получаем операцию $\mathfrak{T}$. Обозначим через Ω_0, $\mathfrak{A}_0$ соответственно проекции Ω и $\mathfrak{A}$ на Сф(1). Пусть Λ_0 — область Ω_0, ограниченная кусочно-гладким контуром, $f_{\Lambda_0}(X)$ — характеристическая функция множества Λ_0. Имеет место эргодическая теорема:

$$s^{-1} \sum_{l=1}^{s} f_{\Lambda_0}(npT^l X) = 6\pi^{-1}\omega(\Lambda_0)\,(1 + \varkappa(q^k, \Lambda_0, m))$$

для всех примитивных точек $X \in \mathfrak{A}$, за возможным исключением $o(H(m))$; $s \geqslant c \ln m$, $c > 0$ — постоянное, $\varkappa(q^k, \Lambda_0, m) \to 0$ при заданных q^k, Λ_0 и $m \to \infty$. Здесь npX означает проекцию точки X на Сф(1), $\omega(\Lambda_0)$ — телесный угол, под которым видно множество Λ_0.

Пусть $\mathfrak{M}_0$ — какое-либо множество проекций точек из $\mathfrak{A}$ на Сф(1), причем число его точек $M(\mathfrak{M}_0) > \varepsilon H_0(m)$, $\varepsilon > 0$ — фиксированное число; $\mathfrak{T}^l\mathfrak{M}_0$ — множество, получаемое из $\mathfrak{M}_0$ после l-кратного преобразования $\mathfrak{T}$. Тогда для всех индексов $l = 0, 1, \ldots, s$; $s \geqslant c \ln m$ за возможным исключением $so(1)$ $(m \to \infty)$ таких индексов, число точек множества $\mathfrak{T}^l\mathfrak{M}_0$ равно

$$6\pi^{-1}\omega(\Lambda_0) M(\mathfrak{M}_0)(1 + \varkappa(q^k, \Lambda_0, \varepsilon, m)),$$

где $\varkappa(q^k, \Lambda_0, \varepsilon, m) \to 0$ при заданных q^k, Λ_0, ε и $m \to \infty$ (теорема о перемешивании). И. П. Кубилюс

5501. Диофантовы неравенства в комплексных квадратических полях. Морделл (Diophantine inequalities in complex quadratic fields. Mordell L. J.), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 242—255 (англ.)

Обобщается результат Минковского о решении диофантова неравенства вида

$$|(ax + by)(cx + dy)| \leqslant k, \quad |ad - bc| = 1,$$

$k > 0$ — постоянная) на случай квадратических полей с отрицательным дискриминантом. Эти обобщения были ранее получены другими авторами (Ford, Perron, Hofreiter, Poitou).

В статье даются новый метод доказательства основного результата и числовые результаты для простейших частных случаев дискриминантов поля.

В. М. Архангельская

5502. Решетчатые покрытия пространства выпуклыми телами. Роджерс (Lattice coverings of space with convex bodies. Rogers C. A.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 2, 208—212 (англ.)

Пусть S — ограниченное множество в n-мерном пространстве, а Λ — решетка точек этого пространства. Семейство множеств, получающихся из S параллельным переносом на все векторы решетки Λ, обозначим через (S, Λ). Если каждая точка пространства принадлежит хотя бы одному из множеств семейства (S, Λ), то (S, Λ) называется (решетчатым) покрытием. Пусть S измеримо и $V = V(S)$ — его мера. Рассмотрим куб со стороной N и пусть $k(N)$ — количество множеств семейства (S, Λ), имеющих непустые пересечения с этим кубом. Тогда $\lim_{N\to\infty} k(N) V/N^n = v(S, \Lambda)$, который существует, называется плотностью решетки множеств (S, Λ). Доказано, что для любого выпуклого тела S найдется такая решетка Λ_0, для которой (S, Λ_0) есть покрытие пространства $v(S, \Lambda_0) \leqslant 2^n$. Ранее были получены более слабые результаты (Rogers C. A., J. London Math. Soc., 1950, **25**, 327—331; Bambah R. P., Roth K. F., J. Indian Math. Soc., 1952, **16**, 7—12).

А. В. Малышев

5503. О покрытии плоскости выпуклыми ячейками. Главка (Zur Überdeckung der Ebene durch konvexe Scheiben. Hlawka Edmund), Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1957, **94**, № 1-15, 79—82 (нем.)

Пусть плоскость покрыта выпуклыми ячейками, имеющими центральные точки, таким образом, что эти точки образуют решетку с ячейками площади D. Если A — количество ячеек, имеющих общую точку с произвольно выбранной ячейкой S_0, то

$$DA \leqslant 8F \tag{1}$$

(здесь F — площадь ячейки). Граница в неравенстве (1) точная. Неравенство (1) можно заменить несколькими другими, а именно:

$$A \leqslant 8q - 2(C - 1), \tag{2}$$

где $q = F/D$ и $C = \left[\left(\sqrt{32q + 17} - 1\right)/4\right]$.

Неравенства (1) и (2) следуют из оценки

$$A \leqslant 4q + n, \tag{3}$$

где n — число прямых, проходящих через центральную точку S_0 и центральную точку ячейки, имеющей с S_0 общие точки.

Дается доказательство (1), (2) и (3) и ставится аналогичная проблема для пространства. Отмечается, что для пространства задача становится значительно труднее. Е. П. Ожигова

5504. О множестве «обобщенных чисел Маркова». Когония П. Г., Тбилисис университетис шромеби, Тр. Тбилисск. ун-та, 1955, **56**, 105—120 (рез. груз.)

Пусть α обозначает произвольное иррациональное число интервала $(0, 1)$, а $\alpha = [0, a_1, \ldots, a_k, \ldots]$ — его разложение в правильную непрерывную дробь.

Определение 1. Назовем степенью аппроксимации верхнюю грань $J(\alpha)$ множества всех чисел $m > 0$, для которых неравенство $|\alpha - p/q| < c/q^m$ при любом $c > 0$ имеет бесконечное число решений в целых числах $q > 0$, p.

Определение 2. Числа α и β назовем аппроксимативно эквивалентными в широком смысле, если $J(\alpha) = J(\beta)$.

Определение 3. Назовем аппроксимативной функцией нижнюю грань $L_J(\alpha)$ множества всех чисел $c > 0$, для которых неравенство $|\alpha - p/q| < c/q^J$ имеет бесконечное число решений в целых числах $q > 0$, p.

$L_J(\alpha)$ являются „обобщенными числами Маркова при $J > 2$."

Множество всех эквивалентных в широком смысле чисел назовем широким классом эквивалентных чисел и обозначим через K_J.

Определение 4. Числа α и β ($\alpha, \beta \in K_J$) назовем аппроксимативно эквивалентными, если $L_J(\alpha) = L_J(\beta)$.

При использовании этих определений доказывается ряд теорем, в том числе основная теорема: Существует по крайней мере несчетное множество обобщенных чисел Маркова, с предельной точкой О.

А. Г. Лурсманашвили

5505. Точки решетки в неограниченных точечных множествах. I. Одномерный случай. Леккеркеркер (Lattice points in unbounded point sets. I. The onedimensional case. Lekkerkerker C. G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 2, 197—205; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 197—205 (англ.)

Доказаны теоремы:

1. Пусть $f(x)$ — неотрицательная измеримая функция на полуинтервале $[0, \infty]$. Тогда, если $\int_0^\infty f(x)\,dx < \infty$, то $\sum_{n=1}^\infty f(n,x) < \infty$ для почти всех x.

2. Пусть $f(x)$ — неотрицательная функция, интегрируемая по Риману на любом конечном отрезке $[0, a]$, $0 < a < \infty$. Тогда, если $\int_0^\infty f(x)\,dx = \infty$, то найдется $x > 0$, для которого $\sum_{n=1}^\infty f(nx) = \infty$.

3. Существует измеримое по Жордану множество V неотрицательных вещественных чисел с бесконечной мерой, состоящее из интервалов, для которого для почти всех $x > 0$ имеется лишь конечное число целых k с условием $kx \in V$, причем имеется множество $\{x\}$ положительной меры с условием $kx \notin V$ для всех целых k.

4. Пусть $\rho < 1$ и d — фиксированные положительные вещественные числа, а множество V положительных вещественных чисел на каждой бесконечной последовательности попарно не пересекающихся интервалов длины d имеет плотность $\geqslant \rho$, то для почти всех $x > 0$ имеет место: $kx \in V$ для бесконечно многих целых положительных k.

Даны также некоторые уточнения этих результатов. Формулированные теоремы позволяют решить и обобщить следующие задачи, опубликованные в Amer. Math. Monthly: (A) Если $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на $[0, \infty)$ и $\int_0^\infty f(x)\,dx = \infty$, то найдется $x > 0$, для которого $\sum_{n=1}^\infty f(nx) = \infty$. (B) Найдется полунепрерывная сверху, неотрицательная, ограниченная функция $f(x)$ на $[0, \infty)$, для которой $\int_0^\infty f(x)dx = 0$ и $\sum_{n=1}^\infty f(nx) < \infty$ для всех $x > 0$. (C) Пусть V — открытое множество положительных вещественных чисел. Найдется вещественное число $x > 0$, для которого $kx \in V$ для бесконечного числа целых k.

А. В. Малышев

5506. Точки решетки в неограниченных точечных множествах. II. n-мерный случай. Леккеркеркер (Lattice points in unbounded point sets. II. The n-dimensional case. Lekkerkerker C. G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 2, 206—216; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 206—216 (англ.)

Теоремы 1—4 первой части этой статьи (реф. 5505) почти дословно переносятся на функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных, n-мерные решетки Λ и n-мерные множества V.

А. В. Малышев

5507. Геометрия чисел над алгебраическими числовыми полями. Роджерс, Суиннертон-Дайер (The geometry of numbers over algebraic number fields. Rogers K., Swinnerton-Dyer H. P. F.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, № 1, 227—242 (англ.)

Геометрия чисел Минковского для решеток над целыми рациональными числами систематически переносится на решетки над целыми алгебраическими числами. Пусть K – алгебраическое расширение степени m поля рациональных чисел. Рассматривается n-мерное пространство K^n над K и в нем определяется n-мерная решетка Λ (в отличие от предыдущих авторов, в частности (Weil H., Trans. Amer. Math. Soc., 1940, **48**, 126—164, 1942, **51**, 203—231, которые в этом случае определяли решетку в mn-мерном евклидовом пространстве R^{mn}). Получены аналоги теорем Минковского о выпуклом теле и о последовательных минимумах выпуклого тела. Определяется критическая решетка и критический определитель произвольного тела S и о них доказываются теоремы, аналогичные теоремам Малера для рационального случая (Mahler K. Proc. Roy. Soc. London, 1946, **A187**, 151—187). Рассмотрены частные случаи тела S. Для них получено ряд теорем, включающих предыдущие отдельные результаты.

А. В. Малышев

5508. Некоторые арифметические свойства алгебраических кривых. Шатле (Quelques propriétés arithmétiques des courbes algébriques. Châtelet F.), Sémin. Dubreil et Pisot. Fac. Sci. Paris, 1956—1957, 10. Paris, 1958, 16—1 — 16—8 (франц.)

Рассматриваются решения уравнения

$$y^2 = x^3 + Ax + B$$

в p-адических числах и решения сравнений

$$y^2 = x^3 + Ax + B \pmod{p^n}. \qquad (1)$$

Если p не делит $2(4A^3 + 27B)$, то решения сравнения по mod p образуют группу, если p делит $2(4A^3 + 27B)$, то не образуют. Рассматриваются также те решения сравнения (1), которые будут представлять простые точки кривой при модуле p и кратные точки при делителях данного модуля. Утверждается, что эти решения образуют группу. Приводятся некоторые соображения о возможности изучения решения уравнений высшего рода в p-адических числах или классах по mob p. Доказательства не приведены.

В. Д. Подсыпанин

5509. Об одном классе кубических диофантовых уравнений. Шварц, Мули (On a class of cubic diophantine equations. Schwartz H., Muhly H. T.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 379—382 (англ.)

Рассматривается решение в целых числах уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 - axyz = b, \qquad (1)$$

где $a > 0$, $b > 0$. Если (u, v, w) есть решение уравнения (1), то из него можно получить ряд новых решений при помощи следующих элементарных операций: 1) перестановка значений u, v, и w; 2) замена у двух из чисел u, v и w знаков на противоположные; 3) замена w на $auv - w$. Сумма $u + v + w$ называется нормой решения. Решение называется вырожденным, если значение двух или трех неизвестных равны нулю, и положительным, если значения всех неизвестных положительны. Решение называется основным, если имеют место неравенства $0 < u \leqslant v \leqslant w$ и если нельзя при помощи элементарных операций получить из него новое решение, также удовлетворяющее указанным неравенствам, но имеющее меньшую норму. Доказаны следующие свойства данного уравнения, позволяющие найти все его решения:

1) Если уравнение имеет невырожденное решение, то оно может быть получено из некоторого основного решения при помощи конечного числа элементарных операций.

2) Если (u, v, w) — основное решение, то $u^2 + v^2 \leqslant b$, за двумя исключениями $a = 1$, $b = 4$ и $a = 2$, $b = 1$. В случае $a = 1$, $b = 4$; $(2, v, v)$ будет решением при любом v. Для $v \geqslant 2$ все эти решения будут основными, для $v = 1$ это решение получается из основного решения $(1, 1, 2)$. В случае $a = 2$, $b = 1$; $(1, v, v)$ будет основным решением при любом v. Других основных решений в этих случаях нет. Таким образом, все уравнения вида (1) имеют конечное число основных решений, за двумя указанными исключениями.

3) Уравнение (1) или не имеет невырожденных решений, или имеет их бесконечно много, за исключением случая $a = 1$, $b = 2$. В этом случае уравнение имеет одно основное решение $(1, 1, 1)$, из которого при помощи элементарных операций может быть получено лишь конечное число решений.

4) Если $b \equiv 3 \pmod 4$, то для того чтобы уравнение (1) имело решение, необходимо, чтобы $a \equiv 0 \pmod 4$.

Однако это условие недостаточно, что подтверждается примером уравнения с параметрами $a=4$, $b=11$, не имеющего решений.

Далее отмечается, что в работе Морделла, посвященной данному уравнению (РЖМат, 1954, 3609), имеется ошибочное утверждение, что в случае, когда $a>3$, не может быть решений, для которых $xyz>0$, $x^2+y^2>b$, $x^2+z^2>b$ и $y^2+z^2>0$. Ошибочность этого утверждения видна из примера уравнения с $a=6$, $b=9$, имеющего решение (1, 7, 41) и (7, 41, 1721), удовлетворяющее всем указанным неравенствам.

В. Д. Подсыпанин

5510. О решении некоторых диофантовых уравнений. Минухин Б. Л., Уч. зап. Рыбинск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 2, 299—306

5511. Проблема выражения квадратичной формы трех переменных в виде суммы квадратов. Кэ Шао, Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1956, № 1, 17—30 (кит.)

Рассматривается положительно определенная квадратичная форма трех переменных

$$f(x_1, x_2, x_3)=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j \quad (a_{ij}=a_{ji}),$$

где a_{ij} — целые. Известно, что можно выразить $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде суммы 6 квадратов, т. е. $f(x_1, x_2, x_3)=\sum_{i=1}^{s}(b_{i1}x_1+b_{i2}x_2+b_{i3}x_3)^2$ ($s=6$), где b_{ij} — целые, причем $|b_{i1}|+|b_{i2}|+|b_{i3}|\neq 0$. Но с другой стороны, простым примером показывается, что такое утверждение при $s=5$ не верно.

Дается достаточное условие для того, чтобы было возможно выразить $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде 5 квадратов. Теорема. Пусть D — определитель квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3)$, A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в D, $d=(A_{11}, A_{22}, A_{33}, 2A_{12}, 2A_{23}, 2A_{31})$. Если $d=\lambda^2$ (или $2\lambda^2$), $D=4^{\mu}(8\nu-1)$, где $\lambda\geqslant 1$, $\mu\geqslant 0$, $\nu\geqslant 1$ — целые, то $f(x_1, x_2, x_3)$ можно выразить в виде 5 квадратов.

Теорема остается верной при некоторых дополнительных ограничениях на p_i и D в случае, когда $d=p_1\ldots p_r\lambda^2$, где p_i — различные простые, или $D=4^{\mu}(8^{\nu}-1)$.

Ши Чжун-цы

5512. Амбиговые классы и композиция бинарных квадратичных форм. Мрувка (Ambige Klassen und Kompositionen binärer quadratischer Formen. Mrowka Erwin), Wiss. Z. Hochschule Verkehrswes. Dresden, 1957, 5, № 2, 293—300, III—IV (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Излагается теория амбиговых (ambige, anceps, zweiseitige) положительных бинарных квадратичных форм $ax^2+bxy+cy^2$, a, b, c — целые числа, и их теория композиции по Гауссу—Брандту. Существенно новых результатов нет (ср. изложение этих теорий в монографии Б. А. Венкоза, Элементарная теория чисел, М.—Л., 1937, стр. 111—122, 154).

А. В. Малышев

5513. Критерии для кубических и квадратичных вычетов. Лемер (Criteria for cubic and quartic residuacity. Lehmer Emma), Mathematika, 1958, 5, № 9, 20—29 (англ.)

Якоби (Jacobi K. G., J. Math., 1827, 2, 66—69) заметил, что простые числа $q=2, 3, \ldots$, 37 являются кубическими вычетами по простому модулю p, удовлетворяющему условию

$$4p=L^2+27M^2,\ L\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3) \qquad (1)$$

для $L\equiv\pm\mu M (\mathrm{mod}\ q)$ и для $LM\equiv 0 (\mathrm{mod}\ q)$. Позже ряд простых чисел q был увеличен. $q=3, \ldots, 41$ являются квадратичными вычетами по простому модулю p, для которого выполняются условия

$$p=a^2+b^2,\ a\equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4), \qquad (2)$$

где $a\equiv 0$, или $b\equiv 0$, или $a\equiv\pm\mu b (\mathrm{mod}\ q)$.

Автор дает общую характеристику чисел μ для первого и второго вышеупомянутых случаев и находит число возможных величин μ для каждого p.

Полученные результаты применяются к доказательству того, что плотность простых p формы (1), для которых q есть кубический вычет, равна 1/6. Плотность простых p формы (2), для которых q — квадратичные вычеты, равна 1/8.

П. Н. Реморов

5514. Об алгебраически-теоретико-числовом обобщении одной элементарно-теоретико-числовой теоремы Зигмонди. Редеи (Über die algebraischzahlentheoretische Verallgemeinerung eines elementarzahlentheoretischen Satzes von Zsigmondy. Rédei Ladislaus), Acta scient. math., 1958, 19, № 1—2, 98—126 (нем.)

Изучаются „n-исключительные“ целые алгебраические числа ω_n, удовлетворяющие тому условию, что для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ порядок ω_n в группе классов вычетов по модулю $\mathfrak{p}$ не равен n. Зигмонди нашел все целые рациональные ω_n. Автор описывает все ω_n второй степени. Кроме того, им доказана теорема: „Для каждой пары n и k $[k>\varphi(n)]$ имеется бесчисленное множество „n-исключительных“ чисел степени „k“, и высказываются аргументы в пользу предположения, что теорема верна для $k=\varphi(n)$ и не верна для $k<\varphi(n)$.

Доказательства вполне элементарны и базируются на свойствах полиномов деления круга $F_n(x)$, связь между которыми и „n-исключительными“ числами ω_n дается следующей теоремой: Целое алгебраическое число ω тогда и только тогда является „n-исключительным“, когда из $\mathfrak{p}/F_n(\omega)$ следует $\mathfrak{p}/n$. Имеются опечатки.

М. Б. Барбан

5515. Об уравнении $ax\times by+cz=n$. Лу Вэнь-дуань Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. szechuan, 1956, № 1, 49—55 (кит.)

Теорема 1. Пусть a, b, c — положительные целые, причем $(a, b, c)=1$, M — наибольшее целое, не выражающееся в виде $ax+by+cz$ (x, y и z — неотрицательные целые). Пусть $N=ab/(a, b)+c(a, b)-a-b-c$. Для того чтобы $M=N$, необходимо и достаточно, чтобы c выразилось в виде a_1u+b_1v (где $(a, b)=d$, $a=a_1d$, $b=b_1d$, u, v — неотрицательные целые).

Эта теорема включает в себя теорему Кэ Шао (РЖМат, 1959, 4431), поскольку в случае $c>a_1b_1-a_1-b_1$ возможность выразить c в виде a_1u+b_1v уже известна.

В случае, когда c нельзя выразить в виде a_1u+b_1v, то либо 1) существуют положительные целые r, s такие, что $c=a_1r-b_1s$, $a_1r=b_1s\leqslant a_1b_1$, либо 2) существуют положительные целые r_1, s_1, такие, что $c=b_1s_1-a_1r_1$, $a_1v_1+b_1s_1\leqslant a_1b_1$. Пусть $c=a_1r-b_1s$ (или $c=b_1s-a_1r$), где $a_1r+b_1s\leqslant a_1b_1$, $r>0$, $s>0$. Пусть $N_1=ab/(a, b)+c(a, b)-a-b-c-bs$ (или $N_1=ab/(a, b)+c(a, b)-a-b-c-ar$), тогда теорема 3 утверждает, что в этом случае $M\leqslant N_1$. Равенство имеет место в том и только в том случае, когда $2c$ можно выразить в виде a_1u+b_1v, где u, v — неотрицательные целые.

Ши Чжун-цы

5516. О китайской теореме об остатках. Малер (On the chinese remainder theorem. Mahler Kurt), Math. Nachr., 1958, 18, № 1—6, 120—122 (англ.)

Рассматриваются решения системы сравнений

$$x\equiv r_l (\mathrm{mod}\ m_l) \quad (l=1, 2, \ldots, k).$$

Б. Ф. Скубенко

5517. Сравнение чисел в чешской системе счисления. Тейтельбаум В. Н., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 5, 807—810

Чешской системой (РЖМат, 1958, 7257) называется здесь система счисления, в которой число изображается совокупностью своих наименьших неотрицательных вычетов по модулям $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Числа $p_1, p_2, \ldots, p_n$—

положительные, простые. Рассматривается случай, при котором

$$2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_n.$$

Обозначим $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, что значит a — целое, $0 \leqslant a < p_1 p_2 \ldots p_n$ и a имеет данную совокупность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ вычетов по модулям $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Пользуясь способом, предложенным автором, нужно проделать не более $1+6(n-2)$ действий вычитания и деления, для того чтобы сравнить величины двух чисел, представленных в чешской системе.

Б. Ф. Скубенко

5518. Коды без запятых. Голомб, Гордон, Уэлш (Comma-free codes. Golomb S. W., Gordon Basil, Welch L. R.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 2, 202—209 (англ.)

Словарь без запятых по определению состоит только из слов вида $(a_1 a_2 \ldots a_k)$ и $(b_1 b_2 \ldots b_k)$, где k фиксировано, a_i, b_i — целые числа. „Перекрывающиеся" слова $(a_2 a_3 \ldots a_k b_1)$, $(a_3 \ldots a_k b_1 b_2), \ldots, (a_k b_1 \ldots b_{k-1})$ в такой алфавит не входят. Если $W_k(n)$ — наибольшее возможное число k-буквенных слов, образующих словарь без запятых и составленных из чисел $1, 2, \ldots, n$, то $W_k(n) \leqslant k^{-1} \sum \mu(d) n^{k/d}$, где суммирование распространяется на все делители d числа k, а $\mu(d)$ — функция Мёбиуса. Обоснован знак равенства в этой формуле для случаев $k = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15$. В случае k четного и $n > 3^{k/2}$ верхняя граница ниже указанной. Доказано существование предела α_k для отношения $W_k(n)$ к числу n^k всевозможных k-буквенных слов (не только „без запятых") при k фиксированном и $n \to \infty$. В случае нечетного k $\alpha_k = 1/k$. Если же k — четное, то $1/ek < \alpha_k \leqslant 1/k$. Указано, что коды без запятых могут найти применение, например в технике связи. Б. А. Кордемский

5519. Быстродействующие вычислительные машины, как инструмент в открытии новых теоретико-числовых соотношений. Вандивер (The rapid computing machine as an instrument in the discovery of new relations in the theory of numbers. Vandiver H. S.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 1958, **44**, № 5, 459—464 (англ.)

В докладе приводятся примеры, как на основе эксперимента с числовыми таблицами обнаруживались глубокие теоретико-числовые закономерности (например квадратичный закон взаимностей), которые, иногда лишь многое время спустя, получали точное научное обоснование.

Современная математика, имея в своем распоряжении быстродействующие вычислительные машины, обладает большими возможностями к выявлению новых теоретико-числовых соотношений.

Обсуждается несколько проблем, вообще говоря, связанных с последней теоремой Ферма, которые могут изучаться с помощью машин. Доводы автора подтверждаются проведенными работами группой американских математиков (Д. Леммер, Э. Леммер, Никол, Сельфридж и Вандивер) над проблемой Ферма при помощи машин СВАК. П. Н. Реморов

5520. Реферативный обзор современных работ по элементарной теории чисел. Голубев В. А., Матем. в школе, 1958, № 61, 67—71

5521. Последние десять цифр 9^{9^9}. Шапиро (The last ten digits of 9^{9^9}. Shapiro Irving), Scripta Math., 1958, **23**, № 1-4, 235—236 (англ.)

5522. О тернарных квадратичных формах. Хольцер (Zu den ternären quadratischen Formen. Holzer Ludwig. Wiss. Z. Univ. Rostock, Reihe Math. Naturwiss., 1953, **2**, 1—6) (нем.)

5523. О представлении числа в виде суммы четного числа квадратов. Ананда-Рау (On the representation of a number as the sum of an even number of squares. Ananda-Rau K. J. Madras Univ., 1954, **B24**, 61—89) (англ.)

5524 К. Об одной геометрической интерпретации цепных дробей и ее применении в теории диофантовых аппроксимаций. Шош (A lánctörtek egy geometriai interpretációjáról és annak alkalmazásáról a diotantikus approximáció elméletében. Kand. értekezés téz. Sós Vera. Budapest, Akad. ny., 1957, 61.), Magyar nemzeti bibliogr., 1957, № 4-6, 60 (венг.)

5525 К. Современные проблемы арифметики. Эоша (Problemas modernos de aritmética. Para a 3—a série primária. Eocha Nilséa Lima Figueiredo. Rio de Janeiro, Liv. Agir., 1958, 37 p., 14,00 cruz.), Bol. bibliogr. brasil., 1958, **6**, № 2, 87 (порт.)

5526 К. Введение в теорию чисел. Диксон (Introduction to the theory of numbers. Dickson Leonard Eugene. New York, Dover Publs, 1957, 191 pp., 1,65 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 18, 82 (англ.)

5527 К. Введение в теорию чисел. Харди, Райт (Einführung in die Zahlentheorie. Hardy G. H., Wright M. Übers. aus dem Engl. München, Oldenbourg, 1958, XVI, 480 S., 74.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 14, 974 (нем.)

5528 К. Арифметика для колледжей. Ларсен (Arithmetic of colleges. Rev. ed. Larsen Harold Daniel. New York—London, Macmillan and Co., 1958, xv, 286 pp., ill., 38 sh. 6 d.), Brit. Nat. Birliogr., 1958, № 444,9 (англ.)

См. также: 5401

АЛГЕБРА

Редакторы *А. И. Ширшов, Г. Н. Поваров*

5529 К. Геометрическая алгебра. Артин (Geometric algebra. Artin Emil. London, 1957) (англ.)

Реферируемая книга по замыслу автора должна служить руководством для спецкурсов и спецсеминаров в математических учебных заведениях. И содержание ее, тесно примыкающее к обычным курсам высшей алгебры и аналитической геометрии и тесно связывающее эти дисциплины с современными вопросами алгебраической науки, вполне отвечает этой задаче.

В гл. I „Основные понятия" собраны алгебраические теоремы, нужные для дальнейшего, но не входящие в основную линию изложения. Здесь читатель ознакомится с основными понятиями теории множеств, теории групп и теории тел, а также с важнейшими свойствами векторных пространств и линейных уравнений над телом. В этой главе, в частности, доказаны теорема об изоморфизме для пространств, теорема Веддербарна о конечных телах, теорема Хуа о семигомоморфизмах (РЖМат, 1953, 1106), теорема о вложении архимедовски упорядоченных тел в поле действительных чисел, теорема об отсутствии нетождественных автоморфизмов поля действительных чисел.

В гл. II „Аффинная и проективная геометрия" рассматривается аффинная плоскость, определяемая тремя обычными аксиомами связи: о прямой, проходящей через две точки, о параллельных, о существовании трех неколлинеарных точек. Определив сдвиг как коллинеацию, удовлетворяющую условию: $PP' \parallel QQ'$ (P' и Q'—

образы точек P и Q соответственно), и присоединив к множеству сдвигов тождественное отображение, автор получает группу коллинеаций T. Затем высказываются еще две аксиомы (в дальнейшем выясняется, что они эквивалентны теореме Дезарга): 1. Если P и Q — произвольные точки, то существует такое $\sigma \in T$, что $\sigma(P) = Q$; 2. Если $\tau_1, \tau_2 \in T$, $\tau_1, \tau_2 \neq 1$, $\tau_1 \neq \tau_2$, $P\tau_1(P) = P\tau_2(P)$ для некоторой точки P, то существует такой эндоморфизм α группы T, что $P\tau^{\alpha}(P) = P\tau(P)$ для всех $\tau \in T$ и что $\tau_2 = \tau_1^{\alpha}$. Эти аксиомы позволяют построить координатизирующее ассоциативное тело K, что и делается. Далее выясняется связь между теоремой Паппа и коммутативностью тела K. В следующих параграфах устанавливается, что всякое отображение σ прямой на себя, сохраняющее гармоничность четверок, имеет форму $\sigma(x) = ax^{\tau} + b$, где $a, b \in K$, $a \neq 0$, а τ — автоморфизм или антиавтоморфизм тела K (ср., РЖМат, 1953, 1106), и доказывается основная теорема проективной геометрии: каждое проективное отображение индуцируется некоторым полулинейным преобразованием. Доказывается также, что если координатизирующее тело коммутативно, а проективное отображение σ индуцируется линейным преобразованием, то σ определяется заданием образов $n+1$ точек (n — размерность пространства), не лежащих в $(n-1)$-мерном подпространстве. Содержание этой главы почти полностью перекрывается известной книгой Бера (РЖМат, 1956, 5101К), хотя и предлагаются совершенно другие доказательства.

В гл. III „Симплектическая и ортогональная геометрия" для конечномерного пространства над полем F вводится скалярное произведение $(x, y) \in F$, дистрибутивное относительно сложения и подчиненное условию $(ax, y) = a(x, y) = (x, ay)$, где $a \in F$. Выясняется, когда равенство $(x, y) = 0$ влечет $(y, x) = 0$. Оказывается, что это возможно лишь в двух случаях: 1) $(x, x) = 0$ для всех x (симплектическая геометрия); 2) $(x, y) = (y, x)$ для всех x, y (ортогональная геометрия). В добавлении исследуется также случай, когда F некоммутативно. Изучив строение симплектической и ортогональной геометрии, автор доказывает некоторые теоремы о строении групп линейных преобразований, сохраняющих скалярное произведение в этих геометриях (симплектическая и ортогональная группы). В предпоследнем параграфе изучаются геометрии над конечными полями, в последнем на любые упорядоченные поля переносится закон инерции квадратичных форм.

В гл. IV „Общая линейная группа" автор снова отказывается от коммутативности тела. Глава начинается с изложения теории определителей над телами, предложенной Дьедонне (Dieudonné J., Sur les groupes classiques, Paris, 1948; La géométrie des groupes classiques, Berlin, 1955). Затем рассматривается группа $GL_n(K)$ невырожденных линейных преобразований n-мерного векторного пространства над телом K. Если $n \neq 2$ или если $F \neq GF$ (2), то коммутант $SL_n(K)$ группы $GL_n(K)$ состоит из всех матриц с определителем, равным 1. Этот коммутант порождается преобразованиями σ, обладающими таким свойством: $\sigma(x) = x$ для всех x из некоторой гиперплоскости H, $\sigma(x) - x \in H$ для всех x. Доказывается простота фактор-группы $SL_n(K)$ по ее коммутанту, если только $n \neq 2$ или если $F \neq GF$ (2), GF (3). Рассмотрению выделенных выше исключительных случаев посвящен последний параграф.

В гл. V „Строение симплектической и ортогональной групп" основное тело снова предполагается коммутативным. Ставится задача разыскания нормальных делителей указанных в заглавии групп. Для симплектической группы это оказывается несложным, так как эта группа не содержит нецентральных нормальных делителей, если только мы не рассматриваем $GL_2(GF(2))$, $GL_2(GF(3))$, $GL_4(GF(2))$. Тот же результат получается и для группы вращений ортогональной геометрии, т. е. для подгруппы ортогональной группы, состоящей из матриц с определителем, равным 1, если F является полем действительных чисел, скалярное произведение задается суммой попарных произведений координат, а размерность пространства отлична от 1,2 и 4. Для описания строения ортогональной группы и группы вращений в общем случае привлекается алгебра Клиффорда. Однако более или менее законченные результаты получаются только для размерностей, не превышающих 4. Отдельные результаты получены и для более высоких размерностей. Отмечается, что многие вопросы все еще остаются открытыми. Л. А. Скорняков

5530 К. Алгебра, ее главные идеи и основные методы. Эйткен, Хендерсен (Algebra. Its big ideas and basic skills. I. Aitken D. J., Hendersen K. B. London, McGraw-Hill Publ. Co., 1954, XI, 419 pp., 22 sh.) (англ.)

5531 К. Современная алгебра. Ван-дер-Варден (Moderne Algebra. Van der Waerden B. L. Übers. aus dem Deutsch. Lisboa, Soc. Portug. Mat., 1954) (порт.)

5532 К. Алгебра. Цвергер, Клуг, Кретнер (Algebra. Zwerger M., Klug J. Neubearb. 4. unveränd. Aufl. Durchges. Krettner Josef. München, Lindauer, 1958, 221 S., ill., 5.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 23, 1609 (нем.)

5533 К. Избранное из современной абстрактной алгебры. Андри (Selections from modern abstract algebra. Andree Richard Vernon. New York, Holt, 1958, 224 pp., ill., 6.50 doll.), Publishers' Weekly, 1958, **173**, № 7, 116 (англ.)

5534 К. Алгебра для учительских институтов. Айелло, Провинцано (Algebra per l'stituto magistrale. 3000 esercizi. Aiello Filippo, Provinzano Antonino. Palermo, Ed. La nuova scuola, 1957, 226 p., 740 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 679, 620 (итал.)

5535 Д. О некоторых теоремах высшей алгебры. Вивье (Sur quelques théorèmes d'algèbre extérieure. Vivier Marcel. — Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris. Paris, Gauthier-Villars, 1956, 84 p.), Bibliogr. France, 1958, **147**, № 9, 519 (франц.)

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

5536. Одна комбинаторная проблема биохимического происхождения. Фрёйденталь (Ein kombinatorisches Problem von biochemischer Herkunft. Freudenthal Hans), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. 1958, **A61**, № 3, 253—258; Indagationes math., 1958, **20**, № 3, 253—258 (нем.)

Словом называется упорядоченная тройка, состоящая из букв a, b, c и d. Множество S некоторых слов называется языком, если из $x, y, z \in S$ и $uvw \in S$ следует, что $yzu \notin S$ и $zuv \notin S$. Язык может содержать не более 20 слов. Перечисляются всевозможные языки, состоящие из 20 слов. С точностью до перестановок в ряде a, b, c, d и одновременного изменения порядка на обратный в каждом слове языка их оказывается 14 типов.

Своим возникновением эта работа обязана одному примеру языка из биохимии: совокупность всех аминовых кислот можно мыслить как язык, состоящий из 20 слов. Н. А. Берикашвили

5537. Об одной задаче древней китайской математики. Шуранъи (On a problem of old Chinese mathematics. Surányi János), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 195—197 (англ.)

Дается доказательство тождества

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{l}{i}\binom{n+k+l-i}{k+l}=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l},\quad(1)$$

которое является обобщением, восходящего к китайскому математику XIII в. Чу Ши-чену тождества

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}^2\binom{n+2k-i}{2k}=\binom{n+k}{k}^2,\quad(2)$$

приведенного без доказательства в 1867 г. Ле Ен-шу. Доказательство (2) было получено с помощью аналитических средств Секерешем и Тураном (РЖМат, 1956, 6371), а затем на базе доказательства Турана и рядом других математиков (в том числе Хуа Ло-геном). Доказательство проводится средствами комбинаторики.

А. Г. Школьник

5538. **Замечание к заметке Турана. Нанджундья** (Remark on a note of P. Turán. Nanjundiah T. S.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 5, 354 (англ.)

Доказывается тождество

$$\sum_{r=0}^{\min(m,n)}\binom{m}{r}\binom{n}{r}\binom{\mu+r}{m+n}=\binom{\mu}{m}\binom{\mu}{n},\quad(1)$$

являющееся обобщением тождества

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k}=\binom{n+k}{k}^2.\quad(2)$$

принадлежащего китайским математикам и доказанного Тураном с помощью полиномов Лежандра ((1) равносильно тождеству, доказанному Шураньи (реф. 5537)). Доказательство опирается на трехкратное применение тождества Вандермонда

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{a}{i}\binom{b}{n-i}=\binom{a+b}{n}.$$

А. Г. Школьник

5539. **Условие Н. И. Лобачевского для вещественности всех корней алгебраического уравнения. Панфилов С. И.**, Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1957, вып. 31, 188—189

Приводится необходимое условие вещественности всех корней многочлена $f(x)$, указанное Н. И. Лобачевским (Полн. собр. соч., 1948, т. 4, стр. 316).

А. Г. Школьник

5540. **Алгебраическое решение уравнения $x^3+px+q=0$ более удобное, чем метод Тартальи. Ариста** (Risoluzione algebrica di $x^3+px+q=0$ più vantaggiosa di quella di Tartaglia. Arista Agostino), Giorn. mat. Battaglini, 1958, **86**, № 1, 122—126 (итал.)

5541. **Об уравнениях простой степени. Курбатов** (Ecuatii de grad prim. Kurbatov V. A.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1958, **12**, № 3, 50—67 (рум.)

Перевод с русского (РЖМат, 1958, 9591).

5542. **Об исключении. Гонсалвиш** (Sur l'élimination. Gonçalves J. Vicente), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, **A3**, № 2, 311—316 (франц.)

Излагается новый общий метод для определения, существует ли общий множитель для двух заданных многочленов от одного неизвестного над некоторым полем, а также указывается, как можно построить общий наибольший делитель этих многочленов.

Е. Г. Шульгейфер

5543. **Еще одна формулировка и доказательство теорем Зигеля о квадратичных формах. Кнезер, Тамагава** (Another formulation and proof of Siegel's theorems on quadratic forms. Kneser M., Tamagawa T.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh. Univ. Edinburgh, 1958, 32 (англ.)

5544. **О теории квадратичных форм, связанных линейными соотношениями. Лонго** (Sulla teoria delle forme quadratiche vincolate da relazioni lineari. Longo Antonio), Industria (Ital.), 1957, № 1, 54—66 (итал.)

Рассматривается действительная невырожденная квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\quad(1)$$

при наличии дополнительных линейных однородных соотношений

$$\sum_{1}^{n}b_{ij}x_j=0,\ i=1, 2, \ldots, m.\quad(2)$$

Ищутся необходимые и достаточные условия для того, чтобы форма (1) была положительно определенной на множестве значений неопределенных x_i, удовлетворяющих соотношениям (2). Эта проблема оказывается эквивалентной отысканию необходимых и достаточных условий для того, чтобы был положительным наименьший действительный корень уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{21} \ldots a_{n1} & b_{11} b_{21} \ldots b_{m1} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \ldots a_{n2} & b_{12} b_{22} \ldots b_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn}-\lambda & b_{1n} b_{2n} \ldots b_{mn} \\ b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} \quad 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} \ldots b_{mn} \quad 0 & 0 \ldots 0 \end{vmatrix}=0.$$

В свою очередь эти условия записываются в виде условий, налагаемых на знаки некоторых миноров определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} & b_{11} & b_{21} \ldots b_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} & b_{12} & b_{22} \ldots b_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} & b_{1n} & b_{2n} \ldots b_{mn} \\ b_{11} & b_{12} \ldots b_{1n} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} \ldots b_{mn} & 0 & 0 \ldots 0 \end{vmatrix}$$

В. К. Туркин

5545. **Условия положительной определенности квадратичной формы доказываются по индукции. Сили** (Conditions for a positive-definite quadratic form established by induction. Seelye C. J.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 5, 355—356 (англ.)

5546. **Спинорный род квадратичных форм. Джонс** (Spinor-genera of quadratic forms. Jones B. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 31 (англ.)

5547. **О совместном приведении квадратичной и эрмитовой форм. Изотов Г. Е.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 143—159

Решается задача о совместном приведении к каноническому виду квадратичной формы $b_{ij}x^ix^j$ ($b_{ij}=b_{ji}$) и эрмитовой формы $c_{ij}x^i\bar{x}^j$, заданных в n-мерном комплексном линейном аффинном пространстве. Устанавливается, что матрицы этих форм можно привести к жорданову виду. Дается описание (неполное) диагональных блоков таких матриц в геометрической форме. Приводится полная классификация пар форм для случая пространств размерностей 2 и 3. М. И. Граев

5548. Об одном обобщении неравенства Адамара. Крулль (Über eine Verallgemeinerung der Hadamardschen Ungleichung. Krull Wolfgang), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 42—45 (нем.)

Для хорошо известного обобщенного детерминантного неравенства

$$|g_{ik}|_{i,k=1}^{n} \leqslant |g_{ik}|_{i,k=1}^{p} \cdot |g_{ik}|_{i,k=p+1}^{n},$$

где $\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}x_i\bar{x}_k$ — положительно определенная квадратичная форма, приводится еще одно (по мнению автора, элементарное) доказательство. Ф. Р. Гантмахер

5549. Обращение 3×3-блочных матриц. Коско (Reciprocation of triply partitioned matrices. Kosko E.), J. Roy. Aeronaut. Soc., 1956, **60**, № 547, 490—491 (англ.)

Приводится другое решение задачи, которой была посвящена работа Данкана (РЖМат, 1956, 7871). Указываются две такие неособенные матрицы X и Y, что матрица XUY имеет три блока по главной диагонали, а на остальных местах нули. Используя это, автор выписывает выражения для блоков обратной к матрице $U=\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{pmatrix}$ матрицы $U^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$. Блоки a, b, c имеют такой же вид, как и в упомянутой работе Данкана,

$$d=-K^{-1}QN^{-1},\ e=K^{-1}-d\alpha K^{-1},$$
$$f=-K^{-1}(F-QN^{-1}M)J^{-1},\ g=-J^{-1}TN^{-1},$$
$$h=-J^{-1}(H-TN^{-1}\alpha)K^{-1},\ j=W+J^{-1}TN^{-1}MJ^{-1},$$

где K, α, M, N, Q имеют тот же смысл, что и в работе Данкана, $T=G-HK^{-1}Q$ и $W=J^{-1}+J^{-1}HK^{-1}FJ^{-1}$. Приводится также схема для вычисления блоков матрицы U^{-1}.

Замеченная опечатка, стр. 490, формула (5): последний блок второго столбца матрицы Y в действительности имеет вид $-J^{-1}H$ (вместо $-T^{-1}H$).

Е. Г. Шульгейфер

5550. О характеристических полиномах рациональных симметричных матриц третьего порядка. Шапиро А. П., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 890—892

Всякий многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами, вещественными корнями и старшим коэффициентом, равным единице, является характеристическим многочленом некоторой рациональной симметрической матрицы 3-го порядка. А. И. Ширшов

5551. Матрицы с заданными характеристическими корнями и диагональными элементами. Мирский (Matrices with prescribed characteristic roots and diagonal elements. Mirsky L.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 1, 14—21 (англ.)

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_n$, $a_1,\ldots,a_n$ — действительные (комплексные) числа. Условие $a_1+\ldots+a_n=\omega_1+\ldots+\omega_n$ необходимо и достаточно для существования действительной (комплексной) $n\times n$-матрицы $\|a_{jk}\|$, $j,k=1,\ldots,n$, с собственными значениями $\omega_1,\ldots,\omega_n$ и с диагональными элементами $a_{11}=a_1,\ldots,a_{nn}=a_n$.

2. Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_n$, $a_1,\ldots,a_n$ — действительные числа. Условие $(a_1,\ldots,a_n)\prec(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ необходимо и достаточно для существования вещественной симметрической $n\times n$-матрицы $\|a_{jk}\|$, $j,k=1,\ldots,n$, с собственными значениями $\omega_1,\ldots,\omega_n$ и диагональными элементами $a_{11}=a_1,\ldots,a_{nn}=a_n$. Здесь символ $(a_1,\ldots,a_n)\prec(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ означает, что если $a_1,\ldots,a_n$, $\omega_1,\ldots,\omega_n$ занумерованы так, что $a_1\geqslant\ldots\geqslant a_n$; $\omega_1\geqslant\ldots\geqslant\omega_n$, то $a_1+\ldots+a_k\leqslant\omega_1+\ldots+\omega_n$, $k=1,\ldots,n-1$, и $a_1+\ldots+a_n=\omega_1+\ldots+\omega_n$.

3. Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_n$ — комплексные и $a_1,\ldots,a_n$ — действительные числа. Условие $(\mathrm{Re}\,\omega_1,\ldots,\mathrm{Re}\,\omega_n)\prec(a_1,\ldots,a_n)$ необходимо и достаточно для существования такой матрицы A с собственными значениями $\omega_1,\ldots,\omega_n$, что $a_1,\ldots,a_n$ — собственные значения матрицы $\frac{1}{2}(A+A^*)$.

М. А. Наймарк

5552. Матрицы из полиномов от нескольких неизвестных. Абельянас (Matrices de polinomios en varias indeterminadas. Abellanas Pedro), Rev. mat. hisp.-amer., 1957, **17**, № 6, 267—277 (исп.)

Изучаются вопросы об инвариантных множителях, об элементарных преобразованиях и о канонической диагональной форме квадратной матрицы с элементами из кольца полиномов от нескольких переменных над некоторым полем. Э. Апарисио

5553. Метод расчета кратности массообмена в ректификационных аппаратах. Батунер Л. М., Тр. Ленингр. хим.-фармацевт. ин-та, 1958, вып. 4, 19—28

Показывается, что метод аналитического расчет числа ступеней ректификации бинарных смесей сводится к вычислению элементов матрицы M^n, где M — квадратная матрица второго порядка. Используется известная формула $M^n=P_1r_1^n+P_2r_2^n$ где r_1 и r_2 — характеристические числа матрицы M, и P_1, P_2 — квадратные матрицы порядки которых не зависят от числа n. Для конкретного вычисления элементов матриц P_1 и P_2 полагают в этой формуле $n=0,1$. Ф. Р. Гантмахер

5554. Преобразование трехфазной системы переменного тока с помощью матричного исчисления. Сенди (Transformation of a three-phase alternating-current system with the aid of matrix calculus. Szendy Ch.), Acta techn. Acad. scient. hung., 1958, **19**, № 3-4, 379—403 (англ.; рез. нем., франц., русск.)

Преобразование трехфазной системы переменного тока связано с матрицей импедансов, которая представляется в виде гиперматрицы, состоящей из коммутирующих между собой и притом циклических блоков. Используются формулы Эгервари для таких гиперматриц (РЖМат, 1957, 3788). Согласно утверждению автора, полученное общее преобразование охватывает все преобразования, которые в частных случаях были получены другими методами. Ф. Р. Гантмахер

5555. Прикладной курс матричного исчисления. Дени-Папен, Кауфман (Cours de calcul matriciel appliqué. Denis-Papin M., Kaufmann A.), Electro-techn., hydraul., radio, 1958, № 237, Suppl., 150—157 (франц.)

5556. Скалярные полиномиальные уравнения для матриц над конечным полем. Ходжес (Scalar polynomial equations for matrices over a finite field. Hodges John H.), Duke Math. J., 1958, **25**, № 2, 291—296 (англ.)

Пусть $GF(q)$ — конечное поле порядка $q=p^n$, θ — квадратная матрица с элементами из $GF(q)$, $E=E(x)$ — примитивный многочлен со старшим коэффициентом 1 над $GF(q)$.

Пусть

$$E = P_1^{h_1} P_2^{h_2} \dots P_s^{h_s}$$

— разложение многочлена E в произведение простых примитивных многочленов P_i степени d_i $(i = 1, 2, \dots, s)$, θ — матрица порядка m, для которой $E(\theta) = 0$,

$$\frac{\pi(m)}{m} = \sum_{i=1}^{s} d_i \sum_{j=1}^{h_i} j\, k_{ij},$$

где k_{ij} — число элементарных делителей вида P_i^j матрицы $xI - \theta$. В работе устанавливается формула

$$N(E, m) = g(m, 1) \sum_{\pi} q^{-a(\pi)} \prod_{i=1}^{s} \prod_{j=1}^{h_i} g(k_{ij}, d_i)^{-1}$$

для числа $N(E, m)$ матриц θ порядка m, удовлетворяющих условию $E(\theta) = 0$, где $g(t, d)$ означает число неособенных матриц порядка $t \geqslant 1$ над $GF(q^d)$,

$$g(t, d) = \prod_{i=0}^{t-1} (q^{dt} - b^{di}),$$

$g(0, d) = 1$. Рассматриваются также некоторые частные случаи этой формулы. Б. М. Уразбаев

5557. **Матрицы, обратные к невырожденным матрицам (a_{ij}), удовлетворяющим условию $a_{ij} = 0$ для $i + r < j$.** **Асплунд** (Inverses of non-singular matrices (a_{ij}) satisfying $a_{ij} = 0$ for $i + r < j$. Asplund E.), Abstr. Short communs internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 12 (англ.)

5558. **Метод построения ортогональных и унитарных прямоугольных матриц любого порядка. Богун-Чудинов** (On methods of constructing orthogonal and unitary rectangular matrices of every order. Bohun-Chudyniv V.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 14 (англ.)

5559. **О нормах матриц и некоторых соотношениях между нормами и собственными значениями. Гаучи** (On norms of matrices and some relations between norms and eigenvalues. Gautschi Wernes. Dokt.-Inauguraldiss. philos. Dokt. Philosoph.-Naturwiss. Fak. der Universität Basel. Basel, Buchdruckerei Birkhäuser AG, 1954, 39 S.) (англ.)

Пусть A — матрица порядка n с вещественными или комплексными коэффициентами, $N(A) = (\operatorname{sp} AA^*)^{\frac{1}{2}}$, λ_ν — корни минимального полинома матрицы A с кратностями m_ν, $k = \max_{\lambda_\nu \neq 0} m_\nu$. Устанавливается, что для любого целого положительного p

$$1 \leqslant N(A^p) \left(\sum_{\nu=1}^{n} |\lambda_\nu|^{2p} \right)^{-\frac{1}{2}} \leqslant c p^{k-1},$$

где c не зависит от p (для случая, когда все $m_\nu = 1$, т. е. A приводится к диагональной форме, эта оценка элементарна). Для случая, когда A — треугольная матрица, дается оценка роста элементов матрицы A^p. Выводятся некоторые следствия из полученных результатов. Рассматриваются обобщения этих результатов на случай норм N более общего вида. Обобщаются обычные понятия верхней грани $\Omega(A) = \max \sqrt{\rho_\nu}$ и нижней грани $\omega(A) = \min \sqrt{\rho_\nu}$ матрицы A, где ρ_ν — собственные значения матрицы A: автор определяет

$$\Omega_{H,K}(A) = \max_{\|x\|_K = 1} \|Ax\|_H \quad \text{и} \quad \omega_{H,K}(A) = \min_{\|x\|_K = 1} \|Ax\|_H,$$

где H и K — фиксированные, положительно определенные матрицы, x — вектор и $\|x\|_K = x^* K x$. Устанавливается ряд соотношений для $\Omega_{H,K}$ и $\omega_{H,K}$. Дается верхняя оценка $\Omega_{H,K}(A)$ для матриц A, имеющих достаточно много нулевых элементов (обобщение теоремы Леdермана (Ledermann W., J. London Math. Soc., 1937, 12, 12—18). Устанавливается, что для произвольной матрицы A

$$\inf_H \Omega_{H,K}(A) = |\lambda_A|_{\max}, \quad \sup_H \omega_{H,H}(A) = |\lambda_A|_{\min}.$$

М. И. Граев

5560. **О линейных преобразованиях в унитарном пространстве с антиинволюцией. Янь Чжи-да, Чэнь Я-шэнь** (Ien Chih-ta, Chen Jar-sun), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1958, 8, № 1, 36—52 (кит.; рез. франц.)

Под унитарным пространством всегда понимается векторное пространство L над полем комплексных чисел, в котором определена эрмитова метрика (x, y), не обязательно определенная. Под антиинволюцией понимается отображение $x \to \bar{x}$ пространства $\mathfrak{L}$ (на себя), при котором

$$\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{x\lambda} = \bar{x}\,\bar{\lambda}, \quad \bar{\bar{x}} = ix, \text{ где } i = \pm 1 \text{ и } \lambda \in K.$$

Мы говорим, что унитарное пространство допускает антиинволюцию, обозначая это пространство через UR, когда оба понятия, определенные выше, связаны следующим соотношением:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \varepsilon \overline{(x, y)}, \text{ где } \varepsilon = \pm 1.$$

Проективная группа всех автоморфизмов пространства UR есть классическая вещественная группа Ли, т. е. простая вещественная группа Ли, принадлежащая одному из 4 больших классов; кроме некоторых тривиальных случаев, это все вещественные классические группы. (I) $i = \varepsilon = 1$ — псевдоевклидова группа; (II) — $i = \varepsilon = 1$ — псевдоунитарная группа кватернионов; (III) $i = -\varepsilon = 1$ — вещественная симплектическая группа; (IV) $i = \varepsilon = -1$ — вещественная простая группа типа D. Предполагается изучить классификацию вещественных симметрических или левых вещественных симметрических преобразований, т. е. линейных преобразований, перестановочных с данной антиинволюцией.

Известно, что в унитарном пространстве преобразования симметрические или левые симметрические классифицируются по своим знакоопределенным элементарным делителям. Аналогичным, но более уточненным методом устанавливается, что в пространстве UR знакоопределенные элементарные делители образуют полную систему инвариантов. Аннонсируется теорема: Для того чтобы два линейных действительных симметрических преобразования (симметрических слева) были эквивалентными в пространстве UR, необходимо и достаточно, чтобы они были эквивалентными в унитарном пространстве.

Элементарные делители такого линейного преобразования не произвольны, они удовлетворяют некоторым условиям. Обозначим через $+(t-a)^m$ данный элементарный делитель и $-(t-a)^m$ тот же делитель с противоположным знаком. Тогда имеем следующий перечень всех видов делителей, которые встречаются одновременно

(1) $(t-a)^m$, $(t-\bar{a})^m$, $+(t-a)^r$;

(2) $(t-a)^m$, $(t-a)^m$, $(t-\bar{a})^m$, $(t-\bar{a})^m$, $+(t-a)^r + (t-a)^r$;

(3) $(t-\alpha)^m$, $(t-\alpha)^m$, $(t-\bar{\alpha})^m$, $(t-\bar{\alpha})^m$, $(t-\alpha)^r$, $(t-\alpha)^r$;

(4) $(t-\alpha)^m$, $(t-\bar{\alpha})^m$, $(t-\alpha)^r$, $(t-\alpha)^r$,

где a — вещественное число, α — комплексное. Для линейного вещественного преобразования имеем во всех случаях общие формы $(t-\alpha)^m$, $(t-\bar{\alpha})^m$, $(t+\alpha)^m$, $(t+\bar{\alpha})^m$, где α ни вещественное, ни мнимое. Для действительных или мнимых корней мы имеем следующий перечень:

(1) $(t-a)^m$, $(t+a)^m$, $+(t-i\beta)^r$, $+(t+i\beta)^r$, $+t^{2S+1}$, t^{2S}, t^{2S};

(2) $(t-a)^m$, $(t-a)^m$, $(t+a)^m$, $(t+a)^m$, $+$ $+(t-i\beta)^r+(t+i\beta)^r$, t^{2S}, t^{2S}, $+t^{2S+1}$, $+t^{2S+1}$;

(3) $(t-a)^m$, $(t+a)^m$, $+(t-i\beta)^r$, $-(t+i\beta)^r$, t^{2S+1}, t^{2S+1}, $+t^{2S}$;

(4) $(t-a)^m$, $(t-a)^m$, $(t+a)^m$, $(t+a)^m$, $+(t-i\beta)^r$, $-(t+i\beta)^r$, t^{2S+1}, t^{2S+1}, $+t^{2S}$, $+t^{2S}$,

где a, β — вещественные числа.

В конце указываются приложения к изучению автоморфизмов простых вещественных групп и особенно к определению симметрических римановых пространств, которые будут исследованы в следующей работе.

Резюме автора

5561 К. Алгебра. Решение частных систем второй степени и выше методами линейных эквивалентных систем. Лелла (Algebra. Risoluzione di particolari sistemi di secondo grado e superiori al secondo coi metodi dei sistemi lineari equivalenti. Lella Simone, Bari, Tip. Due stelle, 1957, 91 p.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 678, 593 (итал.)

ГРУППЫ

5562. О структурах подгрупп конечных групп. Бандьопадхьяй (On the lattice of subgroups of finite groups. Bandyopadhyay Shyama Prasad), Bull. Calcutta Math. Soc., 1956, **48**, № 3, 121—128 (англ.)

Рассматриваются структуры подгрупп некоторых конечных групп.

1. Доказано, что подгруппы циклической группы порядка n образуют структуру, изоморфную структуре делителей числа n, и обратно. Этим обобщается результат Бера о том, что структура подгрупп группы G тогда и только тогда является цепью, когда порядок группы равен степени некоторого простого числа.

2. Результат 1 используется для проверки изоморфизма между структурой подполей поля Галуа $GF(p^n)$ и структурой делителей числа p^n-1, а также структурой делителей числа n.

3. Приводится диаграмма Хассе группы G восьмого порядка с двумя образующими a, b и определяющими соотношениями $a^4=b^2=1$, $ba=a^3b$.

Доказано, что всякая группа восьмого порядка тогда и только тогда изоморфна группе G, когда она структурно изоморфна ей.

4. Приводится диаграмма Хассе группы D_{2^n} порядка $2^n (n\geqslant 3)$ с двумя образующими a, b, удовлетворяющими соотношениям $a^{2^{n-1}}=1$, $b^2=1$, $bab^{-1}=a^{-1}$. Доказано, что группа D порядка 2^n тогда и только тогда изоморфна группе D_{2^n}, когда она ей структурно изоморфна.

5. Рассмотрена структура обобщенной группы кватернионов G_{2^n} $(n\geqslant 3)$, порожденной элементами a, b, удовлетворяющими соотношениям

$$a^{2^{n-1}}=1,\ b^2=a^{2^{n-2}},\ bab^{-1}=a^{-1}.$$

Доказано, что группа K тогда и только тогда изоморфна группе G_{2^n}, когда она ей структурно изоморфна.

6. Описано очевидное соответствие между структурой подгрупп группы G и структурой подгрупп фактор-группы G по ее нормальному делителю N.

Л. Е. Садовский

5563. Замечание о конечных группах. Херстейн (A remark on finite groups. Herstein I. N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 255—257 (англ.)

Пусть G — конечная группа и A — ее абелева подгруппа. Если A максимальна в G, то G разрешима.

Б. И. Плоткин

5564. О наименьшем p-пересечении разрешимой группы. Ито (Über den kleinsten p-Durchschnitt auflösbarer Gruppen. Itô Noboru), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 27—32 (нем.)

Пусть G — разрешимая конечная группа и D — пересечение всех силовских p-подгрупп из G. Рассматриваются различные условия, при которых D есть пересечение двух силовских p-подгрупп.

Б. И. Плоткин

5565. Об инвариантах конечных регулярных p-групп. Кемхадзе Ш. С., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 246

Сообщаются две теоремы об инвариантах конечной регулярной p-группы. Эти теоремы могут быть выведены, впрочем, из результатов работы Холла (Hall Ph., Proc. London, Math. Soc., 1933, **36**, 29—95).

А. Г. Курош

5566. Класс групп, связанных с латинскими квадратами. Сингер (A class of groups associated with Latin squares. Singer J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 24 (англ.)

5567. Некоторые проблемы теории подстановок. Пиккар (Quelques problèmes de la théorie des substitutions. Piccard Sophie. Verhandl. Schweiz. naturforsch. Ges., 1954, **133**, 67—68) (франц.)

5568. О группах подстановок. Пиккар (Sur les groupes de substitutions. Piccard Sophie. Verhandl. Schweiz. naturforsch. Ges., 1953, **132**, 100—101) (франц.)

5569. Строение групп. Пиккар (Structure de groupes. Piccard Sophie. Verhandl. Schweiz. naturforsch. Ges., 1954, **133**, 66—67) (франц.)

5570. Заметка к теории полных абелевых групп. Длаб Властимил, Чехосл. матем. ж., 1958, **8**, № 1, 54—61 (рез. англ.)

Система образующих $\mathfrak{G}$ абелевой группы G называется приводимой, если из нее можно удалить элемент так, что получится снова система образующих группы G. Если это свойство не выполнено, то $\mathfrak{G}$ называется неприводимой системой образующих. Если свойство быть системой образующих группы G сохраняется при удалении из системы $\mathfrak{G}$ любого ее элемента, то она называется сильно приводимой системой образующих группы G. Система образующих группы G называется наследственно приводимой, если она сама и всякая ее подсистема, также являющаяся системой образующих группы G, приводимы. Аналогично определяется наследственно сильно приводимая система образующих. Группа G называется достижимой, если существуют такая подгруппа $H\subset G$ $(H\neq G)$ и такой элемент $g\in G$, что $\{H, g\}=G$.

Доказывается, что если G — полная группа, то она не является достижимой; если ненулевая группа не достижима, то всякая ее система образующих сильно приводима; если всякая система образующих группы G

сильно приводима, то G — полная группа. На примере показано, что последнее утверждение перестает быть верным, если потребовать только, чтобы всякая система образующих группы была приводимой. Далее доказывается, что в группе

$$G = \sum_{m=1,2,\ldots} G_m(p^\infty) \dotplus \sum_{m=1,2,\ldots} G_m(p),$$

где $G_m(p^\infty)$ — группа типа p^∞, $G_m(p)$ — циклические группы порядка p (простое число p фиксировано), имеется неприводимая система образующих, затем имеется приводимая система образующих, не являющаяся ни сильно приводимой, ни наследственно приводимой, имеются, далее, сильно приводимая система образующих, не являющаяся наследственно приводимой, наследственно приводимая система образующих, не являющаяся сильно приводимой, наследственно приводимая система образующих, являющаяся одновременно сильно приводимой, но не являющаяся наследственно сильно приводимой системой образующих, и, наконец, имеется также наследственно сильно приводимая система образующих. А. П. Мишина

5571. Об универсальных гомоморфных образах и универсальных подгруппах абелевых групп. Фукс (Über universale homomorphe Bilder und universale Untergruppen von abelschen Gruppen. Fuchs L.), Publs math., 1957, № 1-2, S. 185—196 (нем.)

Гомоморфный образ U абелевой группы G называется универсальным гомоморфным образом, если для всякого гомоморфного образа H группы G в U имеется подгруппа, изоморфная H. Доказывается, что для всякой периодической абелевой группы универсальный гомоморфный образ существует. При этом если группа G примарна по простому числу p и ее финальный ранг (РЖМат, 1956, 5113) равен $\mathfrak{m}$, то $G = G_1 \dotplus G_2$, где G_1 — группа с ограниченными в совокупности порядками элементов, G_2 — группа, ранг которой равен финальному рангу группы G (РЖМат, 1956, 2028), а универсальным гомоморфным образом группы G является группа $U = G_1 \dotplus \sum_{\mathfrak{m}} C(p^\infty)$. Здесь через $C(p^\infty)$ обозначена группа типа p^∞, рангом примарной группы называется мощность любой ее максимальной линейно независимой системы элементов, система элементов $(\ldots, g_\alpha; \ldots)$ называется линейно независимой, если из всякого соотношения вида $n_1 g_{\alpha_1} + \ldots + n_k g_{\alpha_k} = 0$ вытекают соотношения $n_1 g_{\alpha_1} = \ldots = n_k g_{\alpha_k} = 0$.

Далее доказывается, что если фактор-группа группы G по ее периодической части T имеет ранг $\mathfrak{r} \geqslant 1$, то для группы G универсальный гомоморфный образ существует тогда и только тогда, когда или ранг $\mathfrak{r}$ бесконечен, или же он конечен, но финальные ранги всех примарных компонентов группы T бесконечны, а фактор-группа G/T имеет вид $G/T = R(\sigma_1) \dotplus \ldots \dotplus R_{\mathfrak{r}}(\sigma_{\mathfrak{r}})$, где $R_i(\sigma_i)$ — абелева группа без кручения ранга 1 типа σ_i и $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{\mathfrak{r}}$. Попутно доказывается, что вид $A = R_1(\sigma_1) \dotplus \ldots \dotplus R_{\mathfrak{r}}(\sigma_{\mathfrak{r}})$, где $\sigma_1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{\mathfrak{r}}$, имеют те и только те абелевы группы без кручения конечного ранга, для всякого гомоморфного образа которых, являющегося тоже группой без кручения, имеется подгруппа группы A, ему изоморфная.

Подгруппа Z абелевой группы G называется универсальной подгруппой, если все остальные подгруппы группы G являются гомоморфными образами Z. Доказывается, что примарная группа тогда и только тогда обладает универсальной подгруппой, когда ее финальный ранг или равен нулю, или бесконечен. Периодическая группа обладает универсальной подгруппой тогда и только тогда, когда каждая ее примарная компонента обладает такой подгруппой. Если фактор-группа группы G по ее периодической части T имеет ранг $\mathfrak{r} \geqslant 1$, то G тогда и только тогда обладает универсальной подгруппой, когда или ранг $\mathfrak{r}$ бесконечен, или же T обладает универсальной подгруппой, а сама группа G имеет вид $G = T \dotplus \sum_{\mathfrak{r}} C(\infty)$, где $C(\infty)$ — бесконечная циклическая группа. А. П. Мишина

5572. Группа сохраняющих упорядочение автоморфизмов упорядоченной абелевой группы. Конрад (The group of order preserving automorphisms of an ordered abelian group. Conrad Paul), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 382—389 (англ.)

Обозначим через Γ множество всех пар таких выпуклых подгрупп G_γ, G^γ упорядоченной абелевой группы G, что $G_\gamma \subset G^\gamma$ и между ними нельзя вставить выпуклой подгруппы G. Множество Γ упорядочивается по отношению включения подгрупп. В работе доказано, что если G есть абелева упорядоченная группа, для которой множество Γ является вполне упорядоченным, и для каждого γ группа сохраняющих упорядочение автоморфизмов естественно упорядоченный фактор-группы G^γ/G_γ изоморфна подгруппе положительных рациональных чисел, то группа всех сохраняющих упорядочение автоморфизмов группы G может быть упорядочена. Показано также, что абелева группа без кручения может быть упорядочена таким образом, что соответствующую группу всех ее сохраняющих упорядочение автоморфизмов можно упорядочить. А. А. Виноградов

5573. Об одном классе нильпотентных групп. Бачурин Г. Ф., Сб. научн. тр. Магнитогорск. горно-металлург. ин-та, 1958, вып. 16, 99—112

Основными являются следующие предложения:

1. Максимальная периодическая подгруппа нильпотентной группы, удовлетворяющей условию минимальности для абелевых нормальных делителей, специальна, т. е. является конечным расширением прямого произведения конечного множества циклических и квазициклических групп.

2. Нильпотентная группа тогда и только тогда удовлетворяет условию минимальности для абелевых нормальных делителей, когда все ее максимальные абелевы нормальные делители специальны.

3. Если нильпотентная группа удовлетворяет условию минимальности для абелевых нормальных делителей и ее центр конечен, то конечна и вся группа.

4. Для того чтобы нильпотентная группа, удовлетворяющая условию минимальности для абелевых нормальных делителей, была специальной группой, необходимо и достаточно, чтобы второй фактор ее верхнего центрального ряда не содержал элементов бесконечной высоты.

5. Если группа обладает возрастающим центральным рядом и удовлетворяет условию минимальности для абелевых нормальных делителей, то длина ее верхнего центрального ряда не может быть равна ω.

С. Н. Черников

5574. О произведении двух циклических 2-групп. Ито (Über das Produkt von zwei zyklischen 2-Gruppen. Ito Noboru), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 517—520 (нем.)

Пусть G есть произведение двух конечных циклических подгрупп A и B: $G = AB$. Тогда:

1. Если порядок A не меньше порядка B, то A содержит собственный нормальный делитель группы G.

2. Если $A \cap B = E$, A и B — 2-группы порядков 2^a и 2^b, $a \geqslant b$, то для $c < b$ произведение $A_c B_c$ является

нормальным делителем в G. Здесь A_c — подгруппа из A порядка 2^c. Аналогично определяется B_c.

3. При тех же условиях коммутант $D(G)$ не может быть абелевой группой типа $(2^d, 2^d)$ ни при каком натуральном d. Если центр G является циклической группой, то и коммутант является циклической группой.

Отсюда и из результатов Хупперта выводится, что произведение двух циклических групп является двухступенно мегабелевой группой. Б. И. Плоткин

5575. О группах с возрастающим центральным рядом. Бачурин Г. Ф., Матем. сб., 1958, **45**, № 1, 105—112

Показывается, что в случае непериодических нильпотентных групп (в отличие от периодических нильпотентных групп) из разложимости хотя бы одного максимального абелева нормального делителя в прямое произведение конечного множества циклических групп не вытекает, что группа является конечным расширением нормального делителя такого рода. Кроме того, даются два предложения:

1. Если группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом и хотя бы один ее максимальный абелев нормальный делитель имеет конечное число образующих элементов, то группа $\mathfrak{G}$ нильпотентна и имеет конечное число образующих элементов.

2. Отличный от единицы полный нормальный делитель нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ содержит отличную от единицы полную подгруппу центра группы $\mathfrak{G}$.

Примечание референта. Автор не отмечает, что для периодических нильпотентных групп референтом (Матем. сб., 1950, **27** (69), № 2, 185—200) доказано более сильное предложение. С. Н. Черников

5576. Инварианты антиавтоморфизмов группы. Бюхи, Райт (Invariants of the anti-automorphisms of a group. Büchi J. Richard, Wright Jesse B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 6, 1134—1140 (англ.)

Пусть дана некоторая группа $\bar{A}$, а $G_0(\bar{A})$ есть группа ее автоморфизмов. Пусть $G(\bar{A})$ есть группа взаимно однозначных отображений группы $\bar{A}$ на себя, полученная добавлением к $G_0(\bar{A})$ новых отображений. Групповая операция $\bar{A}$ является инвариантом отображений из $G_0(\bar{A})$, но не будет инвариантом для $G(\bar{A})$. Клейн (Klein F., Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen Erlangen, Verlag von Andreas Deichert, 1872) рассматривал задачу отыскания инвариантов группы $G(\bar{A})$ для случая, когда $\bar{A}$ есть евклидово пространство. Случай, когда $G(\bar{A})$ есть голоморф $H(\bar{A})$, был рассмотрен авторами (РЖМат, 1956, 7153).

В реферируемой работе рассматривается случай, когда $G(\bar{A})$ есть группа всех автоморфизмов и антиавтоморфизмов $\bar{A}$. Пусть $p(x, y) = x \cdot y$ есть групповая операция в $\bar{A}$. Взаимно однозначное отображение T множества A называется антиавтоморфизмом группы $\bar{A}$, если оно переводит операцию $p(x, y)$ в операцию $q(x, y) = yx$. В работе доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Соотношение

$$\alpha(x, y, z) : xy = z \vee yx = z$$

является характеристическим инвариантом для группы $G_1(\bar{A})$ автоморфизмов и антиавтоморфизмов группы $\bar{A}$.

Теорема 2. Не существует конечного или бесконечного множества соотношений, выражаемых как равенства между словами, которое составляло бы систему характеризующих инвариантов группы $G_1(\bar{A})$. Точнее: существует группа $\bar{A}_0$ и такое ее отображение T, что каждое равенство между словами, которое в любой группе $\bar{A}$ является инвариантом относительно отображений из $G_1(\bar{A})$, есть также инвариант в $\bar{A}_0$ относительно T, и при этом T не есть элемент $G_1(\bar{A})$.

Авторы отмечают, что понятие антиавтоморфизма можно отнести к любой алгебраической системе $\bar{A} = \langle A, \cdot \rangle$ с одной бинарной операцией $x \cdot y$.

Теорема 1 остается в силе для полугрупп с сокращениями. Приводится пример, показывающий, что этим класс всевозможных систем $\langle A, \cdot \rangle$, для которых верна теорема 1, не исчерпывается.

Из теоремы 1, в частности, следует, что не существует такого слова W, чтобы в любой группе $\bar{A}$ операция $W_{\bar{A}}$, определенная посредством слова W, являлась характеризующим инвариантом для $G_1(\bar{A})$. С. И. Адян

5577. Замечание об автоморфизмах в группах. Ауслендер (Remark on automorphisms of groups. Auslander Maurice), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 229—230 (англ.)

Пусть $\mathfrak{G}$ — группа и α — ее автоморфизм, n-я степень которого является внутренним автоморфизмом. Тогда, если все неподвижные элементы относительно α из $\mathfrak{G}$ лежат в центре $\mathfrak{G}$, то $\alpha^{n^2} = 1$.

Приводятся также условия, при которых $\alpha^n = 1$.

Б. И. Плоткин

5578. Одно соотношение дистрибутивности для сопряженных подгрупп. Виландт (Eine Distributivitätseigenschaft konjugierter Untergruppen. Wielandt Helmut), Math. Z., 1958, **69**, № 4, 345 (нем.)

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_m$ — все подгруппы группы G, сопряженные с подгруппой H_1 конечного индекса n. Тогда

$$H_1 \bigcap_{\beta \neq \gamma}^{1 \ldots n} \bigcup (H_\beta \cap H_\gamma) = \bigcup_{\gamma=2} (H_1 \cap H_\gamma).$$

Б. И. Плоткин

5579. Одно доказательство теоремы о подгруппах для свободных произведений. Мак-Лейн (A proof of the subgroup. theoren for free products. MacLane Saunders), Mathematika, 1958, **5**, № 9, 13—19 (англ.)

Новое доказательство теоремы о подгруппах свободного произведения групп, доказанной референтом (Math. Ann., 1934, **109**, 647—660). В доказательстве используются соображения, связанные не с сокращениями слов, а с представителями смежных классов. Теорема формулируется в следующем уточненном виде:

Если

$$G = *_\beta A_\beta, \quad \beta \in J,$$

и H — подгруппа группы G, то для каждого индекса $\beta \in J$ существует такая система $\{S_\beta(D)\}$ представителей (H, A_β)-двойных смежных классов D, что

$$H = F * [*_\beta (*_D (H \cap s A_\beta s^{-1}))], \quad s = S_\beta(D).$$

Здесь F — свободная группа β пробегает все множество J, а для каждого β D пробегает все (H, A_β)-двойные смежные классы в G. Если индекс $[G : H]$ конечен, то число свободных образующих в F равно

$$1 - [G : H] + \sum_\beta ([G : H] - m_\beta),$$

где m_β есть число (H, A_β)-двойных смежных классов группы G.

Автор отмечает, что следовало бы найти ранг свободного множителя F и в том случае, когда индекс $[G : H]$ бесконечен. С другой стороны, следовало бы найти условия, которым должна удовлетворять система представителей двойных смежных классов для того, чтобы она могла быть использована в качестве системы $S_\beta(D)$. А. Г. Курош

5580. Подобие между свойствами идеалов в коммутативных кольцах и свойствами нормальных делителей групп. Шенкман (The similarity between the properties of ideals in commutative rings and the properties of normal subgroups of groups. Schenkman Eugene), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 375—381 (англ.)

Проведена аналогия между некоторыми свойствами нормальных делителей группы с условием максимальности для нормальных делителей и идеалов коммутативного нётерова кольца.

Пусть G — группа с условием максимальности для нормальных делителей, A и B — ее подгруппы. Через $[A, B]$ обозначена подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[a, b]$, где $a \in A$, $b \in B$; $[A, A] = A^{(1)}$, $[A^{(k-1)}, A^{(k-1)}] = A^{(k)}$. Нормальный делитель $P \subseteq G$ называется первичным, если из $[A, B] \subseteq P$ следует $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$. Радикалом подгруппы A называется подгруппа, порожденная всеми такими нормальными делителями K группы G, что $K^{(n_k)} \subset A$ при некотором n_k. Нормальный делитель называется радикальным, если он является своим собственным радикалом. Нормальные делители $A, B \subseteq G$ называются дополнительными, если $AB = G$.

Доказано, что всякий радикальный нормальный делитель A группы G допускает единственное минимальное представление в виде пересечения первичных нормальных делителей. Если $G = G^{(1)}$ и $A = A^{(1)}$, то подгруппа A является пересечением таких попарно дополнительных подгрупп C_i, что $C_i^{(1)} = C_i$ и C_i неразложима в пересечение попарно дополнительных подгрупп.

Л. М. Глускин

5581. О некоторых разложениях унитарных и параунитарных матриц. Вивье (Sur certaines décompositions des matrices unitaires et para-unitaires. Vivier Marcel), Bull. sci. math., 1956, **80**, juilletaoût, 109—128 (франц.)

Рассматривается группа G_k комплексных матриц θ порядка $n = k + r$, удовлетворяющих соотношению $\theta J \theta^* = J$, где $J = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_r \end{pmatrix}$, I_k, I_r — единичные матрицы порядков k и r. Устанавливается несколько результатов о возможности разложения этих матриц (в частности, унитарных матриц) в произведение матриц специального вида, например в произведение вида $u\Phi v$, где u и v — унитарные матрицы из G_k, а Φ — элемент коммутативной r-параметрической подгруппы из G. Устанавливается также разложимость унитарной матрицы общего положения в произведение матриц из однопараметрических подгрупп специального вида.

М. И. Граев

5582. Числа Бетти простых групп Ли. Колман (The Betti numbers of the simple Lie groups. Coleman A. J.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 3, 349—356 (англ.)

Пусть S — группа Вейля простой компактной группы Ли G ранга n, $R_1, \ldots, R_n$ — порождающие S отражения в сингулярных гиперплоскостях, $R = R_1 \ldots R_n$, n — порядок элемента R. Пусть собственные значения оператора R имеют вид ζ^{m_i} $(i = 1, \ldots, n, \ 0 < m_i < h)$, где ζ — первообразный корень степени h из единицы. Доказывается, что степени свободных образующих кольца многочленов, инвариантных относительно S, равны $m_i + 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, откуда следует, что размерности p_i свободных образующих алгебры когомологий группы G равны $2m_i + 1$. Автор отмечает, что симметричность последовательности чисел $p_{i+1} - p_i$ $(i = 1, \ldots, n-1, \ p_{i+1} > p_i)$ объясняется тем фактом, что собственные значения оператора R попарно сопряжены.

А. Л. Онищик

5583. Гиперметрические группы. Уэстон (Hypermetric groups. Weston J. D.), Portugal. Math., 1955, **14**, 21—25 (англ.)

Топологическая группа называется гиперметрической, если она не метризуема, но существует просто упорядоченная база окрестностей единицы. Показывается, что следующие два свойства топологической группы G эквивалентны: 1) G есть гиперметрическая группа и ее правая и левая униформные структуры совпадают. 2) G изоморфна проективному пределу просто упорядоченного семейства дискретных групп.

E. Michael.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 508.

5584. Некоторые замечания о центральных подгруппах в связных топологических группах. Гофман (Eine Bemerkung über die zentralen Untergruppen in zusammenhängenden topologischen Gruppen. Hofmann Karl Heinrich), Arch. Math., 1958, **9**, № 1-2, 33—38 (нем.)

Пусть R^I — группа вещественных функций на множестве I, M — подгруппа целочисленных функций, $T^I = R^I / M$. Если ввести в R^I топологию, превращающую ее в топологическую группу, то T^I естественным образом становится топологической группой. В частности, если ввести в R^I тихоновскую топологию то T^I называется компактным тором. Если в R^I введена топология, базу открытых множеств которой составляют всевозможные произведения интервалов, то T^I называется некомпактным тором. Если I — множество натуральных чисел и $E \subset R^I$ — гильбертово пространство последовательностей со сходящейся суммой квадратов, то $E/M \cap E$ называется гильбертовым тором. Доказывается, что если H — нормальный делитель связной топологической группы G, изоморфный компактному тору, связной компоненте единицы некомпактного тора или гильбертову тору, то H лежит в центре группы G.

А. Л. Онищик

5585. Нульмерные компактные группы гомеоморфизмов. Андерсон (Zero-dimensional compact groups of homeomorphisms. Anderson R. D.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 1, 797—810 (англ.)

Пусть G — компактная нульмерная группа, M — универсальная кривая. Доказывается, что группу G можно реализовать как сильно эффективную группу гомеоморфизмов кривой M (т. е. стационарная подгруппа каждой точки из M единичная) такую, что пространство орбит в M гомеоморфно M. Если G — бесконечная группа, то ее можно реализовать как такую сильно эффективную группу гомеоморфизмов кривой M, чтобы пространство орбит в M было регулярной кривой. Конечную группу можно всегда реализовать как сильно эффективную группу гомеоморфизмов 1) некоторого трехмерного многообразия со связной границей в трехмерном пространстве, 2) двумерного многообразия (без границы) в трехмерном пространстве.

М. И. Граев

5586. Полугруппы, содержащие минимальные чистые справа комплексы. Лефевр (Demi-groupes admettant des complexes nets à droite minimaux. Lefebvre Pierre), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 4, 393—396 (франц.)

Пусть D — полугруппа, совержащая минимальный чистый справа комплекс (м. ч. сп. к.) K (РЖМат, 1955, 1115). Доказано, что для любого $m \in D$ Km также является м. ч. сп. к. Всякий чистый справа комплекс полугруппы D содержит по крайней мере один м. ч. сп. к. Если R — объединение всех м.ч.сп.к. полугруппы D, то $R = K \cdot D$. Главный правый идеал, порожденный любым

элементом $k \in D$, является минимальным. Обратно, если полугруппа S содержит минимальный правый идеал, то она содержит и м. ч. с п. к. R совпадает с объединением всех минимальных правых идеалов полугруппы D. Если D содержит и минимальный чистый слева комплекс, то R является вполне простым идеалом полугруппы D. Л. М. Глускин

5587. **Конечность размерности некоторых групп преобразований. Монтгомери** (Finite demensionality of certain transformation groups. Montgomery Deane), Illinois J. Math., 1957, **1**, № 1, 28—35 (англ.)

Пусть G — компактная связная топологическая группа, действующая на n-мерном многообразии M, и пусть F — множество точек многообразия M, неподвижных при всех преобразованиях из группы G. Доказывается, что если $\dim F \geqslant n-1$, то $F = M$. Отсюда выводится, что всякая локально компактная эффективная группа преобразований многообразия конечномерна. А. Л. Онищик

5588. **О мощностях, связанных с локально компактными группами. Хуляницкий** (On cardinal numbers related with locally compact groups. Hulanicki A.), Bull. Acad. polon. sci. sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 2, 67—70, V (англ.; рез. русск.)

Пусть G — локально компактная группа, g — мощность множества ее элементов, $\theta(G)$ — минимальная мощность множества открытых множеств в G, имеющих в пересечении один элемент. Доказывается, что $G \geqslant 2^{\theta(G)}$; если же G есть объединение $2^{\theta(G)}$ компактных подмножеств, то $g = 2^{\theta(G)}$. М. И. Граев

5589. **Характеристика нётеровых целозамкнутых полугрупп. Мори** (Une caractérisation des demi-groupes noethériens intégralement clos. Maury Guy), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 3, 254—255 (франц.)

Нётеровой полугруппой называется коммутативная полугруппа D с единицей, удовлетворяющая условию обрыва возрастающих цепей идеалов. Пусть Z — подполугруппа всех сократимых элементов из D, D_Z — полугруппа частных полугруппы D относительно Z (РЖМат, 1957, 2929). Элемент $x \in D_Z$ называется целым над D, если существует такой элемент $a \in Z$, что $x^n a \in D$ при любом натуральном n. Полугруппа D называется целозамкнутой, если она содержит все элементы $x \in D_Z$, целые над D. Даны две теоремы, содержащие необходимые и достаточные условия, при которых нётерова полугруппа является целозамкнутой. Доказательств статья не содержит. Л. М. Глускин

5590. **О матричных полугруппах. Глускин Л. М.**, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, **22**, № 3, 439—448

Через $G_n^r(F)$ обозначается совокупность всех квадратных матриц над телом F порядка n, ранг которых не превосходит r. Рассматриваемая относительно умножения матриц совокупность $G^r{}_n(F)$ является полугруппой. Для того чтобы некоторая полугруппа S была изоморфна полугруппе $G_n^n(F)$, необходимо и достаточно, чтобы она обладала плотно вложенным идеалом, изоморфным с $G_n^{(1)}(F)$. Строение полугруппы $G_n^1(F)$ вполне описывается, поскольку она оказывается вполне простой полугруппой.

Для изоморфизма полугрупп $G^r{}_n(F)$ и $G^s{}_m(H)$ необходимо и достаточно, чтобы тела F и H были изоморфны и $m = n$, $r = s$. При этом всякий изоморфизм может быть осуществлен при помощи сопряжения некоторой обратимой матрицей. Отсюда, в частности, вытекает устройство всех автоморфизмов полугруппы $G^r{}_n(F)$. Они все имеют характер внутренних автоморфизмов. Е. С. Ляпин

5591. **Полугруппа, подполугруппы которой образуют цепь. Тамура** (On a monoid whose submonoids form a chain. Tamura Takayuki), Токусима дайгаку гакугэй киё (Сидзэн кагаку), J. Gakugei Tokushima Univ. Natur. Sci., 1954, **5**, Dec., 8—16 (англ.)

Г-полугруппой называется полугруппа, структура подполугрупп которой образует цепь. Доказано, что единственными бесконечными Г-полугруппами являются группы типа p^∞ по всевозможным простым числам p. Конечная полугруппа M будет Г-полугруппой тогда и только тогда когда она является циклической полугруппой порядка n, удовлетворяющей следующим условиям: 1) наибольшая группа G полугруппы M имеет порядок p^m, где p — простое число, 2) $p^m \leqslant n \leqslant p^m + 1$, если $p = 2$ $^m \leqslant n \leqslant p^m + 2$, если $p \neq 2$. В. И. Ушаков

5592. **О полных полугруппах. Вигандт** (On complete semi-groups. Wiegandt Richard), Acta scient. math., 1958, **19**, № 1-2, 93—97 (англ.)

Подполугруппа N полугруппы F называется нормальной слева, если существует счетное множество таких элементов $a_i \in F$, что $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} a_i N$, $a_i N \cap a_k N = \emptyset$ при $i \neq k$. Полугруппа F с единицей, удовлетворяющая обоим законам сокращения, называется полной, если F является прямым сомножителем во всякой своей надполугруппе S с единицей, являющейся полугруппой с сокращением и содержащей F в качестве нормальной слева подполугруппы.

Доказано, что полугруппа с сокращением, содержащая единицу, полна тогда и только тогда, когда всякий ее автоморфизм — внутренний, а центр состоит из единицы. Эта теорема обобщает результат Бера (Baer R., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, **52**, 501—506). Доказательство является видоизменением доказательства цитированной статьи Бера. Л. М. Глускин

5593. **О квазигруппах, ассоциированных с группами. Фриджерио** (Sui quasi gruppi associati ai gruppi. Frigerio Alberto), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1958, **28**, № 1, 107—111 (итал.)

Пусть G — группа, a и b — ее произвольные элементы. Бинарная операция O определяется формулой $aOb = ab^{-1}$. Относительно этой операции совокупность элементов группы G образует квазигруппу, которую автор называет ассоциированной с группой G.

Основным результатом работы является теорема 1: Для того чтобы квазигруппа Q была ассоциирована с некоторой группой G, необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) Q содержит такой элемент u, что $aOb = u$ в том и только в том случае, когда $a = b$; 2) для произвольных элементов a, b, c из Q имеет место $(aOc)O(bOc) = aOb$.

Отмечается справедливость для квазигрупп, ассоциированных с конечными группами, теорем, аналогичных теоремам Лагранжа и Жордана-Гёльдера (для произвольной конечной квазигруппы теорема, аналогичная теореме Лагранжа, не имеет места). В. К. Туркин

5594. **Подквазигруппы конечной квазигруппы. Уолл** (Sub-quasigroups of finite quasigroups. Wall Drury W.), Pacif. J. Math., 1957, **7**, № 4, 1711—1714 (англ.)

Изучаются отношения между порядком конечной квазигруппы и порядками ее подквазигрупп. Пусть Q — квазигруппа порядка n и R, S — две ее подквазигруппы порядков r и s. Тогда $n \geqslant r + s + \max(r, s) - 2p$, где p — порядок пересечения P подквазигрупп R и S (теорема 2). Доказывается еще следующая теорема 3: Если $n = r + s + \max(r, s) - 2p$, равенство $r = s$ имеет место тогда и только тогда, когда подмножество $T = PU[Q \setminus (RUS)]$ является подквазигруппой. Рассматри-

вается частный случай, когда подквазигруппы R и S не пересекаются. В таком случае, если R и S имеют одинаковый порядок s, то верно неравенство $n \geqslant 3s$. Таким образом для $m = 1,2$ имеет место неравенство

$$n \geqslant (m+1)s, \qquad (1)$$

где n — порядок квазигруппы Q, m — число непересекающихся подквазигрупп порядка s (для $m = 1$ неравенство (1) доказано Гаррисоном (Garrison G. R., Ann. Math., 1940, **41**, 474—487). Утверждается (без доказательства), что в общем случае неравенство (1) может и не иметь места, например для $m = 3$. В. Д. Белоусов

5595. Квазигруппы, автоморфные по отношению к линейной группе и конечная геометрия. Сад (Quasigroupes automorphes par le groupe linéaire et géométrie finie. Sade Albert), J. reine und angew. Math., 1958, **199**, № 1-2, 100—120 (франц.)

Рассматриваются квазигруппы Q, определенные на множестве Z/n — кольце вычетов по модулю n. Совокупность всех подстановок $x \to mx + h$, где $(m, n) = 1$, h — любой элемент из Z/n образуют группу — линейную группу L_n. Если любая подстановка из линейной группы является автоморфизмом квазигруппы Q, то такая квазигруппа называется автоморфной по отношению к линейной группе. Порядок квазигруппы Q, автоморфной по отношению к L_n, всегда нечетное число.

Доказывается, что операция умножения $\times$ в квазигруппе Q, автоморфной по отношению к L_n, имеет вид

$$a \times b = (a-b)g(d) + b (\mathrm{mod}\, n),$$

где $d = (a-b, n)$, g — произвольная функция, определенная на множестве делителей числа n и принимающая значения в Z/n, такая, что $(g, n) = (g-1, n) = 1$. Примером квазигруппы, автоморфной по отношению к L_n, может служить следующая дистрибутивная квазигруппа (обозначаемая в дальнейшем QL):

$$a \times b = ga + (1-g)b (\mathrm{mod}\, n),$$

где g — фиксированный элемент из Z/n. Находится число всех квазигрупп Q порядка n, автоморфных по отношению к L_n, а также число всех квазигрупп изоморфных данной квазигруппе Q.

Подмножество $P = \{0, d, 2d, 3d, \ldots, n-d\} \subset Q$, где d/n является подквазигруппой квазигруппы Q; находятся необходимые и достаточные условия, чтобы подквазигруппа P была нормальным делителем. Доказывается теорема: Дистрибутивная квазигруппа QL порождается двумя элементами 0, 1. Группа автоморфизмов квазигруппы QL совпадает с группой L_n.

Во второй части работы изучаются геометрические вопросы, связанные с квазигруппой QL. Определяется точка, как упорядоченная тройка координат $x, y, z \in QL$, причем $z = x \times y$. Совокупность всех точек вида $(x + \alpha t, y + \beta t, z + \gamma t)$, где $t = 0, 1, \ldots, n-1$ и $\alpha, \beta, \gamma \in QL$, называется прямой, если $(\alpha, \beta, \gamma, n) = 1$. Элементы α, β, γ называются направляющими параметрами. Во множестве Q_g всех точек, определенных на QL, вводится операция умножения $\times$ следующим образом: $(x, y, z) \times (x', y', z') = (x \times x', y \times y', z \times z')$. Относительно этой операции, множество Q_g образует медиальную квазигруппу, т. е. $(a \times b) \times (c \times d) = (a \times c) \times (b \times d)$ для любых $a, b, c, d \in Q_g$. Доказывается, что точки некоторой прямой образуют нормальный делитель в квазигруппе Q_g, изоморфный квазигруппе QL.

Доказывается ряд теорем относительно числа точек пересечения прямых, числа прямых, проходящих через данную точку, и порядков различных групп и квазигрупп, связанных с QL. Рассматриваются также автотопии (изотопные отображения квазигруппы QL на себя), состоящие из подстановок группы L_n, названные автором гомографиями, так как они оставляют инвариантным параллелизм прямых. В. Д. Белоусов

5596. Группоиды с геометрической группой автоморфизмов и квазигруппы «эндо». Сад (Groupoides automorphes par le groupe géométrique et quasigroupes «endo». Sade A.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 2, 294—320 (франц.)

Пусть G — группоид, т. е. множество с однозначной бинарной (быть может, не всюду определенной) операцией; M — некоторое множество вещественных чисел, причем для любых $x \in G$; $m \in M$ определено произведение $xm \in G$. Группоид G называется группоидом с геометрической группой автоморфизмов, если для любого $m \in M$ отображение $\varphi_m x = xm (x \in Q)$ является автоморфизмом группоида G. Группоид G называется группоидом „эндо", если M — полугруппа и φ_m — эндоморфизм G при любом $m \in M$. Рассматриваются группоиды „эндо" G, определенные на множестве M, и группоиды с геометрической группой автоморфизмов, определенные на множестве Z/n целых чисел, взаимно простых с n (причем для последних $M = Z/n$). Если n обладает первообразным корнем, то группоид с геометрической группой автоморфизмов частично изоморфен некоторому группоиду с циклической группой автоморфизмов (РЖМат, 1958, 2751). Исследован ряд свойств введенных понятий, большей частью в случае, когда G — квазигруппа: делители, нормальные делители, объединения, разложения, p-квазигруппы и т. д. Л. М. Глускин

5597 К. Теория групп. Цассенхаус (The theory of groups. 2nd ed. Zassenhaus Hans. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1958, IX, 265 pp., ill., 26.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **A**, № 28, 1985 (англ.)

5598 К. Теория групп. Шпехт (Gruppentheorie. Specht Wilhelm. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1956, VII, 457 S., 69, 60DM) (нем.)

Книга посвящена общей теории групп и состоит из трех частей: Основы общей теории групп (ч. 1), Свободные группы свободные произведения групп, абелевы группы (ч. 2); Нормальные последовательности, разрешимые и нильпотентные группы, p-группы и силовские подгруппы, теория расширений групп (ч. 3).

В ч. 1 в компактной и четкой форме дается изложение общих предложений теории групп, непосредственно связанных с основными определениями. Подробно излагаются свойства групп с операторами.

Ч. 2 содержит теорию свободных групп и свободных произведений групп, а именно определяющие соотношения группы, теорему о подгруппах свободных групп, вполне инвариантные подгруппы свободных групп, высшие коммутаторные подгруппы, представление групп в качестве фактор-групп, существование свободных произведений произвольных групп (вообще говоря, с операторами), теорему о строении их подгрупп и ее следствия (в частности, теорему об изоморфизме свободных разложений группы), свободные разложения групп с конечным числом образующих элементов, свободное произведение с объединенной подгруппой; теорию прямых произведений групп: свойства прямых произведений и теорему о существовании прямых произведений и теорему о существовании прямых произведений произвольных групп (вообще говоря, с операторами), связь прямых разложений групп (вообще говоря, с операторами) с их эндоморфизмами, разлагающие эндоморфизмы и условия существования общих продолжений у прямых разложений группы, прямые множители с общим дополнительным множителем, группы, для которых любые два прямых разложения имеют изоморфные продолжения (в частности, общее продолжение), существование центрально изоморфных продолжений, прямые

разложения с неразложимыми множителями, композит минимальных нормальных делителей группы. В последней, гл. 4, содержится теория абелевых групп; а именно, максимальная полная подгруппа абелевой группы, первая теорема Прюфера и ее следствия, вторая теорема Прюфера, теорема Ульма, абелевы группы без кручения (некоторые свойства свободных абелевых групп и вложимость абелевых групп без кручения в прямые произведения рациональных групп), смешанные абелевы группы (теорема Фомина и абелевы группы с конечным числом образующих элементов).

В ч. 3 изложены свойства нормальных последовательностей в произвольных группах (вообще говоря, с операторами), обобщенная теорема Шрейера, композиционные последовательности и обобщенная теорема Жордана—Гёльдера, группы с возрастающими разрешимыми рядами, RK-группы (разрешимые, по терминологии автора), разрешимые группы zA-группы (нильпотентные, по терминологии автора), нильпотентные группы, p-группы, силовские подгруппы, свойства силовских подгрупп конечных разрешимых групп, свойства силовских подгрупп локально нормальных групп. Здесь, кроме отмеченных уже обобщений теорем Шрейера и Жордана—Гёльдера, наиболее выделяются следующие известные предложения: теорема о локальной конечности периодических групп с возрастающим разрешимым рядом и ее следствия, теорема о том, что всякая zA-группа является RK-группой, обобщенная теорема Вендта, теорема о том, что всякая группа с нормализаторным условием является S-группой, теорема о разрешимости локально разрешимых групп с условием минимальности для подгрупп, теорема Дицмана о центре p-групп и ее следствия, теорема о существовании возрастающего центрального ряда у локально конечных p-групп, с условием минимальности для подгрупп, теорема о разложимости периодических zA-групп в прямое произведение p-групп, а также ряд теорем о $\widetilde{N}$-группах.

Последняя глава почти целиком посвящена изложению теории расширений групп по Беру.

Следует отметить, что содержание книги в основных его частях существенно перекрывается содержанием книги А. Г. Куроша (РЖМат, 1954, 3255), причем изложение целого ряда вопросов у автора близко к изложению их у А. Г. Куроша, а иногда по существу даже не отличается от него. Однако автор ни в какой форме не оговаривает этого и ограничивается лишь упоминанием книг А. Г. Куроша при перечислении существующих учебников и монографий по теории групп. Следует отметить также, что в реферируемой книге не всегда указываются авторы, результаты исследований которых в ней излагаются. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться хотя бы к упоминавшимся выше теоремам.

В отличие от книги А. Г. Куроша реферируемая книга касается лишь небольшой части исследований советских математиков в области абелевых, нильпотентных и разрешимых групп, а также в области свободных и прямых произведений.

Из многочисленных результатов этих исследований автор выбрал лишь несколько результатов, имеющих более чем десятилетнюю давность. С. Н. Черников

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

5599. Теорема о среднем значении для квадратичных полей. Эйуб (A mean value theorem for quadratic fields. Ayoub Raymond G.), Pacif. J., Math., 1958, **8**, № 1, 23—27 (англ.)

Число $H(x)$ целых идеалов алгебраического расширения K степени k рационального поля, нормы которых не превосходят x, представляется (Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, М., Изд-во ин. лит., 1947, стр. 81) асимптотической формулой

$$H(x) = \alpha x + \Delta_k(x),$$

где $\alpha > 0$ — структурная константа,

$$\Delta_k(x) = 0\left(x^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

Пусть K — квадратичное поле и β — наименьшее число такое, что

$$\frac{1}{x}\int_0^x \Delta^2(t)\,dt = 0\left(x^{2\beta+\varepsilon}\right),$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $\Delta(x) = \Delta_2(x)$.

Тогда, пользуясь методом Титчмарша (Titchmarsh, Quart. J. Math., Oxford, 1938, **9**, 216—220), автор доказывает, что $\beta = \frac{1}{4}$. Б. М. Уразбаев

5600. Редукция поля алгебраических функций по простому модулю в поле констант. Неринг (Reduction of an algebraic function field modulo a prime in the constant field. Nering Evar D.), Ann. Math., 1958, **67**, № 3, 590—606 (англ.)

Доказывается следующий результат: Пусть K — поле алгебраических функций одной переменной над полем k, $F = k(x)$, где $x \in K$ — трансцендентный над k элемент. Пусть h — дискретная неархимедова оценка поля k и пусть в K имеет место расщепление $h = \Pi H_i^{e(H_i)}$. Обозначим через K_l поле $K(\mathrm{mod}H_i)$ и через $\bar{k}$ поле $k(\mathrm{mod}h)$; пусть k_l — поле констант для K_l, $r_l = \deg(k_l : \bar{k})$. Тогда жанры g, g_l полей K, K_l связаны соотношением

$$g - 1 = \Sigma r_l e(H_l)(g_l - 1) + \rho,$$

где 2ρ = степени над $\bar{F} = \bar{k}(x)$ нормы некоторого дивизора, называемого кондуктором поля K.

Этот результат связан с задачей установления связи между жанром кривой, определенной над полем $k(\lambda) = k(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, и кривых, на которые она распадается при специализации λ в алгебраическом расширении поля k. В. В. Морозов

5601. О модулярных функциях арифметических полей высшей степени. Хёйслейн (Über die Modulfunktionen arithmetischer Körper höheren Grades. Häuslein Günter), Math. Nachr., 1957, **16**, № 2, 73—78 (нем.)

При исследовании арифметических или алгебраических полей, т. е. полей, порожденных присоединением конечного числа элементов, важную роль играют два вида трансцендентных функций: модулярные функции и дзета-функции. В реферируемой работе вводятся модулярные функции для полей алгебраических функций от одного неизвестного над полем алгебраических чисел. Соответствующие модулярные функции для полей алгебраических функций над полем рациональных чисел были введены Келером. И. И. Пятецкий-Шапиро

5602. Инвариантные семейства дивизоров конечных групп преобразований Кремоны. Энгель (Invariante Divisorenscharen bei endlichen Gruppen von Cremonatransformationen. Engel Wolfgang), J. reine und angew. Math., 1956, **196**, № 1-2, 59—66 (нем.)

Рассматриваются преобразования Кремоны с двумя переменными, т. е. такие автоморфизмы поля $K_0(x, y)$ над полем комплексных чисел K_0, при которых K_0 переходит в себя. Исследуются инвариантные линейные

семейства дивизоров конечных групп преобразований Кремоны, причем доказывается, что существует лишь конечное число типов этих семейств. Другими методами аналогичные результаты были получены рядом исследователей, начиная с Вимана (Wiman A., Math. Ann., 1897, **48**, 195—240). Метод используемый в данной работе, основан на следующей теореме: Каждая конечная группа преобразований Кремоны обладает инвариантным линейным семейством дивизоров рода 0 или 1. В. К. Туркин

5603. Центральные расширения конечных полей алгебраических чисел. Фрёлих (Central extensions of finite algebraic number fields. Frohlich A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 28 (англ.)

5604. Об одном типе универсальных форм в дискретно нормированных полях. Шварц (On a type of universal forms in discretely valued fields. Schwarz Stefan), Acta scient. math., 1956, **17**, № 1-2, 5—29 (англ.)

Рассматривается представление чисел над полным дискретно (неархимедовски) нормированным полем K с конечным полем классов вычетов двух типов:

A. K — $\mathfrak{p}$-адическое замыкание поля алгебраических чисел $R(\nu)$, $K = R(\nu)_{\mathfrak{p}}$, характеристики 0.

B. K — поле формальных степенных рядов переменной x с коэффициентами из конечного поля $GF(p^f)$ из p^f элементов.

Доказываются следующие предложения:

1. Пусть K — поле типа A или B. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{\delta+1}$ — такие целые числа поля K, что $a_1 a_2, \ldots, a_{\delta+1} \not\equiv 0\ (\mathfrak{p})$, $k > 1$ — целое рациональное число, $(\kappa, p) = 1$, $1 \leqslant (k, p^f - 1) = \delta \leqslant p - 1$. Тогда для любого $a \in K$ уравнение

$$a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \ldots + a_{\delta+1} x_{\delta+1}^k = a$$

разрешимо в поле K.

2. Пусть $K = R(\nu)$ — простое алгебраическое расширение поля рациональных чисел R, $\mathfrak{p}$ — простой идеал степени $f \geqslant 1$, $N(\mathfrak{p}) = p^f$, $\mathfrak{p} \mid p$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — такие целые числа поля K, что

$$a_1, a_2 \ldots a_s \not\equiv 0\ (\mathfrak{p}),\ \delta = (k,\ p^f - 1) \leqslant p - 1,$$

$$s = \frac{p^{f(t+1)} - 1}{pf - 1}\,\delta.$$

Тогда для любого целого $b \in K$ сравнение

$$b \equiv a_1 x_1^k + a_2 x_2^k + \ldots + a_s x_s^k\ (\mathfrak{p}^{t+1})$$

имеет решение в целых числах поля K.

Дается обобщение предложения 1 для того случая, когда K — поле типа A, а показатель k делится на p. Б. М. Уразбаев

5605. О построении полей алгебраических чисел с данной разрешимой группой Галуа. Шафаревич (Construction of fields of algebraic numbers with given solvable Galois group. Šafarevič I. R.), Amer. Math. Soc. Translat., 1956, **4**, № 185—237 (англ.)

5606. Об основной теореме теории Галуа для тел. Боревич З. И. Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **166**, 221—226

Новое изложение основной теоремы теории Галуа для конечных расширений тел. Оно существенно проще, чем первые доказательства этой теоремы, данные Джейкобсоном (Jacobson N. A., Amer J. Math., 1947, **64**, № 1, 27—36) и Картаном (Cartan H., Ann. Ecole norm., 1947, **64**, № 1, 59—77). Упрощение достигается отчасти введением понятия ранга для множеств автоморфизмов некоторого тела. Благодаря этому в формулировке основной теоремы нет необходимости различать внутренние и внешние автоморфизмы.

Пусть K и L — два тела. Совокупность гомоморфизмов аддитивной группы тела L в аддитивную группу тела K рассматривается как левый модуль над K; модуль обозначается через $R = R(L, K)$. Если A — множество гомоморфизмов L в K, то под рангом A понимается ранг подмодуля $\{A\}$ модуля R, порожденного множеством A. Пусть, в частности, $L = K$ и $R = R(K, K)$. Группа автоморфизмов G тела K называется полной, если она содержит все автоморфизмы, содержащиеся в $\{G\}$. Основная теорема теории Галуа для конечных расширений тел устанавливает двойственное взаимно однозначное соответствие между полными группами автоморфизмов конечного ранга тела K и подтелами $P \subset K$, для которых правый ранг K/P конечен и которые являются подтелами инвариантов некоторой группы автоморфизмов тела K.

Доказательство указанной основной теоремы аналогично известному доказательству Артина (Artin E., Galois theory. Notre Dame, 1946) основной теоремы теории Галуа для классического случая конечных расширений полей. Л. А. Калужнин

5607. О порождающих элементах расширений Галуа тел. I. Нагахара. II. Мория, Нагахара (On generating elements of Galois extensions of division rings. I. Nagahara Takasi. II. Moriya Mikao, Nagahara Takasi), Math. J. Okayama Univ., 1957, **6**, № 2, 181—190; **7**, № 1, 89—94 (англ.)

Доказываются различные теоремы о существовании одного или двух примитивных элементов для конечных расширений тел. Эти теоремы являются уточнениями основной теоремы работы Нагахара (РЖМат, 1959, 4495). Требование 3) (о сепарабельности центра $V_K(L)$ над центром L) оказывается излишним.

Устанавливаются достаточные условия для того, чтобы расширение продолжалось в точности одним примитивным элементом. Например: Если K — конечное расширение Галуа тела L и если централизатор $V_K(L)$ тела L в K абелев, то $K = L(k)$ для подходящего $k \in K$. Л. А. Калужнин

5608. Заметка о расширениях Галуа тел. Нобусава (A note on Galois extensions of division rings. Nobusawa Nobuo), Math. J. Okayama Univ., 1957, **7**, № 2, 179—183 (англ.)

Заметка относится к теории Галуа тел (РЖМат, 1956, 6438; 1957, 2938, 6880). В ней обобщается известная теорема классической теории Галуа полей.

Пусть тело P — локально конечное расширение Галуа тела Ф. Для всякого подтела $T \subset P$ обозначим через $V(T)$ централизатор T в P. Пусть Λ — тело, содержащееся между Ф и $V(V(\Phi))$: $\Phi \subseteq \Lambda \subseteq V(V(\Phi))$ и являющееся расширением Галуа тела Ф. Пусть далее Σ — любое расширение тела Ф, содержащееся в P. Тогда $\Lambda\Sigma$ (тело, порожденное Λ и Σ) есть расширение Галуа тела Σ. Группа Галуа $\Lambda\Sigma$ над Σ — внешняя группа автоморфизмов (группа автоморфизмоз тела T над телом Π называется внешней, если она не содержит внутренних автоморфизмов тела T, за исключением тождества), изоморфная группе Галуа расширения $\Lambda/\Sigma \cap \Lambda$. Л. А. Калужнин

5609. О сопряженных элементах в телах. Фейт (On conjugates in division rings. Faith Carl C.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 3, 374—380 (англ.)

Пусть D — некоторое тело, D^* — его мультипликативная группа и D_1 — собственное подтело, не лежащее в центре. Доказывается, что совокупность H таких элементов $d \in D^*$, для которых $d^{-1} D_1 d \subset D_1$, образует подгруппу бесконечного индекса группы D^*. Это утверждение обобщает известный результат Картана-Брауэра-Хуа, устанавливающий, что $H \neq D^*$. А. И. Ширшов

5610. Композиция алгебр (алгебры, опирающиеся на другую алгебру). Фадини (Composizione delle

algebre. (Algebre appoggiate ad un'altra algebra) Fadini Angelo), Giorn. mat. Battaglini, 1957, 85, № 2, 172—187 (итал.)

Автор называет алгеброй 1-го типа алгебру в обычном смысле этого слова, в которой координаты элементов принадлежат некоторому произвольному полю. Алгеброй 2-го типа, опирающейся на некоторую алгебру 1-го типа, автор называет множество (удовлетворяющее некоторой системе аксиом) элементов, координаты которых являются элементами упомянутой алгебры 1-го типа. Аналогичным образом вводится понятие алгебры n-го типа, опирающейся на алгебру $(n-1)$-го типа. Система аксиом приведена только для алгебры 2-го типа. Алгебра 2-го типа и порядка n, опирающаяся на алгебру 1-го типа и порядка m, является алгеброй 1-го типа и порядка nm. Приведены примеры алгебр различных типов. В. К. Туркин

5611. Теория Галуа простых колец. II. Томинага. III. Нобусава, Томинага (Galois theory of simple rings. II. Tominaga Hisao, III. Nobusawa N., Tominaga H.), Math. J. Okayama Univ., 1957, **6**, № 2, 153—170; **7**, № 2, 163—167 (англ.)

Различные уточнения и обобщения результатов I части (РЖМат, 1959, 4496). В частности, локальная конечность группы $\mathfrak{G}(R/S)$ заменяется существенно более слабым условием локальной конечномерности. Группа автоморфизмов $\mathfrak{H}$ кольца R называется локально конечномерной, если для всякого подмножества F в R множество $F\mathfrak{H}$ (т. е. множество образов элементов из F при всех автоморфизмах из $\mathfrak{H}$) порождает над S кольцо конечного левого ранга над S. В предположении локальной конечности тотальной группы $\mathfrak{G}(R/S)$ доказывается существование соответствия Галуа, причем регулярность подгрупп и промежуточных колец заменяется несколько более жестким требованием. Л. А. Калужнин

5612. Изоморфизм числовых колец. Скрягo А. М., Сб. студ. работ. Краснодарск. гос. пед. ин-т, 1957, вып. 2, 193—197

При некотором дополнительном предположении доказывается, что при изоморфизме числовых колец рациональные числа соответствуют сами себе. Легко видеть, что это утверждение является тривиальным следствием изоморфизма полей отношений изоморфных областей целостности (Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ГТТЛ, 1947, т. 1, § 13). В конце статьи сформулирован вызывающий недоумение вопрос о соответствии иррациональных чисел изоморфных колец. А. И. Ширшов

5613. Кольца с ограниченным условием минимальности. Герендон (Anneaux avec condition minimale restreinte. Guérindon J.), Sémin. P. Dubreil et Ch. Pisot. Fac. sci. Paris, 1955—1956, **9**, № 17, 1—11 (франц.)

Рассматриваются коммутативные кольца с единицей. Приводятся упрощенные доказательства, принадлежащие Коэну (Cohen J., Duke Math. J., 1950, **17**, 27—41), теорем установленных Круллем, Грелем, Акицуки, Кубо, Мацусита и Мори. Эти доказательства одновременно улучшают результаты. Говорят, что кольцо A является кольцом с ограниченным условием минимальности, если всякий собственный гомоморфный образ A/I (I — ненулевой идеал) будет кольцом с условием минимальности. В первых двух параграфах даются различные эквивалентные определения колец с ограниченным условием минимальности и рассматриваются некоторые задачи, связанные с расширением таких колец. Далее даются простые характеристики областей Дедекинда и рассматривается одно обобщение таких колец, принадлежащие Фуксу (арифметические кольца). Наконец, рассматривается связь между кольцами конечного ранга (кольцо имеет ранг n, если каждый его идеал порождается n элементами) и кольцами с ограниченным условием минимальности. В. А. Андрунакиевич

5614. О пересечении $\bigcap \mathfrak{a}_\alpha$ идеалов $\mathfrak{a}_\alpha$. Мори (Über den Durchschnitt $\bigcap \mathfrak{a}_\alpha$ der ideale $\mathfrak{a}_\alpha$. Masazo Sono zum 70 Geburtstag gewidmet. Mori Shinziro), Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, 1955, **A29**, № 2, 79—88 (нем.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — коммутивное кольцо, вообще говоря, без единицы, в котором каждый идеал представим в виде пересечения конечного числа слабо примарных идеалов. В кольце $\mathfrak{R}$ рассматривается пересечение $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$, где $\mathfrak{b}$ — некоторый данный идеал, а $\mathfrak{a}_\alpha$ — все идеалы кольца $\mathfrak{R}$, радикалы которых совпадают с радикалом данного идеала $\mathfrak{a}$. В случае, когда кольцо $\mathfrak{R}$ удовлетворяет условию максимальности, в качестве $\mathfrak{a}_\alpha$ можно брать лишь все степени $\mathfrak{a}^i$ идеала $\mathfrak{a}$. Пересечение $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ состоит из тех и только тех элементов x, которые удовлетворяют соотношению $(\mathfrak{a}(x), \mathfrak{b}) = ((x), \mathfrak{b})$. Основная теорема: Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два данных идеала кольца $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_n$ — несократимое представление идеала $\mathfrak{b}$ в пересечение слабо примарных идеалов, причем $\mathfrak{q}_{l+1}, \mathfrak{q}_{l+2}, \ldots, \mathfrak{q}_n$ — те из примарных идеалов $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_n$, которые удовлетворяют условиям: фактор-кольцо $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}_i$ обладает единицей и $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_i) = \mathfrak{R}$ $(i = l+1, \quad l+2, \ldots, \quad n)$, то $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \quad \mathfrak{b}) = \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l$. Эта теорема является обобщением теоремы Зариского (Zariski O., Summa Bras. Math., 1946, **1**, 169—195). Доказывается также, что если $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \ldots, \mathfrak{p}_m$ — все простые идеалы, соответствующие идеалу $\mathfrak{a}$, и $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \cap \mathfrak{b}_2$, то

$$\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \left[\bigcap_{i=1}^m \left\{\bigcap_\alpha \left(\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}_1\right)\right\}\right] \cap \left[\bigcap_{i=1}^m \left\{\bigcap_\alpha \left(\mathfrak{p}_{i\alpha}, \mathfrak{b}_2\right)\right\}\right]^2,$$

где $\mathfrak{p}_{i\alpha}$ — все идеалы кольца $\mathfrak{R}$, радикалом которых является простой идеал $\mathfrak{p}_i$.

Далее рассматривается соотношение между пересечениями $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b})$ и $\bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b})$, и доказывается, что в кольце $\mathfrak{R}$ тогда и только тогда для любых двух идеалов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ имеет место соотношение $\bigcap_\alpha (\mathfrak{a}_\alpha, \mathfrak{b}) = \bigcap_i (\mathfrak{a}^i, \mathfrak{b})$, когда для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ и любого слабо примарного идеала $\mathfrak{q}' \neq \mathfrak{R}$ либо $\bigcap_i (\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}') = \mathfrak{q}'$, либо $\bigcap_i (\mathfrak{p}^i, \mathfrak{q}') = \mathfrak{R}$, и фактор-кольцо $\mathfrak{R}/\mathfrak{q}'$ обладает единицей. Е. Г. Шульгейфер

5615. Об алгебраическом обосновании теории локальных дилатаций. Норткотт (On the algebraic foundations of the theory of local dilatations. Northcott D. G.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 22, 267—285 (англ.)

Рассматривается регулярное локальное кольцо Q, размерности d с максимальным идеадом $\mathfrak{m}$ и некоторый простой идеал $\mathfrak{p}$ размерности δ $(0 \leqslant \delta \leqslant d-1)$ фактор-кольцо $Q/\mathfrak{p}$ по которому также является регулярным локальным кольцом. Кольцо $Q_\mathfrak{p}$ обозначается через Q_0.

Теорема 1. Произвольный минимальный базис простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца Q состоит из $d-\delta$ элементов, и его можно дополнить до некоторого минимального базиса максимального идеала $\mathfrak{m}$. Кроме того, кольцо Q_0 является регулярным локальным кольцом, и каждый минимальный базис идеала $\mathfrak{p}$ является также минимальным базисом максимального идеала $\mathfrak{m}_0$ кольца Q_0.

Фиксируется некоторый минимальный базис $(u_{\delta+1}, \ldots, u_d)$ простого идеала $\mathfrak{p}$, выделяется некоторый элемент $u = u_d$ этого базиса и строится кольцо $R^{(u)} = Q[\omega_{\delta+1}, \omega_{\delta+2}, \ldots, \omega_d]$, где $\omega_i = u_i/u$. Доказывается, что $R^{(u)}\mathfrak{p} = R^{(u)}u$ и если $(u_1, u_2, \ldots, u_\delta, u_{\delta+1}, \ldots, u_d)$ — некоторый минимальный базис максимального идеала $\mathfrak{m}$ кольца Q, то $R^{(u)}u_1 + \ldots + R^{(u)}u_i + R^{(u)}u$ для любого i, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant i \leqslant \delta$, является простым идеалом кольца $R^{(u)}$, пересечение которого с кольцом Q совпадает с простым идеалом $Qu_1 + \ldots + Qu_i + \mathfrak{p}$ кольца Q.

Далее предполагается, что размерность δ простого идеала $\mathfrak{p}$ не превышает $d-2$. Пусть $\overline{\mathfrak{P}}_{(x)}$ — некоторый простой однородный идеал кольца $K[X_{\delta+1}, \ldots, X_d]$ ($K = Q/\mathfrak{m}$) неотрицательной проективной размерности. Рассматривается кольцо $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}$ всех дробей вида $\Phi(u_{\delta+1}, \ldots, u_d)/\Psi(u_{\delta+1}, \ldots, u_d)$, где Φ и Ψ — некоторые формы одной и той же степени с коэффициентами из кольца Q и $\overline{\Psi}(X_{\delta+1}, \ldots, X_d) \notin \overline{\mathfrak{P}}_{(x)}$ (через $\overline{\Psi}(X_{\delta+1}, \ldots, X_d)$ обозначается однородная форма, получающаяся из однородной формы $\psi(u_{\delta+1}, \ldots, u_d)$ путем замены элементов $u_{\delta+1}, \ldots, u_d$ переменными $X_{\delta+1}, \ldots, X_d$, а коэффициентов формы Ψ — их образами в поле K). Кольцо $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}$ есть локальное кольцо отношений кольца $R^{(u)}$ относительно некоторого его простого идеала $\mathfrak{P}$, содержащего идеал $R^{(u)}\mathfrak{m}$, и называется оно возникающим (или производным) из кольца Q посредством дилатации относительно простого идеала $\mathfrak{p}$. Отмечается, что построение кольца $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}$ не зависит от выбора минимального базиса простого идеала $\mathfrak{p}$. Локальное кольцо $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}$ регулярно, и если проективная размерность идеала $\mathfrak{P}_{(x)}$ кольца $K[X_{\delta+1}, \ldots, X_d]$ равна ρ, то $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}$ является регулярным локальным кольцом размерности $d-\rho$. В кольце $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}$ идеалы $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}\mathfrak{p}$ и $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}\mathfrak{m}$ являются простыми идеалами, фактор-кольца по которым являются регулярными локальными кольцами размерности $d-\rho-1$ и $d-\delta-\rho-1$ соответственно.

Доказываются следующие утверждения.

1. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми локальными кольцами $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}$, возникающими из кольца Q посредством дилатации относительно данного простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца Q и всеми неприводимыми подмногообразиями проективного пространства размерности $d-\delta-1$ над полем K. Если поле K алгебраически замкнуто, то существует взаимно однозначное соответствие между всеми d-мерными локальными кольцами вида $\{Q; \overline{\mathfrak{P}}\}$ и всеми точками проективного пространства размерности $d-\delta-1$ над полем K.

2. Если Q' — некоторое d-мерное локальное кольцо, возникшее из кольца Q посредством дилатации относительно простого идеала $\mathfrak{p}$ и поле $K = Q/\mathfrak{m}$ алгебраически замкнутое, то существуют такие базисы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d)$ и $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d)$ максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ колец Q и Q' соответственно, причем $\mathfrak{p} = (\sigma_{\delta+1}, \ldots, \sigma_d)$, что

$$\tau_i = \sigma_i \ (1 \leqslant i \leqslant \delta), \ \tau_i\tau_d = \sigma_i \ (\delta+1 \leqslant i \leqslant d-1), \ \tau_d = \sigma_d \quad (1)$$

и обратно, если между элементами произвольных минимальных базисов $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_d)$ и $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_d)$ максимальных идеалов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}'$ соответственно имеют место соотношения (1), то $\mathfrak{p} = (\sigma_{\delta+1}, \ldots, \sigma_d)$.

3. Пусть $\mathfrak{q}$ — произвольный простой идеал кольца Q, не содержащий простой идеал $\mathfrak{p}$. Тогда существует по крайней мере одно d-мерное локальное кольцо Q', возникающее из кольца Q посредством дилатации относительно простого идеала $\mathfrak{p}$, содержащее по крайней мере один такой простой идеал $\mathfrak{q}'$, что $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}' \cap Q$.

4. Пусть Q' — произвольное d-мерное регулярное локальное кольцо, возникшее из d-мерного регулярного локального кольца Q посредством дилатации относительного простого идеала $\mathfrak{p}$ размерности $\delta \leqslant d-2$, и пусть f — произвольный ненулевой элемент кольца Q, не обладающий обратным. Тогда, если разложение главного идеала Qf в пересечение примарных идеалов имеет вид $Qf = \mathfrak{q}_1^{(r_1)} \cap \mathfrak{q}_2^{(r_2)} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_l^{(r_l)}$, где $\mathfrak{q}_i^{(r_i)}$ — r_i-я символическая степень простого идеала $\mathfrak{q}_i$, то $Qf = \mathfrak{q}_1'^{(r_1)} \cap \mathfrak{q}_2'^{(r_2)} \cap \ldots \cap \mathfrak{q}_k'^{(r_k)} \cap \mathfrak{p}'^{(l)}$, где $k \leqslant l$, $\mathfrak{q}'_i$ — некоторый простой идеал кольца Q', лежащий над одним из идеалов $\mathfrak{q}_j$, $\mathfrak{p}' = Q'_{\mathfrak{p}}$ и l — кратность локального кольца Q_0/Q_0f.

Далее приводятся геометрические интерпретации полученных результатов. Е. Г. Шульгейфер

5616. Некоторые замечания о локальных кольцах. II. Нагата (Some remarks on local rings. II. Nagata Masayoshi), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 2, 109—120 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 3570. Доказывается следующая

Теорема 1: Пусть $\mathfrak{r}$ — гензелево регулярное локальное кольцо, удовлетворяющее следующим двум условиям: 1) если $\mathfrak{p}$ — произвольный минимальный простой идеал кольца $\mathfrak{r}$, то любое конечное целое расширение фактор-кольца $\mathfrak{r}/\mathfrak{p}$ алгебраически замкнуто в его пополнении, и 2) любое почти конечное целое расширение кольца $\mathfrak{r}$ является конечным $\mathfrak{r}$-модулем. Тогда кольцо $\mathfrak{r}$ алгебраически замкнуто в своем пополнении $\bar{\mathfrak{r}}$.

Гензелево регулярное локальное кольцо $\mathfrak{r}$ называется кольцом Вейерштрасса, если существует такая последовательность $G_0, G_1, \ldots, G_n, \ldots$ множеств гензелевых регулярных локальных колец, что: 1) кольцо $\mathfrak{r}$ принадлежит одному из множеств G_n; 2) каждое локальное кольцо из G_n имеет размерность n; 3) если $\mathfrak{p}$ — произвольный минимальный простой идеал некоторого кольца $\mathfrak{r}_n$ из множества G_n ($n \geqslant 1$), то существует по крайней мере одно такое кольцо $\mathfrak{r}_{n-1}$ из G_{n-1}, что фактор-кольцо $\mathfrak{r}_n/\mathfrak{p}$ изоморфно некоторому конечному целому расширению кольца $\mathfrak{r}_{n-1}$; 4) произвольное почти конечное целое расширение любого кольца $\mathfrak{r}_n$ из G_n является конечным $\mathfrak{r}_n$-модулем. Произвольное кольцо Вейерштрасса $\mathfrak{r}$ алгебраически замкнуто в своем пополнении $\bar{\mathfrak{r}}$ и для любого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{r}$ идеал $\bar{\mathfrak{r}}\mathfrak{p}$ является простым. В качестве следствия последнего результата доказывается, что если локальная область целостности $\mathfrak{o}$ является конечным целым расширением некоторого кольца Вейерштрасса $\mathfrak{r}$, то ее пополнение $\bar{\mathfrak{o}}$ также является областью целостности. Если, кроме того, кольцо $\mathfrak{o}$ целозамкнуто в своем поле частных и сепарабельно над кольцом $\mathfrak{r}$, то пополнение $\bar{\mathfrak{o}}$ кольца $\mathfrak{o}$ целозамкнуто в своем поле частных.

Далее приводятся примеры колец Вейерштрасса. Локальное кольцо $\mathfrak{o}$ называется локальным кольцом конечно порожденного типа над локальным кольцом $\mathfrak{r}$, если существует по крайней мере одно такое конечно порожденное над кольцом $\mathfrak{r}$ кольцо $\mathfrak{I}$, что $\mathfrak{o}$ является кольцом отношений кольца $\mathfrak{I}$ относительно некоторого его максимального идеала $\mathfrak{m}$, содержащего все необратимые элементы кольца $\mathfrak{r}$. Кольцо $\mathfrak{I}$ называется порождающим кольцом кольца $\mathfrak{o}$ над кольцом $\mathfrak{r}$. До-

казывается, что гензелизация $\mathfrak{r}^*$ произвольного регулярного локального кольца $\mathfrak{r}$ конечно порожденного типа над некоторым полем произвольной характеристики или над некоторым кольцом дискретной оценки характеристики нуль является кольцом Вейерштрасса. Кольцом Вейерштрасса является также кольцо $\mathfrak{o}_n$ сходящихся степенных рядов от n переменных над полем комплексных чисел.

В заключение, в качестве дополнения, доказывается, что целое замыкание $\mathfrak{o}$ нетеровой полной локальной области целостности $\mathfrak{o}$ в ее поле частных является конечным $\mathfrak{o}$-модулем. Е. Г. Шульгейфер

5617. Целозамыкание нётерова кольца. Иосида, Сакума (On integrally closed Noetherian rings. Yoshida Michio, Sakuma Motoyoshi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A17**, № 3, 311—315 (англ.)

Пусть $\mathfrak{o}$ — произвольное нётерово кольцо и K — полное кольцо отношений кольца $\mathfrak{o}$. Простые идеалы, соответствующие некоторому идеалу $\mathfrak{a}$ кольца $\mathfrak{o}$, называются простыми дивизорами идеала $\mathfrak{a}$. Идеал $\mathfrak{a}$ называется регулярным, если он содержит по крайней мере один элемент, не являющийся делителем нуля.

Основная теорема: Если нётерово кольцо $\mathfrak{o}$ с единицей целозамкнуто в своем полном кольце отношений K, то: а) в каждом простом дивизоре произвольного собственного регулярного главного идеала (a) кольца $\mathfrak{o}$ содержится лишь один простой идеал, и этот простой идеал является примарной компонентой нулевого идеала, и б) каждый примарный идеал кольца $\mathfrak{o}$, принадлежащий некоторому минимальному (среди регулярных простых идеалов) регулярному простому идеалу $\mathfrak{p}$, является некоторой символической степенью идеала $\mathfrak{p}$. Обратно, если для каждого простого дивизора $\mathfrak{p}$ произвольного собственного регулярного главного идеала (a) кольца $\mathfrak{o}$ между $\mathfrak{p}$ и его символическим квадратом $\mathfrak{p}^{(2)}$ нет других примарных идеалов, то кольцо $\mathfrak{o}$ целозамкнуто в своем полном кольце отношений K.

Эта теорема является обобщением соответствующей теоремы для нётеровых областей целостности, доказанной в работе Мори и Додо (Mori S., Dodo T., J. Sci. Hiroshima Univ., 1937, **A7**, 15—28).

Доказывается также, что если $\mathfrak{p}$ — произвольный собственный не минимальный простой идеал нётерова кольца $\mathfrak{o}$, то для каждого $i = 1, 2, \ldots$ показатель примарного идеала $\mathfrak{p}^{(i)}$ (i-й символической степени идеала $\mathfrak{p}$) равен i. Е. Г. Шульгейфер

5618. Теория нётеровых колец, полугрупп и модулей в некоммутативном случае. Круазо (Théorie noethérienne des anneaux, des demi-groupes et des modules dans le cas non commutatif. Croisot-R.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 16 (франц.)

5619. К теории модулей. Кертес (Beiträge zur Theorie der Operatormoduln. Kertész A.), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8, № 1-2, 235—257 (нем.)

Рассматриваются левые R-модули, где R — произвольное ассоциативное кольцо. Кольцо R обычным образом расширяется до кольца с единицей $R_{(1)}$ (в результате чего R-модуль G превращается в $R_{(1)}$-модуль). Порядком элемента g R-модуля G называется левый идеал кольца $R_{(1)}$, состоящий из всех элементов $r_1 \in R_{(1)}$, для которых $r_1 g = 0$. Подмодуль H R-модуля G называется сервантным в G, если всякая система уравнений вида $r_\nu x + n_\nu x = h_\nu$, где $r_\nu \in R$; n_ν — целые числа, $h_\nu \in H$, а общее число уравнений может быть и бесконечным, имеющая решение в G, имеет решение и в H. Доказывается, что подмодуль H сервантен в G тогда и только тогда, когда во всяком смежном классе $\bar{g} \in G/H$ имеется хотя бы один элемент g', порядок которого (в модуле G) равен порядку элемента g; если подмодуль H сервантен в G и фактор-модуль G/H является прямой суммой циклических R-модулей, то H служит для G прямым слагаемым; если H сервантен в G и $H \subseteq A \subseteq G$, то подмодуль A в том и только в том случае сервантен в G, когда фактор-модуль A/H сервантен в G/H. На примере показывается, что объединение возрастающей последовательности сервантных подмодулей R-модуля G не обязано быть сервантным в G.

R-модуль G называется простым, если он не содержит подмодулей, отличных от 0 и G. R-модуль, являющийся прямой суммой простых R-модулей, называется вполне приводимым. Доказывается, что если R-модуль G двумя способами разлагается в прямую сумму простых модулей, то между слагаемыми этих разложений можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором соответствующие друг другу слагаемые изоморфны между собой. Доказывается, далее, что R-модуль G вполне приводим тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных между собой условий: 1) в G существует множество максимальных подмодулей, дающих в пересечении 0, и, кроме того, в G выполнено условие минимальности для циклических подмодулей; 2) G порождается своими минимальными подмодулями; 3) порядок каждого отличного от нуля элемента модуля G равен пересечению конечного числа максимальных левых идеалов кольца $R_{(1)}$; 4) всякий подмодуль модуля G служит для G прямым слагаемым; 5) всякий подмодуль модуля G сервантен в G; 6) для каждой максимальной линейно независимой системы элементов $(\ldots, g_\alpha, \ldots)$ модуля G имеет место $G = \sum \{g_\alpha\}$ (система элементов $g_\alpha \in G$ называется линейно независимой, если из всякого соотношения вида $r_1 g_{\alpha_1} + n_1 g_{\alpha_1} + \ldots + r_k g_{\alpha_k} + n_k g_{\alpha_k} = 0$, где $r_i \in R, n_i$ — целые числа, вытекают равенства $r_1 g_{\alpha_1} + n_1 g_{\alpha_1} = \ldots = r_k g_{\alpha_k} + n_k g_{\alpha_k} = 0$.) Из этой теоремы непосредственно следует, что всякий подмодуль и всякий гомоморфный образ вполне приводимого R-модуля сам является вполне приводимым R-модулем. С помощью этой же теоремы доказывается, что если R-модуль G вполне приводим, то радикал Джекобсона его кольца эндоморфизмов равен нулю.

Кольцо R называется полу простым, если в нем нет отличных от нуля нильпотентных левых идеалов и выполнелноусловие минимальности для левых идеалов. Дается более простое доказательство известной ранее теоремы (Goldman O., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 1021—1027): кольцо R является полупростым тогда и только тогда, когда для любого R-модуля G существует разложение $G = G_0 + G_1$, где G_0 — подмодуль, для всякого элемента g_0 которого и всякого элемента $r \in R$ $rg_0 = 0$, а G_1 — вполне приводимый R-модуль. Указывается также, что кольцо R тогда и только тогда полупросто, когда для всякого его левого идеала L и любого элемента g произвольного R-модуля G подмодуль Lg сервантен в G. Наконец, доказывается, что кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда оно обладает правой единицей и удовлетворяет любому из следующих условий: 1) R является прямой суммой минимальных левых идеалов; 2) в кольце R имеется конечное число максимальных левых идеалов, пересечение которых равно нулю; 3) R является объединением своих минимальных левых идеалов; 4) для всякого левого идеала L кольца R существует такой левый идеал K, что для аддитивной группы R^+ кольца R, рассматриваемой как левый R-модуль, имеет место $R^+ = L + K$; 5) всякий левый идеал сервантен в R (если рассматривать его как подмодуль в R^+); 6) всякая максимальная линейно независимая над R система элементов из R^+ является базисом R^+ (над R). Отметим еще одну теорему: Кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда оно обладает единицей и левосторонний аннулятор любого его отличного от нуля эле-

мента равен пересечению конечного числа максимальных левых идеалов. А. П. Мишина

5620. Модули Машке над дедекиндовыми кольцами. **Рейнер** (Maschke modules over Dedekind rings. Reiner Irving), Canad. J. Math., 1956, 8, № 3, 329—334 (англ.)

Пусть $\mathfrak{o}$ — произвольное дедекиндово кольцо, K — поле частных кольца $\mathfrak{o}$, A — конечномерная сепарабельная алгебра с единицей над полем K, G — некоторый $\mathfrak{o}$-порядок в алгебре A, $\mathfrak{p}$ — произвольный собственный простой идеал кольца $\mathfrak{o}$, $\bar{K} = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ и $\bar{G} = G/\mathfrak{p}G$ ($\bar{G}$ рассматривается как алгебра над полем $\bar{K}$). Под G-модулем в работе понимается произвольный левый G-модуль, на котором единица кольца G действует как тождественный оператор и который, рассматриваемый как левый $\mathfrak{o}$-модуль, имеет конечное число образующих и является модулем без кручения. Если R — некоторый G-модуль, то через $\bar{R}$ обозначается $\bar{G}$-модуль $R/\mathfrak{p}R$. G-модуль R называется M_u-G-модулем, если всякий раз, когда R является $\mathfrak{o}$-прямым слагаемым некоторого G-модуля S, R является G-прямым слагаемым модуля S. G-модуль R называется $M_{\mathfrak{o}}$-G-модулем, если всякий раз, когда фактор-модуль S/R_1 некоторого G-модуля S по его G-подмодулю R_1, являющемуся $\mathfrak{o}$-прямым слагаемым модуля S, G-изоморфен модулю R, R_1 является G-прямым слагаемым модуля S.

Доказываются следующие две теоремы.

1. Если для каждого собственного простого идеала $\mathfrak{p}$ дедекиндова кольца $\mathfrak{o}$ модуль $\bar{R}$ является $\bar{M}_u$-$\bar{G}$-модулем ($M_{\mathfrak{o}}$-$\bar{G}$-модулем), то R является M_u-G-модулем (соответственно $M_{\mathfrak{o}}$-G-модулем).

2. Если G является фробениусовой алгеброй над кольцом $\mathfrak{o}$ и G-модуль R является M_u-G-модулем ($M_{\mathfrak{o}}$-G-модулем), то для каждого простого идеала $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{o}$ модуль $\bar{R}$ является M_u-$\bar{G}$-модулем (соответственно $M_{\mathfrak{o}}$-$\bar{G}$-модулем).

В качестве следствия теоремы 1 указывается, что для того чтобы G-модуль R был M_u-G-модулем ($M_{\mathfrak{o}}$-G-модулем), достаточно, чтобы R был M_u-$\bar{G}$-модулем (соответственно $M_{\mathfrak{o}}$-$\bar{G}$-модулем) для всех простых идеалов $\mathfrak{p}$ кольца $\mathfrak{o}$, соответствующих идеалу $I(G)$, введенному Хигманом (РЖМат, 1956, 5132). Е. Г. Шульгейфер

5621. О кольцах частных. Уцуми (On quotient rings. Utumi Yuzo), Osaka Math. J., 1956, 8, № 1, 1-17 (англ.)

Расширение S кольца T называется левым кольцом частных кольца T, если для любых двух элементов $x \neq 0$ и $y \in S$ существует такой элемент $a \in T$, что $ax \neq 0$, $ay \in T$. В таком случае пишут $S \geqslant T$. Кольцо $\bar{S}$, для которого $\bar{S} \geqslant S$, называется максимальным левым кольцом частных кольца S, если любое левое кольцо частных для S можно изоморфно над S вложить в $\bar{S}$. Кольцо, имеющее левое кольцо частных в этом смысле, имеет левое кольцо частных в смысле Джонсона (Johnson R. E., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 891—895). Обратное не верно. Используя метод Азано (Asano K., J. Math. Soc. Japan, 1949, 1, № 2, 73—79), обобщенный Джонсоном в указанной работе, автор доказывает, что кольцо имеет максимальное левое кольцо частных тогда и только тогда, когда оно не имеет правых полных делителей нуля.

Доказываются следующие предложения:

Пусть $\{S_\alpha\}$ — множество колец со свойством $S_\alpha \geqslant S_\alpha$, тогда полная прямая сумма их максимальных левых колец частных является максимальным левым кольцом частных для ограниченной прямой суммы $\sum_+ S_\alpha$.

Если $S \geqslant S$, то полное кольцо матриц $\bar{S}_n$ над $\bar{S}$ является максимальным левым кольцом частных для полного кольца матриц S_n над S.

Левый идеал $\bar{l}$ кольца S называется левым M-идеалом, если он содержит все элементы x, для которых существует левый идеал $\bar{m}$ со свойствами $mx \subseteq \bar{l}$ и $S \leqslant m$. Доказывается, что между левыми M-идеалами кольца S и любого его левого кольца частных существует взаимно-однозначное соответствие (даются формулы).

Устанавливается связь между понятиями M-идеала, аннуляторного идеала и дополнительного идеала (это понятие вводится автором). Одновременно устанавливаются некоторые условия совпадения максимального левого кольца частных с максимальным правым кольцом частных, а также условия совпадения максимального левого кольца частных в смысле автора с левым кольцом частных в смысле Джонсона. В частности, если S—полупростое слабо приводимое кольцо (РЖМат, 1956, 7198) ограниченного индекса нильпотентности, то левое и правое максимальные кольца частных совпадают, $\bar{S}$— имеет тот же индекс нильпотентности, что и S, полупросто и слабо приводимо. Кроме того, если в кольце S имеется тождественное соотношение, то оно же имеет место и в S.

В заключение автор исследует некоторые свойства расширенного централизатора кольца над модулем (см. цитированную работу Джонсона).

В тексте реферируемой работы довольно много опечаток. В. П. Елизаров

5622. Кольца с единственным сложением. Джонсон (Rings with unique addition. Johnson R. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 1, 57—61 (англ.)

Кольцо R называется кольцом с единственным сложением, если не существует кольца R', неизоморфного R, мультипликативная полугруппа которого изоморфна мультипликативной полугруппе R. Доказаны две теоремы, содержащие достаточные условия, при которых кольцо R, удовлетворяющее условию минимальности для левых идеалов, является кольцом с единственным сложением. Эти теоремы являются обобщением результата Рикарта (Rickart C. E., Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, 758—764) для полупростых колец с единственным сложением. Л. М. Глускин

5623. 5-альтернативное кольцо. Бурс (L'anneau 5-alternatif. Boers A. H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1956, A59, № 5, 532—534; Indagationes math., 1959, 18, № 5, 532—534 (франц.)

Доказывается ассоциативность 5-альтернативного кольца (РЖМат, 1959, 4535) характеристики взаимно простой с 2, в котором равенство $x^2 = 0$ влечет равенство $x = 0$. А. И. Ширшов

5624. Локально ограниченные идеалы общего кольца. Се Бан-цзе (Hsieh Pang-chieh), Дунбэй жэньминь дасюэ цзыжань-кэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1955, № 1, 13—35 (кит.; рез. англ.)

Доказывается, что если в идеале A ассоциативного кольца Ω содержится (ненулевой) ниль-идеал ограниченного индекса, то в нем содержится также и (ненулевой) нильпотентный идеал. Используя это утверждение, автор доказывает одно необходимое и одно достаточное условия совпадения нижнего и верхнего радикалов Бера, а также следующую теорему: Если M—двусторонний идеал кольца Ω и правые идеалы кольца Ω, содержащиеся в M удовлетворяют условию максимальности, то каждый ниль-идеал (одно или двусторонний), содержащийся в M, нильпотентен.

Приводятся также более простые, по мнению автора, доказательства некоторых известных результатов. А. И. Ширшов

5625. Алгебры Ли типов A, B, C, D и F. Томбер (Lie algebras of types A, B, C, L and F. Tomber

Marvin L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, № 1, 99—106 (англ.)

Пусть J—простая йорданова алгебра степени $\geqslant 3$ над полем Ф характеристики 0, $D(J)$—алгебра Ли дифференцирований алгебры J. Доказывается, что если поле Ф алгебраически замкнуто и $D(J) \neq D_4$, то для каждого автоморфизма φ алгебры $D(J)$ найдется единственный автоморфизм S алгебры J такой, что $\varphi(d) = SdS^{-1}$ $(d \in D(J))$. Отсюда выводится, что для того чтобы алгебра Ли L над полем Ф имела тип A, B, C, D или F (за исключением типа D_4), необходимо и достаточно, чтобы $L \cong D(J)$, где J—центральная простая йорданова алгебра степени $\geqslant 3$ над Ф. Для алгебр типов A, B, C, D это было ранее доказано Джекобсоном. А. Л. Онищик

5626. Алгебры Буля, их обобщения, структуры. Андреоли (Algebre di Boole. Loro generalizzazione. Reticoli. Andreoli Giulio), Matematiche, 1954, **9**, № 1, 23—42 (итал.)

Обзорная лекция, прочитанная в Институте математики Университета Катании в 1954 г. Излагаются (с большим числом примеров) определение и простейшие свойства алгебры Буля. Отдельно рассматривается случай конечной алгебры Буля. Далее рассматриваются совокупности более общей природы—совокупности линейных функций с коэффициентами из алгебры Буля. В заключение дается понятие (с геометрической точки зрения) о теории структур. В. К. Туркин

5627. Совокупности Буля, Рейхенбаха и смешанные. Тиберти (Universo di Boole, di Reichenbach e misti. Tiberti Maria Rosaria), Giorn. mat. Battaglini, 1956, **84**, № 1, 5—17 (итал.)

В начале работы приводятся основные соотношения для алгебр Буля, состоящих из 2^n элементов и являющихся произведением алгебр Буля из 2 элементов. В дальнейшем рассматриваются алгебры Рейхенбаха из 3^n элементов, связанные с трехзначной логикой. Каждый элемент такой алгебры имеет вид $a = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, где каждое α_i имеет одно из трех возможных значений, обозначаемых автором соответственно через T, I, N („да", „неопределенно", „нет"). Для основных символов T, I, N вводятся заданием соответствующих таблиц действия сложения и умножения, а также три вида отрицания (диаметральное, циклическое и полное). В дальнейшем рассматриваются также многочисленные комбинации этих действий. Действия над „векторами" вида a сводятся к соответствующим действиям над компонентами этих векторов. Указывается на возможность построения алгебр смешанного типа и порядка $3^m\ 2^n$ путем перемножения алгебр Буля и Рейхенбаха. В. К. Туркин

5628. Алгебры уровней как расширения алгебр Буля; их сведение к последним. Андреоли (Le algebre dei livelli quali estensioni delle algebre di Boole; loro riduzione a queste. Andreoli Giulio), Giorn. mat. Battaglini, 1956, **84**, № 2, 150—188 (итал.)

В начале работы излагаются основные свойства алгебр Буля, причем отдельно рассматривается первичная алгебра Буля, состоящая из двух элементов. Для алгебры Буля с 2^n элементами, рассматриваемой как совокупность подмножеств множества из n элементов, строится геометрическое представление в виде гиперкубической решетки с 2^n вершинами. Приводятся различные методы „оценки" элементов алгебры Буля, т. е. сопоставления этих элементов с некоторыми натуральными числами. Совокупность этих чисел составляет шкалу. Операцию перехода от алгебры Буля к соответствующей шкале автор называет стягиванием. Действиям, производимым над элементами алгебры Буля, соответствуют действия над элементами шкалы. Шкала, на которой определены эти действия, носит название алгебры уровней. Посредством другой операции, названной автором уменьшением и связанной с разбиением шкалы на отрезки, устанавливается соответствие между элементами алгебры уровней и элементами первичной алгебры Буля. В. К. Туркин

5629. Строение алгебр Буля и исчисление классов как их обобщение (в обычном или теоретико-вероятностном смысле). Андреоли (Struttura delle algebre di Boole e loro estensione quale calcolo delle classi (in senso ordinario oppure probabilistico). Andreoli Giulio), Giorn. mat. Battaglini, 1957, **85**, № 2, 141—171 (итал.)

В первых трех параграфах работы подробно излагается строение алгебр Буля; рассматриваются как первичные алгебры Буля с двумя элементами, так и их произведения—алгебры Буля с 2^n элементами (отдельно рассмотрен случай $n=2$). В § 4 рассмотрено одно из расширений алгебры Буля — алгебра Рейхенбаха, связанная с трехзначной логикой. В § 5 рассматривается более существенное обобщение алгебры Буля — теоретико-вероятностная алгебра. В этой алгебре классом называется совокупность некоторого числа „атомов", каждому из которых соответствует некоторое значение вероятности. Сопряжением классу $(\ldots, p_i, \ldots)$ называется класс $(\ldots, q_i, \ldots)$, где $q_i = 1 - p_i$ для любого i. Сложение и умножение классов сводится к соответствующим действиям над коэффициентами. Сумма коэффициентов a и b считается равной $\max(a, b)$ (интерпретация в смысле алгебры уровней) или $a+b-ab$ (теоретико-вероятностная интерпретация). Соответственно произведение a и b считается равным $\min(a, b)$ или ab. В § 6 для алгебр Буля дается разложение спектрального типа. В. К. Туркин

5630. Существование алгебраически замкнутых алгебраических расширений. Фудзивара (On the existence of algebraically closed algebraic extensions. Fujiwara Tsuyoshi), Osaka Math. J., 1956, **8**, № 1, 23—33 (англ.)

Рассматривается произвольная A-алгебраическая система $\mathfrak{A}$ (РЖМат, 1956, 263). Произвольная A-алгебраическая система $\mathfrak{B}$, содержащая в качестве подсистемы систему $\mathfrak{A}$, называется расширением системы $\mathfrak{A}$. Конгруэнция Θ некоторого расширения $\mathfrak{B}$ A-алгебраической системы $\mathfrak{A}$ называется $\mathfrak{A}$-полиномиальной, если $\Theta \neq 0$ и если при этой конгруэнции никакие два элемента системы $\mathfrak{A}$ между собой не конгруэнтны. Элемент α расширения $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$ называется алгебраическим над $\mathfrak{A}$, если не существует ни одной $\mathfrak{A}$-полиномиальной конгруэнции системы $\mathfrak{A}(\alpha)$. Если каждый элемент расширения $\mathfrak{B}$ алгебраичен над $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B}$ называется алгебраическим расширением системы $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{S}$ — два произвольных расширения системы $\mathfrak{A}$, то изоморфизм (гомоморфизм) системы $\mathfrak{B}$ в систему $\mathfrak{S}$, оставляющий неподвижным каждый элемент системы $\mathfrak{A}$, называется $\mathfrak{A}$-изоморфизмом ($\mathfrak{A}$-гомоморфизмом).

Приводятся следующие три условия, достаточные для того, чтобы A-алгебраическая система $\mathfrak{A}$ обладала алгебраически замкнутым расширением. (A) Если $\mathfrak{B}$—произвольное алгебраическое расширение системы $\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{S}$—произвольное алгебраическое расширение системы $\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{S}$ является алгебраическим расширением и системы $\mathfrak{A}$. (B) Пусть $\mathfrak{B}$—произвольное алгебраическое расширение системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{S}$—некоторое расширение системы $\mathfrak{B}$, порождаемое над $\mathfrak{B}$ некоторым множеством элементов $\alpha, \beta, \ldots$. Тогда если не существует ни одной $\mathfrak{B}$-полиномиальной конгруэнции системы $\mathfrak{C}$ и каждый из образующих элементов $\alpha, \beta, \ldots$, алгебраичен над $\mathfrak{B}$ то $\mathfrak{C}$ является алгебраическим расширением системы $\mathfrak{B}$. (C) Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — два алгебраических расширения системы $\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{C}$. Тогда, если система $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{A}$-изоморфна системе $\mathfrak{C}$, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$. Е. Г. Шульгейфер

5631. К U-квазидистрибутивным структурам. Курцио (Sui reticoli U-quasi distributivi. Curzio Mario), Ricerche mat., 1957, **6**, № 2, 237—240 (итал.)

Элемент a структуры Γ называется U-квазидистрибутивным, если из равенства $aUb=ac$ U $(b, c \in \Gamma)$ следует, что $(aUb) \cap (aUc)=aU\ (b \cap c)$. Структура Γ называется U-квазидистрибутивной, если каждый ее элемент U-квазидистрибутивен. Двойственно определяется ∩-квазидистрибутивность. Структура называется структурой с α-свойством, если для любой пары ее элементов x, y, покрывающих $x \cap y$, существует такой элемент z, также покрывающий $x \cap y$, что $xUy = xUz = yUz$. Если $y \leqslant x$ и все цепочки между y и x конечны, то длина максимальной из них обозначается $l(y, x)$. Надмодулярной (sopramodulare) структурой автор называет полудедекиндову структуру в смысле Биркгофа (Теория структур, 1952, Изд-во ин. лит., 148). Двойственно определяется подмодулярная структура. Надмодулярная и U-квазидистрибутивная структура дистрибутивна.

Теорема I. Необходимым и достаточным условием того, чтобы элемент a в подмодулярной структуре (с условием обрыва цепей и) с α-свойством был U-квазидистрибутивен, является отсутствие в R элементов b и c (c отличен от a) таких, что $l(a, b)=l(c, b)$.

Теорема II, двойственная теореме 1, устанавливает критерий для ∩-квазидистрибутивности элемента в подмодулярной структуре с α-свойством.

Ю. И. Соркин

5632. Независимость условий ассоциативности. Климеску (Independenţa condiţiilor de asociativitate Climescu Al.), Bul. Inst. Politehn. Iaşi, 1955, **1**, № 1-2, 1—9 (рум.; рез. русск., франц.)

Обобщается результат Саса (РЖМат, 1954, 2895) Рассматривается некоторый класс универсальных алгебр с одними и теми же финитарными операциями. Если f—некоторая n-арная операция на алгебре A, то $(2n-1)$-строка $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-1})$ из элементов алгебры A называется ассоциативной относительно операции f, если все значения

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})),$$
$$f(a_1, \ldots, a_{n-2}, f(a_{n-1}, \ldots, a_{2n-2}), a_{2n-1}), \ldots,$$
$$f(f(a_1, \ldots, a_n), a_{n+1}, \ldots, a_{2n-1})$$

между собою совпадают, и неассоциативной относительно операции f в противном случае. Некоторое множество S $(2n-1)$-строк элементов из алгебры A, называется изолированным первого (второго) рода относительно операции f, если множеством S исчерпываются все неассоциативные (соответственно ассоциативные) относительно операции f $(2n-1)$-строки алгебры A. Доказывается, что если каждой операции f_i, определенной в рассматриваемом классе алгебр, произвольным образом сопоставить некоторое множество S_i строк соответствующей длины, элементами которых являются некоторые символы, то существует некоторая алгебра A, для которой множество S_i является изолированным множеством первого рода относительно операции f_i и, если A одна из таких алгебр, то для любого трансфинитного числа $\alpha > \beta$, где β—порядок алгебры A, существует алгебра порядка α, обладающая тем же свойством. Аналогичное утверждение справедливо и относительно изолированности множества S_i второго рода.

Затем рассматриваются алгебры с одной бинарной операцией и выписываются таблицы умножения для всех различных между собой алгебр минимального порядка, для которых заданная тройка (a, b, c) является изолированной первого рода. Если в тройке (a, b, c) не все элементы между собою равны, то минимальный порядок алгебр с одной бинарной операцией, для которых тройка (a, b, c) является изолированной первого рода, равен 3. Для тройки (a, a, a) минимальный порядок соответствующих алгебр равен 4. С помощью таблиц показывается также, что для каждой тройки (a, b, c) существует алгебра порядка 4 с одной бинарной операцией, для которой тройка (a, b, c) является изолированной второго рода.

Е. Г. Шульгейфер

5633. Об отношении дистрибутивности между алгебраическими операциями. Чупона (За релацијата дистрибутивност мегу алгебарските операции. Чупона Г.), Годишен зб. Филос. фак. Ун-т Скопје. Природно-матем. одд., 1956 (1958), **9**, 23—29 (сербо-хорв.; рез. англ.)

Основные понятия и обозначения см. РЖМат, 1956, 3716. Рассматривается множество M, на котором определена совокупность Π бинарных операций $A, B, C, \ldots$ Если операция A ставит в соответствие упорядоченной паре $a, b \in M$ элемент c, то пишут $A(a, b) = c$. Операция A дистрибутивна слева относительно операции B (обозначение AdB), если $A[a, B(b, c)] = B[A(a, b), A(a, c)]$, для любых $a, b, c \in M$. Система Π называется полудистрибутивной, если для любой операции $A \in \Pi$ найдутся такие операции $X, Y \in \Pi$, что XdA, AdY. Если притом операции X, Y определяются однозначно, то полудистрибутивная система Π называется однозначной полудистрибутивной системой (о. п. с.). Подмножество $\Pi' \subseteq \Pi$, где Π — о. п. с., называется подсистемой, если само Π′ также о. п. с.

О. п. с. Π называется простой, если она не содержит собственных подсистем. Доказывается, что всякая о. п. с. разбивается на дизъюнктивные простые подсистемы. Всякая простая о. п. с. имеет вид Π— $\{\ldots, A_i, A_{i+1}, \ldots\}$, где $A_i d A_{i+1}$.

Если простая о. п. с. Π конечна, то $\Pi = \{A_1, A_2, \ldots A_k\}$, где $A_i d A_{i+1}$, причем считается $A_{k+1} = A_1$. Строится пример конечной о. п. с. для любого k.

В статье доказывается еще несколько теорем относительно систем, содержащих не более трех операций, связанных дистрибутивностью, причем на эти операции налагаются некоторые дополнительные условия. Например: если AdB, BdA и M—группа относительно операции B, то $A = E$ (E — правая единичная операция, определяемая следующим образом: $E(a, b) = b$ для любых $a, b \in M$).

В. Д. Белоусов

5634. Определяющие соотношения в категориях. Мальцев А. И., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1095—1098

Рассматриваются конкретные категории, т. е. категории, объектами которых являются множества, а отображениями — некоторые однозначные отображения этих множеств; в работе такие категории называются категориями структур, а их объекты — структурами. Категория называется мультипликативно замкнутой, если в ней существуют прямые композиции (в смысле Маклейна) для любых систем структур. Пусть K, L — подкатегории некоторой категории и $K \supseteq L$. Репликой K-объекта $\mathfrak{A}$ в категории L называется L-объект $\mathfrak{B}$, для которого существует такое отображение $\pi: \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, что для любого отображения σ объекта $\mathfrak{A}$ в произвольный L-объект $\mathfrak{F}$ найдется одно и только одно отображение $\xi: \mathfrak{B} \to \mathfrak{F}$, удовлетворяющее условию $\sigma = \pi\xi$. Подкатегория L категории K называется R-полной, если каждый K-объект имеет в L реплику. Если категория мультипликативно замкнута, то это же верно и для всех ее R-полных подкатегорий. Для случая категории структур устанавливаются условия, при которых мультипликативно замкнутая подкатегория будет R-полной. В работе вводятся также другие понятия и сообщаются другие результаты. Полученные результаты применяются к категориям моделей.

А. Г. Курош

5635. Структурная характеристика некоторых классов алгебр. Мальцев А. И., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 29—32

Продолжение работы автора (реф. 5635). Две категории структур называются структурно эквивалентными, если

их объектами служат одни и те же множества, а отображениями — одни и те же отображения этих множеств. Структура $\mathfrak{B}$ категории структур K называется подструктурой структуры $\mathfrak{A}$, если $\mathfrak{B}$ есть подмножество в $\mathfrak{A}$, если всякое отображение $\mathfrak{A}$ в произвольную структуру $\mathfrak{F}$ индуцирует отображение $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{F}$ и если, наконец, всякое отображение произвольной структуры $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{A}$, переводящее $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{B}$, будет отображением $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{B}$. Подкатегория L категории структур K называется квазисвободной в K, если L содержит единичную структуру, мультипликативно замкнута в K и K-подструктуры L-структур являются L-структурами.

Основной результат работы состоит в установлении необходимых и достаточных условий для того, чтобы данная категория структур была структурно эквивалентна квазисвободной подкатегории категории всех универсальных алгебр некоторого фиксированного типа.

Вводится понятие рациональной эквивалентности двух классов алгебр и доказывается, что если квазисвободные подклассы классов всех алгебр некоторых фиксированных типов, быть может различных, структурно эквивалентны, то они и рационально эквивалентны.

А. Г. Курош

5636 К. Ассоциативные некоммутативные кольца. Алмейда (Anéis associativos não comutativos. (Associative noncommutative rings.) Almeida Costa A. (Mem. e Estudos Centro Mat. Aplic. Estudo Energia Nuclear, N3). Lisboa, Fac. Ciencias Lisboa, 1955, iv, 313 p.) (порт.)

Эта книга является продолжением предыдущих работ, опубликованных в 1948 г., и собранием различных глав по теории ассоциативных колец, большая часть которых, по-видимому, была раньше опубликована под другими заглавиями в португальских журналах. Названия глав следующие: XIII. Ниль-подкольца. XIV. Радикал Джекобсона. XV. О переводящих и аннуляторных идеалах в общей теории модулей. XVI. Радикал Брауна и Мак-Коя, антирадикал и максимальный регулярный идеал в кольце. XVII. Примитивные кольца. XVIII. Подпрямые суммы колец, полупростые кольца. XIX. Подпрямые суммы модулей, полупростые модули. XX. Модули и кольца с операторами, простые кольца и простые алгебры. Книга страдает почти полным отсутствием системы, главы кажутся следующими друг за другом случайно, и даже внутри каждой главы связь между различными параграфами очень незначительна, одна и та же тема часто находится в трех или четырех местах, и было бы очень трудно тому, кто незнаком с этой теорией, вынести из этой книги ясные представления о предмете. Короче, это трудно назвать дидактической работой, но как будто бы это более аккуратное изложение набора несвязанных пересказов различных статей, которые были опубликованы по теории колец за последние 20 лет.

J. Dieudonné

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 5, 452.

См. также: 5388К, 5401, 5420, 5431, 5443, 5634, 5663, 5664, 5683, 5963, 5984К, 6030, 6047, 6100, 6253, 6260.

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

5637. Перечисление составленных графов. Рид (Enumeration of superposed graphs. Read R. C.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 22 (англ.)

Опираясь на одну алгебраическую лемму, автор вычисляет число различных графов, получаемых из заданных k одномерных конечных звезд суперпозиций (в смысле наложения на эти звезды бинарного соотношения). Это дает возможность перечислить все структурные формулы веществ, имеющих заданную эмпирическую (König, Theorie der Graphen, 1936).

5638. Частота появления некоторого типа конечных графов. Айгнер (Die Häufigkeitsverteilung gewisser Typen von endlichen Graphen. Aigner A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 93 (нем.)

В конечных графах рассматриваются такие подграфы, число исходящих ребер которых четно. В группе всевозможных разбиений на попарно дополняющие графы подграфов с указанным свойством будет 2^k. На основании правила перехода при прибавлении одной новой вершины частоты появлений таких графов с числом $0, 2, 4$ — или $1, 3, 5 \ldots$ быстро стремятся к некоторым значениям, а именно $h_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{31}{32} = 0{,}4194$, $h^k = \frac{2^k}{137\,(2^k - 1)} h_0$, так что $h_1 = 0{,}8388$, $h_2 = 0{,}5592$ $h_3 = 0{,}1598$, $h_4 = 0{,}0213$, $h_5 = 0{,}0014$.

5639. Графы без треугольников с трансфинитным хроматическим числом. Радо (Graphs without triangles, of any transfinite chromatic number. Rado R.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 22 (англ.)

Пусть $\Phi(\Gamma)$ обозначает кардинальное число множества вершин графа, а $\chi(\Gamma)$ — хроматическое кардинальное число.

Если для всех кардинальных чисел меньших a выполнено условие: следующее за b есть 2^b, $b < a$, — то всегда существует граф без треугольников (нет тройки вершин с полным бинарным отношением), такой, что $\chi(\Gamma) = \Phi(\Gamma) = a$.

5640. Равномерные структуры и компактификация. Акуаро (Uniform structures and compactifications. Aquaro G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 93 (англ.)

5641. Некоторые следствия из аппроксимационной теоремы для поверхностей. Бинг (Some consequences of the approximation theorem for surfaces. Bing R. H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 94 (англ.)

См. РЖМат, 1959, 4563.

5642. Проблема Шёнфлиса в трехмерном пространстве. Харрольд (The Schoenflies problem in threespace. Harrold O. G., Jr), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 95 (англ.)

k-мерное многообразие S с или без границы называется локально незаузленным в точке x, если имеется $k+1$ клетка D такая, что $S \cap D$ есть замкнутая окрестность x в S так, что $\partial D \cap S$ есть κ—1 многообразие. S называется локально периферически незаузлено в точке x, если существует k-клетка L такая, что граница L в пересечении с S есть локально периферически незаузлена (определение индуктивное). Эти понятия независимы (РЖМат, 1959, 197). Сообщается, что локально периферической незаузленности достаточно, чтобы поверхность была полиэдральной.

5643. Открытые отображения компактов. Келдыш Л. В. Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 97 (русск.); 97—98 (англ.)

Сообщается о решении (находится в процессе публикации) задачи о представлении нульмерного открытого отображения (РЖМат, 1956, 6477) в виде суперпозиции нульмерных отображений, не повышающих размерности, и двукратных, повышающих размерность на 1.

5644. Расширение гомеоморфизмов на метрических пространствах. Мак-Дауэлл, Грот (Extension of homeomorphisms on metric spaces. McDowell R. H., Groot J. de). Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 99 (англ.)

Пусть M — метрическое пространство и Φ — счетное множество гомеоморфизмов M в себя. Всегда найдется такое пространство $\widetilde{M}$, содержащее M в качестве плотного подмножества так, что любой гомеоморфизм из Φ может быть распространен до гомеоморфизма $\widetilde{M}$ в себя.

5645. Жесткие континуумы. Вилле (Rigid continua. Wille R. J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 103 (англ.)

Топологическое пространство E называется жестким, если E не допускает топологических отображений на E, кроме тождественного. Это понятие может быть распространено на топологические отображения в E, или вообще на любые непрерывные отображения в или на E.

5646. Некоторые проблемы, связанные с когомотопическими группами открытых подмножеств евклидова пространства. Куратовский (Some problems connected with cohomotopy groups of open subsets of euclidean space. Kuratowski K.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 98—99 (англ.)

Пусть X локально бикомпактно и Y — полный абсолютный окрестностный ретракт. Через $\mathfrak{C}$ обозначим пространство компонент Y^X (множество непрерывных отображений топологического пространства X в Y, снабженное компактно-открытой топологией); сходимость в Y^X индуцирует по непрерывности сходимость в Y^X. Тогда $\mathfrak{C}$ гомеоморфно замкнутому подмножеству F пространства N—иррациональных чисел. Более того, если $Y = E^n \setminus 0$, E^n без начала координат, то $F = N$, X открыто в E^n и распадается в бесконечное множество компонент. При этом $\mathfrak{C}$, рассматриваемая как группа с когомотопическим умножением, изоморфна аддитивной группе всех бесконечных последовательностей целых.

5647. Гомологии циклических произведений. Суон (The homology of cyclic products. Swan R. G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 102 (англ.)

5648. Гомологические операции. Хирш (Homology operations. Hirsch G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 95—96 (франц.)

5649. Бесконечные симметрические степени и функциональные пространства. Спаньер (Infinite symmetric products and function spaces. Spanier E. H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 101—102 (англ.)

Краткое сообщение. Утверждается, что с помощью аксиоматической теории гомотопических групп можно найти прямое доказательство изоморфизма $\pi_i(SP^\infty X) \approx H_i(X)$ (РЖМат, 1959, 2481), где X — произвольный полиэдр, а $S_i^\infty X$ — его бесконечная симметрическая степень. Кроме того, утверждается, что для любого полиэдра X, вложенного в сферу S^{n+1}, пространство $SP^\infty X^\#$, где $X^\#$—полиэдр, являющийся деформационным реграктом множества $S^{n+1} \setminus X$, имеет тот же слабый гомотопический тип, что и пространство всех непрерывных отображений $X \to K(Z, n)$.

5650. Гомотопические резольвенты и их применения. Постников М. М., Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 99—100 (русск.); 100 (англ.)

Краткий план доклада.

5651. Непараллелизуемость n-мерной сферы для $n>7$. Кервер (Non-parallelizability of the n-sphere for $n>7$. Kervaire M. A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Erinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 98 (англ.)

Краткое изложение опубликованных результатов автора (РЖМат, 1959, 221).

5652. Система аксиом для гомотопических групп. Кан (An axiomatization of the homotopy groups. Kan D. M.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 96—97 (англ.)

Краткое сообщение. Утверждается, что для класса пространств, имеющих гомотопический тип счетных клеточных разбиений, (абсолютные) гомотопические группы характеризуются функториальными условиями естественности и следующими четырьмя аксиомами: 1) гомотопии; 2) точности („гомотопическая последовательность любого расслоенного пространства точна; если слой связен, то ее последнее отображение эпиморфно"); 3) объединения („фундаментальная группа объединения двух пространств с одной отождествленной точкой является свободным произведением фундаментальных групп слагаемых"); 4) нетривиальности („$\Pi_n(X) \neq 0$ для некоторых X и n"). Можно освободиться от условия счетности, потребовав выполнения аксиомы 3) для объединения любого числа пространств.

5653. Геометрическая реализация скрещенных произведений. Дольд (Die geometrische Realisierung eines schiefen kartesischen Produktes. Dold A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 95 (нем.)

Краткое сообщение. Указывается достаточное условие, при выполнении которого геометрическая реализация скрещенного произведения полусимплициальных комплексов является квазирасслоенным (РЖМат, 1957, 7763) пространством. Утверждается, что с помощью этого условия можно доказать 1) теорему Джеймса об эквивалентности приведенной степени A_∞ и пространства петель ΩSA надстройки SA; 2) теорему Дольда и Тома об изоморфизме $\pi_i(SP^\infty X) \approx H_i(X)$; 3) эквивалентность любого ассоциативного H-пространства некоторому пространству петель.

5654. Одно предложение о полусимплициальных комплексах полугрупп. Пуппе (Ein Satz über semisimpliziale Monoidkomplexe. Puppe D.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 100—101 (нем.)

Краткое сообщение. Рассматривается (полный симплициальный) комплекс унитарных (т. е. обладающих единицами) полугрупп $M = (M_q)$, геометрическая реализация $|M|$ которого связна, и такое его симплициальное гомоморфное отображение $f: M \to G$ в некоторый комплекс группы G, что, во-первых, $Gq = f(M_q) \cdot f^{-1}(Mq)$ для всех q и, во-вторых, $f(a) = f(b)$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент c, что $ac = bc$. Утверждается, что при выполнении этих условий геометрическая реализация $f: |M| \to |G|$ отображения f является гомотопической эквивалентностью.

Указывается, что из этого результата можно получить новое доказательство изоморфизма $\pi_q(SP^\infty X) \approx \approx H_q(X)$ (РЖМат, 1959, 2481).

5655. Погружение многообразий. Хирш (Immersions of manifolds. Hirsch M. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 96 (англ.)

Отображение $f: M^m \to N^n$ $(m < n)$ одного дифференцируемого многообразия в другое есть погружение, если его якобиан имеет ранг m во всех точках.

Гомотопия $f_t: M \to N$ регулярна, если каждое f_t есть погружение и индуцируемая гомотопия на касательном пучке M непрерывна.

Если M^m параллелизуемо, то оно погружается в E^{m+1}. Каждое компактное M^3 погружаемо в E^4. Проективные пространства P^5 и P^6 погружаемы в E^7.

5656. Некоторые свойства множеств, расположенных на сфере. Игнатьев У. В., Уч. зап. Читинск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 2, 117—123

Предлагается элементарный метод доказательства двумерного случая теоремы А. Г. Шнирельмана о покрытии сферы замкнутыми множествами. Теорема сводится к случаю, когда множества суть двумерные полиэдры. Основная часть доказательства проведена фактически лишь для случая, когда хотя бы у одного из трех полиэдров компоненты связности односвязны. Чтение работы затрудняется множеством неточностей и опечаток. Е. Г. Скляренко

5657. Теорема двойственности для неособенных графов. Лихтенбаум Л. М., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 5, 185—190

Неособенными называются графы, у которых каждое ребро инцидентно двум вершинам и две вершины инцидентны не более чем одному ребру. Произведение матрицы инцидентности вершин и ребер неособенного графа K на транспонированную справа (соответственно слева) называется матрицей соседства вершин (соответственно ребер) графа K и обозначается A (соответственно B). Элемент a_{ik} матрицы A равен числу ребер графа K, инцидентных i-й и K-й вершинам (диагональный элемент a_{ii} равен числу ребер, инцидентных i-й вершине). Справедливо также аналогичное двойственное утверждение относительно элементов матрицы B. Доказывается, что $\operatorname{sp} A^m = \operatorname{sp} B^m$ для любого целого m (теорема 5). Геометрический смысл $\operatorname{sp} A^m$ (теоремы 1—4) состоит в следующем: рассматриваются определенные отображения простой ломаной с m ребрами в циклы графа K. Каждому такому отображению соответствует однозначно некоторое произведение m элементов матрицы A. Сумма всевозможных таких произведений называется указателем K степени m относительно вершин. Доказывается, что число ненулевых слагаемых этой суммы равно числу нетривиальных отображений вышеуказанного вида (теорема 4). Аналогично определяется указатель K степени m относительно ребер. Основной вывод состоит в том, что указатели K одинаковой степени относительно вершин и ребер равны (теорема 6).

Имеются опечатки. Ф. Я. Ветухновский

5658. Несколько теорем о соотношениях в конечных графах. Айгнер (Einige Sätze über Lagebeziehungen in endlichen Graphen. Aigner Alexander), J. reine und angew. Math., 1956, **195**, № 1-2, 18—21 (нем.)

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два подмножества вершин конечного графа без петель и двойных ребер. $\mathfrak{M}$ лежит по отношению к $\mathfrak{N}$ чётно (нечетно), если четно (нечетно) общее число ребер, идущих из всех вершин $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ к вершинам $\mathfrak{N}$. Отношение четности (нечетности) симметрично. Всякое непустое подмножество вершин графа, по отношению к которому каждая вершина графа понимается как одноточечное множество) лежит четно (нечетно), называется четным (нечетным) решением. Четные решения называются также просто решениями. Совокупность решений графа с добавлением пустого множества образует абелеву группу типа $2, 2, \ldots, 2$ относительно сложения, где под суммой нескольких множеств понимается множество точек, принадлежащих нечетному числу слагаемых. Естественным образом определяются независимые решения. Доказывается, что граф с нечетным (соответственно четным) числом вершин имеет нечетное (соответственно четное) число независимых решений (теорема 3). В частности, граф с нечетным числом вершин всегда имеет решение. Далее, существуют графы с данным числом k независимых решений. Общее число решений при этом будет $2^k - 1$. Доказывается, что при прибавлении или удалении одного ребра число независимых решений сохраняется или изменяется на 2; при добавлении или удалении вершины это число изменяется на 1. Доказывается, что нечетное решение существует тогда и только тогда, когда нет четного решения с нечетным числом вершин. Вводится понятие образа подмножества $\mathfrak{M}$, как множества вершин графа, лежащих по отношению к $\mathfrak{M}$ нечетно. Устанавливается критерий: $\mathfrak{N}$ есть образ некоторого множества тогда и только тогда, когда из каждого четного решения в $\mathfrak{N}$ входит четное число вершин. Ф. Я. Ветухновский

5659. Разложение конечного правильного графа нечетной степени на два множителя. Коциг (Rozkladkonečného pravidelného grafu neúrneho stupňa na dva faktory. Kotzig Anton), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 1, 27—32 (словацк.; рез. русск., нем.)

Пусть G — конечный правильный граф нечетной степени $2n+1$ (т. е. каждая вершина G инцидентна $2n+1$ ребру), содержащий $2m$ вершин. Автор доказывает, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы граф G распался на множители (правильные подграфы без общих ребер, содержащие вместе все ребра G) n-й и $(n+1)$-й степени, является следующее: В графе G имеется такая (так называемая листингова) система открытых ветвей (т. е. незамкнутых ломаных) $z_1, z_2, \ldots, z_n$, что каждое ребро графа принадлежит в точности одной ветви z_i и что каждая ветвь содержит нечетное число ребер. Как показывает приведенный пример, распадение на множители других степеней при этом остается возможным. J. Sedláček

5660. Циклы в критических графах. Дирак (Circuits in critical graphs. Dirac G. A.), Monatsh. Math., 1955, **59**, № 3, 178—187 (англ.)

Относительно понятий и определений см. РЖМат, 1955, 4308. Ребро называется перешейком, если удаление его из графа делает его несвязным.

Доказаны следующие утверждения: I. Если Γ — связный хроматический граф без перешейков и такой, что степень всех, за исключением, может быть, одной, вершин $\leqslant k-1$, то Γ есть критический граф. II. В порядке обобщения ранее полученных оценок в цитированной выше работе получена следующая:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{L_{k+1}(n)}{\log^2 n} \leqslant \frac{k}{\log^2\left(k\left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1}\right)}.$$

J. W. Jaworowski

5661. О семирегулярных топологиях. Хёниг (Sur les topologies semi-régulières. Hönig Chain Samuel), An. Acad. brasileira cienc., 1955, **27**, № 1, 1—6 (франц.)

Если дана топология T на фиксированном множестве E и кольцо A множеств без T-внутренних точек, рассматривается топология T_A, полученная присоединением кольца A к кольцу замкнутых в топологии T-мно-

жеств. Совокупность таких топологий T_A для всевозможных колец A без T-внутренних точек образует частично упорядоченное множество $\{T\}$. Систематизируются результаты, полученные разными авторами, относящиеся к связи множества $\{T\}$ с семирегулярными (существует база $\{u\}$ открытых множества u таких, что $\overline{u} = u$) абсолютно замкнутыми, вполне несвязными и другими топологиями на E. Б. Т. Левшенко

5662. О слоеных пространствах. Теорема стабильности. Эресман, Вейшу (Sur les espaces feuilletés: theórème de stabilité. Ehresmann Charles, Weishu Shih), C. r. Acad. sci., 1956, **243**, № 4, 344—346 (франц.)

Слоеное строение на E определяется совокупностью (T,T') двух топологий T и T' на E, удовлетворяющих условию: у всякой точки $x \in E$ существует окрестность U относительно T' такая, что топологии, индуцированные на U из T и T', совпадают. Компонента связности E относительно T' называется листом. Для такой слоистости можно определить факторпространство $\check{E}$. Лист F называется простым, если всякая его точка $x \in F$ имеет такую фундаментальную систему окрестностей W относительно T, что каноническое отображение $\check{W} \to \check{E}$ является гомеоморфизмом. Аналогично определяется простота и локальная простота, слоеного строения. Лист из простой окрестности W называется пластинкой. Определяется группа голономий слоеного строения.

Теорема стабильности: Пусть (T,T') — локально простая слоенное строение на E и: 1) у каждой точки $x \in E$ существует окрестность, бикомпактная относительно T; 2) T' регулярно и локально связно; 3) существует простая открытая окрестность U такая, что $\check{U}$ хаусдорфово. Пусть F — бикомпактный лист, $F \subset U$, такой, что группа голономий в $x \in F$ конечна (в частности, фундаментальная группа конечна). Тогда F имеет фундаментальную систему окрестностей, каждая из которых имеет бикомпактные листы. Если $\check{U}$ регулярно, то такие окрестности можно выбрать замкнутыми.

Б. Т. Левшенко

5663. Заметки о топологических пространствах. III. О пространстве максимальных идеалов полукольца. Исэки, Миянага (Notes on topological spaces. III. On space of maximal ideals of semiring. Iseki Kiyoshi, Miyanaga Yasue), Proc. Japan. Acad., 1956, **32**, № 5, 325—328 (англ.)

В множестве всех максимальных идеалов $\mathfrak{M}$ на положительном полукольце A (РЖМат, 1957, 2123) вводятся две топологии $\mathfrak{M}_\Delta$ и $\mathfrak{M}_\Gamma$. Множество Δ_x всех максимальных идеалов, содержащих x, объявляется подбазой в одной топологии, а множество $\Gamma_x = \mathfrak{M} - \Delta_x$ подбазой в другой.

Доказывается, что эти топологии совпадают тогда и только тогда, когда для каждого $a \in A$ существует такой элемент $b \in A$, что максимальные идеалы, не содержащие a, принадлежат семейству максимальных идеалов, содержащих b. Н. Я. Виленкин

5664. Заметки о топологических пространствах. IV. Функциональные полукольца на топологических пространствах. Исэки, Миянага (Notes on topological spaces. IV. Function semiring on topological spaces. Iséki Kiyoshi, Miyanaga Yasue), Proc. Japan Acad., 1956, **32**, № 6, 392—395 (англ.)

Ч. 1—3 см. РЖМат, 1957, 232; 1959, 3614; реф. 5663.

Рассматривается полукольцо $C^+(S)$ неотрицательных непрерывных ограниченных функций, заданных на хаусдорфовом пространстве S, и структура L замкнутых подмножеств пространства S.

Для каждого идеала $I \subset C^+(S)$ определяется множество I^*, которое оказывается фильтром всех подмножеств из L таких, что $A \subset I^*$, если существует F, $F \cap A = \Phi$ и такое $f \subset I$, что $\inf f(x) > \varepsilon$ на F для любого $\varepsilon > 0$. Для каждого фильтра $J \subset L$ определяется множество в структуре идеалов J^0, которое в случае вполне регулярного S есть просто идеал в $C^+(S)$ такое, что $f \subset J^0$ тогда и только тогда, когда существует $A \subset L$ такое, что $f < \varepsilon$ на A для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, имеются две операции $*$ и $\circ$ и их композиция $\alpha = *\circ$. Свойства этой операции: $I^\alpha \supset I$, $J^{\alpha-1} \supseteq J$. Фильтр (идеал) называется замкнутым, если $J^{\alpha-1} = J$ ($I^\alpha = I$). Основной результат: Существует взаимно однозначное соответствие между множеством замкнутых идеалов и множеством замкнутых фильтров. Для вполне регулярных пространств каждый максимальный идеал порождает ультрафильтр; для нормального пространства каждый ультрафильтр порождает максимальный идеал.

В. К. Белов

5665. P-пространства и бикомпактное расширение Стона—Чеха. Онучик (P-spaces and the Stone—Čech compactification. Onuchic Nelson), Anais Acad. brasil. cienc., 1958, **30**, № 1, 43—45 (англ.)

Вполне регулярное пространство, в котором пересечение счетного числа открытых множеств открыто, называется P-пространством. Приводятся несколько утверждений о P-пространствах и о топологических произведениях. Например, вполне регулярное пространство R является P-пространством тогда и только тогда, когда всякая сходящаяся на нем (в любой точке) последовательность непрерывных функций сходится к некоторой непрерывной функции (теорема 4). Пространство R дискретно, если непрерывна любая функция $f(x,y)$, определенная на произведении $R \times R$ и такая, что функции $f_x(y) = f(x,y)$ и $f_y x = f(x,y)$ непрерывны для всех точек x и y из R (теорема 3). Если чеховское расширение $\beta(R \times R)$ произведения $R \times R$ канонически гомеоморфно произведению $\beta R \times \beta R$, то пространство R псевдокомпактно, т. е. всякая функция, определенная на R, ограничена (теорема 5). Ю. М. Смирнов

5666. О свойстве Лебега в равномерных пространствах. Исэки (On the Lebesgue property in uniform spaces. Iséki Kiyoshi), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 239—241 (англ.)

Теорема 1. Для того чтобы каждое конечное открытое покрытие равномерного пространства E обладало свойством Лебега (РЖМат, 1956, 5146), необходимо и достаточно, чтобы E было нормальным пространством и чтобы каждая ограниченная непрерывная функция на E была равномерно непрерывна. А. С. Шварц

5667. Распространение понятия изометрии на равномерные пространства. Родс (A generalization of isometries to uniform spaces. Rhodes F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1956, **52**, № 3, 399—405 (англ.)

В действительности речь идет о распространении понятия изометрии на равномерное пространство с заданным базисом окружений диагонали Δ его квадрата (Бурбаки Н., Общая топология. Основные структуры, Москва, 1958, 151—161). Взаимно однозначное отображение f такого пространства E на себя автор называет „изобазизмом" (isobasism), если индуцируемое им отображение $E \times E$ на себя отображает каждое окружение базиса на себя. Изобазизмы и рассматриваются как обобщение изометрий метрического пространства. Естественным образом и понятия растягивающих и сжимающих отображений переносятся на равномерные пространства с заданным базисом окружений. Об этих отображениях доказывается несколько теорем, аналогичных известным ранее теоремам для метрических пространств. Чтобы заданный изоморфизм f равномер-

ного пространства являлся „изобазизмом", необходимо и достаточно равностепенной непрерывности преобразований группы $\{f^n : n = 0, \pm 1, 2, ...\}$ прямых и обратных n-кратных итераций. В. А. Ефремович

5668. Континуум и различные типы однородности. Берджесс (Continua and various types of homogeneity. Burgess C. E.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 2, 366—374 (англ.)

Развивается проблематика предыдущей статьи автора (РЖМат, 1955, 2393). Если плоский континуум M однороден в смысле близости и разбивает плоскость на конечное число связных областей, то M является простой замкнутой линией при выполнении одного из следующих условий: 1) M содержит простую замкнутую линию; 2) M является апосиндетическим; 3) M не содержит разрезающих точек; 4) M дугообразно связан. Относительно определенных здесь понятий см. РЖМат, 1955, 2593; 1956, 4394.

Отметим еще следующие теоремы: 1) Если разложимый континуум M является уникогерентным и однородным в смысле близости, то для всякого положительного целого n некоторый подконтинуум континуума M разбивает M более чем на n компонент. 2) Если невырожденный континуум M является мультикогерентным, и 2-однородным, то M есть простая замкнутая линия. 3) Если невырожденный континуум M однороден, наследственно локально связан, то он является простой замкнутой линией. А. С. Пархоменко

5669. О счетномерных пространствах. Нагата (On countable-dimensional spaces. Nagata Jun-iti), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 3, 146—149 (англ.)

Счетномерное пространство — пространство, представимое в виде счетной суммы нульмерных (в смысле покрытий) множеств. Для метрических пространств следующие свойства эквивалентны: α) пространство R счетномерное; β) существует счетная система локально конечных открытых покрытий $\mathfrak{B}_i$ таких, что $\mathfrak{B} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{B}_i$ — база пространства R и $\operatorname{order}_p B(\mathfrak{B}) < +\infty$ для всякой точки $p \in R$, где порядок $(\operatorname{order}_p \mathfrak{A})$ для точки p и системы множеств $\mathfrak{A}$ обозначает число множеств системы $\mathfrak{A}$, содержащих точку p, а $B(U)$ — граница множества U и $B(\mathfrak{A}) = \{B(U) | U \in \mathfrak{A}\}$; γ) для всех систем $\{U_\alpha \mid \alpha < \tau\}$ открытых множеств и $\{F_\alpha \mid \alpha < \tau\}$ замкнутых множеств, таких что $F_\alpha \subset U_\alpha$, $\alpha < \tau$ и таких, что $\{U_\beta \mid \beta < \alpha\}$ — локально конечна для каждого $\alpha < \tau$, существует система открытых множеств V_α, $\alpha < \tau$, для которой: 1) $F_\alpha \subset V_\alpha \subset U_\alpha$, $\alpha < \tau$; 2) $\operatorname{order}_p B(\mathfrak{B}) < +\infty$ для всякой точки $p \in R$, где $\mathfrak{B} = \{V_\alpha \mid \alpha < \tau\}$; δ) существует счетная система локально конечных покрытий пространства R, что 1) для каждой окрестности $U(p)$ всякой точки $p \in R$ существует такое i, что $S(p, \mathfrak{F}_i) \subset U(p)$, где $S(p, \mathfrak{F}_i)$ — звезда точки p относительно покрытия $\mathfrak{F}_i$; 2) $\mathfrak{F}_i = \{F(\alpha_1 \ldots \alpha_i) \mid \alpha_k \in \Omega, k = 1 \ldots i\}$, где $F(\alpha_1 \ldots \alpha_i)$ может быть пустым;

$$3)\ F(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}) = \bigcup \{F(\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1}, \beta) \mid \beta \in \Omega\};$$

4) $\sup \{\operatorname{order}_p \mathfrak{F}_i \mid i = 1, 2, ...\} < +\infty$ для всякой точки $p \in R$; ε) существует подмножество S бэровского пространства $N(\Omega)$ (для подходящего Ω) и замкнутое непрерывное отображение $f : S \to R$ такое, что для всякой точки $p \in R$ прообраз $f^{-2}(p)$ состоит из конечного числа точек.

Строится универсальное пространство для счетномерных пространств. Для пространств со счетной базой — это множество точек гильбертова параллелепипеда, имеющих конечное число рациональных координат. Б. Т. Левшенко

5670. Заметка о ретрактах в полных нормальных пространствах. Исэки (A note on retraction in completely normal spaces. Iseki Kiyoshi. Rev. Fac. Ci. Univ. Lisboa, 1954, **A 3**, 176—180 (англ.)

В случае вполне нормального пространства доказывается следующая теорема, которая раньше была доказана Ароншайном и Борсуком либо для метрических пространств со счетной базой либо для метрических компактов (Fund. Math., 1932, **18**, 193—197). Если $X = X_1 \cup X_2$, X_1 и X_2 замкнуты в X и $X_1 \cap X_2$ есть окрестностный ретракт ANR), то X есть окрестностный ретракт (соответственно ANR) тогда и только тогда, когда X_1 и X_2 являются окрестностными ретрактами (ANR). E. Michael

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, 156.

5671. Преобразование монотонного неприводимого отображения в монотонно-открытое и монотонно-открытые отображения куба, повышающие размерность. Келдыш Людмила, Матем. сб., 1957, **43**, № 2, 187—226

Дается подробное изложение метода (РЖМат, 1958 3609), позволяющего при некоторых условиях получить из монотонного неприводимого отображения f континуума X монотонно-открытое отображение F, причем $\dim f(X) - 1 \leqslant \dim F(X) \leqslant \dim f(X)$, а если $f(X)$ — многообразие, то $F(X) = f(X)$. Применением изложенного метода к ранее построенным примерам автора (РЖМат, 1956, 8675) получается положительное решение проблемы П. С. Александрова о существовании открытого отображения куба на куб большей размерности. Построены открытое монотонное отображение p-мерного куба на q-мерный куб при $q > p \geqslant 3$ и открытое монотонное отображение куба на континуум, в каждом открытом множестве которого содержится гильбертов параллелепипед. Сформулирован ряд новых проблем. Имеются опечатки даже в формулировке леммы 1. А. Д. Тайманов

5672. Замечание о топологическом произведении на отрезок числовой прямой. Киркор (A remark about cartesian division by a segment. Kirkor A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron et phys., 1958, **6**, № 6, 379—381, XXXI (англ.; рез. русск.)

Отрицательно для $n \geqslant 3$ решается следующая проблема: Пусть A есть E^n без какой-либо одной точки, B — открытое подмножество E^n. Следует ли из существования гомеоморфизма топологических произведений $A \times I$ и $B \times I$ ($I = [a, b]$) существование гомеоморфизма A и B? В построении противоречащего примера используется пример Фокса и Артина (Fox R. H., Artin E., Ann. Math., 1948, **49**, 979 — 999). В. К. Белов

5673. Регулярные отображения и пространство гомеоморфизмов двумерного многообразия. Хамстром, Дайер (Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold. Hamstrom Mary-Elizabeth, Dyer Eldon), Duke Math. J., 1958, **25**, № 3, 521—531 (англ.)

Кнезер показал (Math. Z., 1926, **25**, 362—372), что пространство $H(S^2)$ сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов сферы S^2 гомотопически эквивалентно группе $SO(3)$ вращений сферы S^2. Из результатов Кнезера вытекает также, что пространство $H(S^2)$ локально стягиваемо. Авторы, пользуясь, так же как и Кнезер, теорией функций комплексного переменного, доказывают ряд предложений о группах гомеоморфизмов двумерных многообразий. Вот типичный пример. Пусть M — двумерное замкнутое многообразие с краем, N — состоящее из конечного числа компонент замкнутое подмножество края многообразия M (множество N может быть пустым). Тогда пространство гомеоморфизмов многообразия M на себя, оставляющих на месте каждую точку множества N, локально стягиваемо.

Пусть f — такое регулярное отображение полного метрического пространства X на конечномерное пространство Y, что прообразы $f^{-1}(y)$ всех точек $y \in Y$ гомеоморфны между собой и являются двумерными замкнутыми многообразиями с краем. При этих условиях

отображение f является локально тривиальным расслоением. А. С. Шварц

5674. О поведении циклов при непрерывных отображениях компактов. Фрум-Кетков Р. Л., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 2, 249—252

Под циклом понимается истинный цикл по полю рациональных чисел. Существенным циклом называется цикл не гомологичный нулю на некотором своем носителе. Существенным носителем цикла называется носитель, на котором цикл не гомологичен нулю. Будем говорить, что отображение f отображает цикл z^k в нуль, если некоторый существенный носитель цикла z^k отображается либо в множество, не содержащее существенных k-мерных циклов, либо в k-мерное ориентируемое многообразие M^k и цикл $f(z^k)$ гомологичен нулю в M^k.

В заметке намечаются доказательства ряда теорем, гарантирующих при некоторых условиях существование достаточного количества отображающихся в нуль циклов. Вот типичные примеры.

Теорема 1. Пусть компакт F является существенным носителем n-мерного цикла z^n, f — непрерывное отображение компакта F в n-мерное замкнутое ориентируемое многообразие M^n, при котором цикл z^n отображается в нуль. Тогда при любом k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, в F имеется k-мерный существенный цикл, гомологичный нулю в F и отображающийся в нуль.

Теорема 4. Пусть f — непрерывные отображения n-мерного замкнутого ориентируемого многообразия M^n в евклидово пространство R^n. Пусть $q < n-1$ и ξ^q — такой гомологичный нулю в M^n q-мерный цикл многообразия M^n, что цикл $f(\xi^q)$ не гомологичен нулю на $f(\Phi)$, где Φ — существенный носитель цикла ξ^q. Тогда в R^n существует такой полиэдр Q, не содержащий отличных от нуля p-мерных циклов ($p+q=n-1$), что множество $f^{-1}(Q)$ является существенным носителем p-мерного цикла z^p, гомологичного нулю в M^n. А. С. Шварц

5675. О поведении циклов, не гомологичных нулю, при отображении n-мерного многообразия в n-мерное евклидово пространство. Фрум-Кетков Р. Л., Докл. АН СССР, 1958, **118**, № 1, 42—44

Пусть M^n и M_1^n — n-мерные ориентируемые замкнутые многообразия, f — непрерывное отображение M^n в истинное подмножество многообразия M_1^n. Будем говорить, что класс гомологий $z \in H_s(M^n)$ принадлежит множеству Λ_f^s (соответственно $\overline{\Lambda}_f^s$), если найдутся для любого $\varepsilon > 0$ замкнутое подмножество F многообразия M^n и полиэдр $N \subset M_1^n$, удовлетворяющие условиям: а) множество F является носителем цикла из класса z; б) полиэдр N не содержит отличных от нуля S-мерных циклов; в) $f(F) \subset N$ (существует ε-сдвиг множества $f(F)$ в полиэдр N). Через $\mu_f^s[\mu_f^s]$ обозначим число линейно независимых классов гомологий в Λ_f^s (соответственно в $\overline{\Lambda}_f^s$). В работе намечаются доказательства следующих неравенств: если $p^s(M^n) \neq 0$, то $\mu_f^s + \mu_f^{n-s} \geqslant p^s(M^n)$; если $p^1(M^n) \neq 0$, то $\mu_f^1 + \mu_f^{n-1} \geqslant p^1(M^n)$ (через $p^s(M^n)$ обозначено s-мерное число Бетти многообразия M^n, гомологии рассматриваются по полю рациональных чисел). Указывается еще одна теорема того же типа. А. С. Шварц

5676. О группах Чеха бесконечных цепей и конечных коцепей. Чогошвили Г. С., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1957, **19**, № 5, 513—520 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1957, **19**, № 5, 513—520

Частично упорядоченная система $S = \{\alpha\}$ называется общенаправленной, если для $\alpha < \beta$, $\alpha < \gamma$ существует δ такой, что $\delta > \beta, \gamma$. Агрегатом максимальных идеалов системы S называется совокупность $\{S_\tau\}$ классов S_τ, эквивалентных между собою элементов множества S при эквивалентности: $\alpha \sim \beta$, если существует $\delta < \alpha, \beta$. Каждый S_τ является направленной системой. Общенаправленной системой является совокупность звездно-конечных открытых покрытий $\{O_\alpha\}$ топологического пространства X, упорядоченная следующим образом; $O_\alpha < O_\beta$, если O_β вписано в O_α, то каждый элемент из O_α содержит только конечное число элементов из O_β. Рассматривая на каждом нерве таких покрытий $\{O_\alpha\}$ r-мерную группу гомологий бесконечных цепей и r-мерную группу когомологий конечных коцепей, получаем соответственно обратную и прямую общенаправленные системы групп. Максимальные идеалы этих общенаправленных систем являются уже направленными системами, и совокупность их предельных групп называется соответственно r-мерным гомологическим и когомологическим агрегатом пространства X. Доказываются свойства агрегатов пары (X, A), $A \subset X$, аналогичные аксиомам Эйленберга — Стинрода. Н. А. Берикашвили

5677. О соотношениях между стинродовскими степенями классов когомологий. Адем (The relations of Steenrod powers of cohomology classes. Adem José), Algebr. Geometry and Topol. Princeton, N. J., Univ. Press, 1957, 191—238 (англ.)

Приводятся подробные доказательства указанных автором соотношений между итерированными циклическими приведенными степенями (РЖМат, 1954, 2904). А. С. Шварц

5678. Когомологии p-кратной симметрической степени n-мерной сферы по модулю p. Накаока (Cohomology mod p of the p-fold symmetric products of spheres. Nakaoka Minoru), J. Math. Soc. Japan, 1957, **9**, № 4, 417—427 (англ.)

Автор вычисляет алгебру когомологий mod p p-кратной симметрической степени n-мерной сферы (p — простое число). Исследуются также p-е приведенные степени Стинрода в этом пространстве. А. С. Шварц

5679. Абстрактная гомотопия. II. Кан (Abstract homotopy. II. Kan Daniel M.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1956, **42**, № 5, 255—258 (англ.)

Гомотопией в произвольной категории $\mathfrak{B}$ автор называет функтор $\mathfrak{I}: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, рассматриваемый вместе с тремя естественными преобразованиями $O: E \to \mathfrak{I}$, $1: E \to \mathfrak{I}$ и $\eta: \mathfrak{I} \to E$, где $E: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ — тождественный функтор, подчиненными соотношениям $\eta O = \eta 1 = i$, где $i: E \to E$ — естественное тождественное преобразование. Существование такой гомотопии позволяет ввести понятие гомотопных отображений и построить некоторый функтор $\mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — категория кубических комплексов, являющийся обобщением классического кубического сингулярного функтора. М. М. Постников

5680. Вложения проективных пространств. Джеймс (Embeddings of real projective spaces. James I. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 4, 555—557 (англ.)

Пусть $D(m)$ равно наименьшему целому числу q такому, что P^m может быть вложено в E^q, а $C(m,n)$ — наименьшее целое число k такое, что существует отображение $W: S^m \times S^n \to S^k$, удовлетворяющее условиям $w(Tx, y) = Tw(x, y) = w(x, Ty)$ (P^m — действительное m-мерное проективное пространство, E^q — q-мерное евклидово пространство, S^n — n-мерная сфера, T — антиподное отображение сферы). В работе устанавливается неравенство $D(m+n+1) \leqslant C(m, n) + D(m) + D(n) + 1$. Используя этот результат, доказано, $D(15) \leqslant 2D(7) + 8$. Также приведены следующие известные ранее результаты: $D(m) \leqslant D(m+1)$; $D(m) < 2m$ (m —

нечетно), $D(m) \leqslant 2m$ (m — четно), $D(m) \geqslant m+2$; $D(m) = 2m$, если m — степень двойки, и $C(m, n) = m$, если $m+1$ выражается в виде $16^a bc$, где a — неотрицательное целое, b — нечетно и $c = 1, 2, 4$ или 8, и $n < 8a+c$.
В. А. Кузьминов

5681. О группах внутренних гомологий Ω^k. Адати (On the groups of cobordism Ω^k. Adachi Masahisa), Nagoya Math. J., 1958, **13**, 135—156 (англ.)

Автор получает некоторые результаты о группах внутренних гомологий Ω^k (РЖМат, 1953, 1123).

Примечание референта. Группы Ω^k полностью вычислены Авербухом. Именно, Авербух показал, что группы Ω^k не имеют p-кручения при $p>2$, что в силу результатов Тома (РЖМат, 1953, 1124) и Рохлина (РЖМат, 1959, 2489) приводит к полному описанию групп Ω^k.
А. С. Шварц

5682. О суперкомплексах. Гуген хейм (On supercomplexes. Gugenheim V. K. A. M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1957, **85**, № 1, 35—51 (англ.)

Суперкомплексом автор называет множество A, градуированное конечными последовательностями неотрицательных чисел (т. е. представленное в виде объединения некоторых своих подмножеств $A(n_1, \ldots, n_k)$, где $n_1 \geqslant 0, \ldots, n_k \geqslant 0$ и k произвольно), в котором определены отображения $\partial_i{}^t : A(n_1, \ldots, n_k) \to A(n_1, \ldots, n_t - 1, \ldots, n_k)$ и $s_i{}^t : A(n_1, \ldots, n_k) \to A(n_1, \ldots, n_t + 1, \ldots, n_k)$, обладающие следующими свойствами: 1) для любого t отображения $\partial_i{}^t$ и $s_i{}^t$ удовлетворяют известным соотношениям между граничными операторами и операторами вырождения в полных полусимплициальных комплексах; 2) отображения с различными t коммутируют друг с другом. Любой полный полусимплициальный комплекс A, естественно, вкладывается в суперкомплекс PA, для которого множества $PA(n_1, \ldots, n_k)$ состоят из всех симплициальных отображений $\Delta^{n_1} \times \ldots \times \Delta^{n_k} \to A$, где Δ^n — упорядоченный n-мерный симплекс. Основной результат: если полусимплициальный комплекс A удовлетворяет условию Кана (РЖМат, 1957, 4680; 1959, 215, где это условие сформулировано для кубических комплексов), то суперкомплекс PA также обладает этим свойством (условие Кана для суперкомплексов формулируется очевидным образом). Аналогичный результат имеет место и для симплициальных отображений (условие Кана для отображений моделирует теорему о накрывающей гомотопии, в связи с чем отображения, удовлетворяющие условию Кана, автор называет расслаивающими отображениями).

В заключительном пункте работы рассматривается полусимплициальный комплекс Y^X, где X и Y — произвольные полусимплициальные комплексы (симплексами размерности q комплекса Y^X являются симплициальные отображения $X \times \Delta^q \to Y$) и доказывается, что если комплекс Y удовлетворяет условию Кана, то тем же свойством обладает и комплекс Y^X, причем для любого подкомплекса A комплекса X естественное отображение ограничения $Y^X \to Y^A$ является расслаивающим отображением.

Кроме того, автор доказывает, что условие Кана (для полусимплициальных комплексов или симплициальных отображений) равносильно некоторой его ослабленной форме (соответствующая теорема для кубических комплексов доказана Каном).
М. М. Постников

5683. Одно условие того, что пространство схоже с топологической группой. Сугавара (A condition that a space is grouplike. Sugawara Masahiro), Math. J. Okayama Univ., 1957, **7**, № 2, 123—149 (англ.)

В классе гомотопически ассоциативных H-пространств с делением выделяется подкласс пространств, схожих с топологическими группами, и доказывается, что счетный полиэдр F тогда и только тогда является пространством, схожим с группой, когда существует такой счетный полиэдр E, содержащий полиэдр F в качестве подполиэдра и стягивающийся по себе в некоторую вершину полиэдра F (причем в процессе деформации эта вершина остается неподвижной), что пара (E, F) имеет тот же самый гомотопический тип, что и некоторое пространство B (последнее означает, что существует непрерывное отображение $(E, F) \to (B, b)$, где b — некоторая точка пространства B, индуцирующее изоморфизм относительных гомотопических групп (во всех размерностях).
М. М. Постников

5684. О группе автоморфизмов комплексно аналитического главного расслоенного пространства. Моримото (Sur le groupe d'automorphismes d'un espace fibré principal analytique complexe. Morimoto Akihiko), Nagoya Math. J., 1958, **13**, 157—168 (франц.)

Основной результат работы: снабженная компактно-открытой топологией группа автоморфизмов комплексно аналитического главного расслоенного пространства с компактной базой является комплексной группой Ли.
А. С. Шварц

5685. Некоторые применения спектральной последовательности к кратным интегралам вариационного исчисления и к интегральным инвариантам. Дедеккер (Quelques applications de la suite spectrale aux intégrales multiples du calcul des variations et aux invariants intégraux. Dedecker P.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, **24**, № 10, 276—295; 1956, **25**, № 6, 387—399 (франц.)

В первой главе работы автор, следуя Дээвелю (РЖМат, 1957, 1252), рассматривает дифференциальные группы с фильтрацией и связанные с ними спектральные диаграммы. Пусть G — абелева группа, M — частично упорядоченное множество и пусть каждому $p \in M$ сопоставлена подгруппа $G^p \subset G$, так что выполнены следующие условия: если $p \leqslant q$, то $G^p \subset G^q$; $G = \bigcup_{p \in M} G^p$; $\bigcap_{p \in M} G^p = \{0\}$. Тогда автор говорит, что задана возрастающая фильтрация группы G. Отличие от изложения Дээвеля состоит в том, что у последнего роль множества M играет множество действительных чисел.

Во второй главе содержатся определения и простейшие свойства пучков и копучков на топологическом пространстве X. Пусть с каждым открытым множеством $U \subset X$ связана группа A^U и для каждой пары $U \subset V$ задан гомоморфизм $s^{vu} : A^u \to A^v$, так что для $u \subset v \subset w$ имеем $s^{vw} s^{uv} = s^{uw}$. Если $x \in X$, то обозначим через A^x предел прямого спектра групп $A^U (x \in u)$. В множестве $A = \bigcup_{x \in X} A^x$ вводится естественная топология и A называется копучком на пространстве X. Определяются гомологии пространства X с коэффициентами в копучке. Приводятся примеры копучков, у которых естественная проекция $p : A \to X$ не является локальным гомеоморфизмом.
А. Л. Онищик

5686. Вариационное исчисление и алгебраическая топология. Дедеккер (Calcul des variations et topologie algébrique. Dedecker Paul, Mém. Soc. Roy. sci. Liège, 1957, **19**, № 1, 216) (франц.)

Излагается круг вопросов, связанных с введением в многообразия вариационных строений. Применение современного аппарата дифференциальной геометрии и топологии позволяет автору поставить основную задачу и провести все изложение в чрезвычайно общей форме.

Книга делится на две части. Первая часть содержит определения и простейшие свойства ряда понятий геометрии и топологии, используемых автором в дальнейшем: пучков, сингулярных кубических гомологий, внешних дифференциальных систем, групп с фильтрацией и связанных с ними спектральных диаграмм. Приведем

некоторые необходимые определения. Основным объектом изучения является дифференцируемое многообразие V класса C^l ($l = 1, \ldots, \infty, \omega$). Для простоты будем считать, что $l=\infty$, и называть гладкими отображения класса C^∞. Кубом размерности p в многообразии V называется гладкое отображение p-мерного единичного куба I^p в V; свободная абелева группа, порожденная множеством всех p-мерных кубов, обозначается через $Q_p(V)$ и называется группой p-мерных цепей. Пусть $p \leqslant q$ и $\varphi : I^p \to I^q$ — регулярное гладкое отображение. Тогда с каждым кубом $u : I^q \to V$ связан куб $u\varphi : I^p \to V$, называемый подкубом куба u. В частности, если $\varphi' : I^p \to I^p$ — отображение вида $\varphi(t^1, \ldots, t^p) = (a_1 t^1 + b_1, \ldots, a_p t^p + b_p)$, то $u\varphi$ называется куском куба u; если при этом $a_i = 1$, $b_i = 0$ ($i > 1$), то кусок называется редукцией и в случае $a_1 = a$, $b_1 = 0$ обозначается через $\gamma_a u$. Обозначим через $|p|$ множество $\{1, 2, \ldots, p\}$. Пусть L — подмножество множества $|p|$, содержащее $p-q$ элементов, $M = |p| \setminus L$, $\eta : L \to |p-q|$ и $\varsigma : M \to |q|$ — строго возрастающие отображения. Для каждой точки $t = (t^1, \ldots, t^{p-q}) \in I^{p-q}$ определим отображение $\varphi^t_L : I^q \to I^p$ формулой: $\varphi^t_L(x^1, \ldots, x^q) = (y^1, \ldots, y^p)$, где $y^i = t^{\eta(i)}$, если $i \in L$ и $y^i = x^{\varsigma(i)}$, если $i \in M$. Подкуб $u\varphi^t_L = \lambda^t_L u$ куба u называется его сечением; если $L = |p-q|$, то сечение называется вертикальным. Все эти операции над кубами продолжаются в эндоморфизмы группы $Q(V) = \sum_p Q_p(V)$. Подгруппа R группы $Q(V)$ называется вполне насыщенной, если выполнены следующие условия: 1) R порождена кубами; 2) всякий подкуб куба из R содержится в R. Если вместо 2) потребуется, чтобы всякий кусок (всякий кусок и всякое сечение) куба из R содержался в R, то R называется почти насыщенной (соответственно насыщенной). Пусть F и F' — свободные абелевы группы с образующими g_i, g'_j соответственно, $f : F \to F'$ — гомоморфизм, $a \in F$. Пусть $a = \sum_{i \in X} \alpha_i g_i$, $f(a) = \sum_{j \in Y} \beta_j g'_j$, где $\alpha_i \neq 0$, $\beta_j \neq 0$. Гомоморфизм f называется строгим на элементе a, если существует такое отображение $\varphi : X \to Y$, что $f(g_i) = g'_{\varphi(i)}$ ($i \in X$).

Основную роль во второй части книги играет понятие вариационного строения. Пусть A — насыщенная подгруппа группы $Q(V)$, A_p — ее компонента размерности p, A^p — подпучок пучка G^p ростков дифференциальных форм степени p на многообразии V, ортогональный к группе A_p. Сечение пучка G^p/A^p называется p-мерной A-коцепью. Вариационным строением автор называет набор $\{V, A, B, \Omega_p\}$, где A — насыщенная подгруппа группы $Q(V)$, порожденная регулярными кубами размерностей $\leqslant p$, $B \subset Q(V)$ — вполне насыщенная подгруппа, содержащая все кубы, не зависящие от первой координаты. Ω_p — p-мерная A-коцепь. Группа A называется группой условий связи, B — группой граничных условий. Гомотопией цепи a называется такая цепь ha, что $\lambda_1{}^0 ha = a$. Положим $h_t a = \lambda_1^t ha$. Гомотопия ha называется A-гомотопией, если $h_t a \in A$ для всех $t \in I$. Границу ∂b цепи b можно представить в виде $\partial b = (\lambda_1^1 - \lambda_1^0) b - \lambda b$, где λb — „боковая поверхность“ b. A-гомотопия ha называется (A, B)-гомотопией, если $\lambda(ha) \in B$. Гомотопия ha называется строгой, если эндоморфизм λ_1^* является строгим на ha. Пусть $Z_p(A, B)$ — группа цепей $a \in A_p$ таких, что $\partial a \in B$ и пусть ha — A-гомотопия цепи $a \in Z_p(A, B)$. С A-коцепью Ω_p связана линейная функция (a, Ω_p) на группе A, принимающая вещественные значения. Оказывается, что функция $f_h(t) = (h_t a, \Omega_p)$ является гладкой. Гомотопия ha называется экстремальной, если $f'_h(0) = 0$. Цепь $a \in Z_p(A, B)$ называется экстремальной, если каждая ее строгая (A,B)-гомотопия экстремальна. Вариационное строение называется свободным, если выполнены следующие условия: 1) всякая точка многообразия V лежит внутри некоторого куба из A_p; 2) если ha — строгая гомотопия цепи $a \in A_p$, то при достаточно малых τ цепь $\gamma_\tau ha$ является A-гомотопией цепи a. В случае свободного строения имеем $A^p = 0$, и Ω_p — дифференциальная форма степени p. Для свободного строения вычисляется функция $f'_h(t)$ и даются различные условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данная цепь была экстремальна. Изучение общих вариационных строений производится путем сведения их к свободным строениям. Для этой цели вводится понятие накрытия (relèvement) вариационного строения. Пусть π — гладкое отображение многообразия $\bar{V}$ в V, ранг которого всюду равен $\dim V \leqslant \dim \bar{V}$, $\pi_* : Q(\bar{v}) \to Q(v)$ — индуцированный гомоморфизм. Строгим прообразом подгруппы $X \subset Q(V)$ называется подгруппа группы $Q(\bar{V})$, порожденная кубами $\bar{u}$, для которых $\pi_* \bar{u} \in X$. Допустим, что заданы вариационные строения $\mathfrak{B} = \{V, A, B, \Omega_p\}$ и $\tilde{\mathfrak{B}} = \{\bar{V}, \tilde{A}, \bar{B}, \tilde{\Omega}_p\}$ и почти насыщенная подгруппа $\check{A}_p \subset \tilde{A}_p$. Говорят, что $\tilde{\mathfrak{B}}$ есть накрытие строения $\mathfrak{B}$ по отношению к π и к подгруппе $\check{A}_p$, если выполнены следующие условия: 1) строгий прообраз группы B содержится в $\bar{B}$; 2) $\pi_* \check{A}_p = A_p$; 3) если $\check{u} \in \check{A}_p$, то $(\check{u}, \tilde{\Omega}_p) = (\pi_* \check{u}, \Omega_p)$; 4) если $\check{u} \in \check{A}_p$ и если v — $(p+1)$-мерный куб в V, всякое p-мерное вертикальное сечение которого содержится в A, удовлетворяющий условию $\pi_* \check{u} = \lambda_1{}^0 v$, то существует $(p+1)$-мерный куб $\check{v}$ в $\bar{V}$, всякое p-мерное вертикальное сечение которого содержится в $\check{A}_p$, такой, что $\check{u} = \lambda_1{}^0 \check{v}$ и что $\pi^* \check{v} = \gamma_\tau v$; 5) всякая экстремальная цепь строения $\tilde{\mathfrak{B}}$ содержится в $\check{A}_p$; 6) для всякой экстремальной цепи a строения $\mathfrak{B}$ существует экстремальная цепь $\tilde{a}$ строения $\tilde{\mathfrak{B}}$ такая, что гомоморфизм π_* является строгим на $\tilde{a}$ и $\partial \tilde{a}$, причем $\pi_* \tilde{a}$ — стандартное подразделение цепи a; 7) если π_* является строгим на цепях $\check{a} \in Q_p(\bar{v})$ и $\partial \check{a}$ и ha — строгая (A,B)-гомотопия цепи $a = \pi_* \check{a}$, то существует строгая $(\check{A}_p, B)$-гомотопия $k\check{a}$ такая, что $\pi_* k\check{a}$ — редукция цепи ha. Если выполнены все эти условия, кроме 6), то строение $\tilde{\mathfrak{B}}$ называется полунакрытием строения $\mathfrak{B}$. Доказывается, что всякое вариационное строение обладает свободным полунакрытием. Для специального класса так называемых классических вариационных строений доказывается существование свободного накрытия.

А. Л. Онищик

См. также: 5414, 5583, 5584, 5686, 5987, 5988, 6257.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

5687. Решение тринадцатой проблемы Гильберта. Матем. просвещение, вып. I, 1957, 162, 166

Указываются этапы на пути получения ответа на вопрос Гильберта о возможности или невозможности выразить непрерывную функцию трех переменных суперпозициями непрерывных функций двух переменных. Отмечаются работы А. Н. Колмогорова, В. И. Арнольда, А. Г. Витушкина, А. С. Кронрода, А. Я. Дубовицкого и Р. А Минлоса.

5688. Некоторые вопросы приближения и представления функций. Арнольд В. И., Колмогоров А. Н., Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 72 (русск.); 72—73 (англ.)

5689. Замечание о конечноаддитивной мере. Бейд (A remark on finitely additive measures. Bade William G.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 3, 190—191 (англ.)

Доказывается (неэффективно), что если Σ — бесконечная алгебра множеств (см. стр. 26 книги Халмоша—РЖМат, 1954, 3653К) абстрактного пространства S, то существует конечная функция множества μ на Σ, являющаяся неограниченной и конечноаддитивной.

Ш. С. Пхакадзе

5690. Об эффективно неограниченных аддитивных функциях множеств. Гладкий А. В., Уч. зап. Коломенск. пед. ин-та, 1958, **2**, 111—116

Доказывается, что если построена без использования аксиомы выбора неограниченная аддитивная функция множества $\mu(M)$, определенная на некоторой системе множеств $\mathbf{M}$, вполне аддитивной и содержащей вместе с любыми двумя множествами их пересечение и разность, и, причем, если можно указать без использования аксиомы выбора последовательность $M_1, M_2, \ldots$ множеств из $\mathbf{M}$, удовлетворяющую условию $\mu(M_n) > n$ $(n=1,2,\ldots)$, то можно без использования аксиомы выбора построить неизмеримую по Лебегу функцию действительного переменного.

Ш. С. Пхакадзе

5691. Аддитивные и σ-аддитивные функции в алгебраической теории меры. Бертолини (Funzioni additive e funzioni σ-additive nella teoria algebrica della misura. Bertolini F.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 73 (итал.)

5692. Сингулярные множества и хаусдорфовы меры. Олифант (Singular sets and Hausdorff measures. Oliphant M. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 86 (англ.)

Шоке (Choquet) определил сингулярное множество как измеримое множество бесконечной меры, все подмножества которого измеримы и имеют меру нуль или бесконечность. Автор указывает, что аналитическое множество не может быть сингулярным относительно любой хаусдорфовой меры h, где h — любая неотрицательная, неубывающая, непрерывная функция с $h(0+)=0$.

5693. Метрическая теория в пространствах с мерой. Тшицинский (Metric theory in spaces having a measure. Trjitzinsky W. J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 90—91 (англ.)

5694. Об усилении теоремы Лебега о точках плотности. Тейлор (On sharpening the Lebesgue density theorem. Taylor S. J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 90 (англ.)

Доказывается, что для каждого линейного измеримого по Лебегу множества E существует действительная функция $\psi(h)$, убывающая к нулю при убывании h к нулю, такая, что для почти всех точек $x \in E$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{|(x-h, x+h) \cap CE|}{h\psi(h)} = 0. \qquad (1)$$

Однако не имеется такой функции $\psi(h)$, удовлетворяющей соотношению (1) для каждого измеримого множества E. С другой стороны можно показать, что всегда существует хаусдорфова мера, более тонкая чем мера Лебега, относительно которой исключительное подмножество множества E, где (1) не выполняется, имеет меру нуль.

5695. Об арифметическом, геометрическом и гармоническом средних расстояний между точками множества. Лея (Sur les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques des distances mutuelles des points d'un ensemble. Leja F.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 84 (франц.)

5696. О максимальной теореме Харди—Литлвуда. Цудзи (On Hardy—Littlewood's maximal theorem. Tsuji Masatsugu), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1957, **6**, № 1, 33—42 (англ.)

Доказываются теоремы:

1. Пусть K — единичная сфера $r=1$ трехмерного евклидова пространства, $f(x) \geqslant 0$ — измеримая функция на K и $f(x) \in L_p(K)$. Пусть

$$\theta(x) = \sup \frac{1}{|\Delta(x)|} \int_{\Delta(x)} f(t)\, d\sigma(t), \quad 0 < |\Delta(x)| < 4\pi,$$

где $d\sigma(t)$ — элемент площади сферы K, $\Delta(x)$ — часть сферы K внутри некоторого шара с центром в $x \in K$, $|\Delta(x)|$ — площадь этой части. Тогда

$$\int_K \theta^p(x) d\sigma(x) \leqslant \left(\frac{5p}{p-1}\right)^p \int_K f^p(x)\, d\sigma(x) \quad (p>1).$$

2. Пусть $w(q)$ — неотрицательная субгармоническая внутри K и непрерывная на K функция. Пусть $S(x,\alpha)$ $(0 < \alpha < \pi/2)$ — совокупность точек внутри K, отстоящих от точки $x \in K$ не более, чем на $1/2$, и лежащих внутри конуса с вершиной в x, ось которого соединяет центр K с точкой x, а образующая составляет угол α с осью конуса. Пусть

$M(x,\alpha) = \sup_{q \in S(x,\alpha)} w(q)$. Тогда

$$\int_K M^p(x,\alpha)\, d\sigma(x) \leqslant A(p,\alpha) \int_K w^p(x)\, d\sigma(x) \quad (p>1),$$

где $A(p,\alpha)$ — постоянная, зависящая только от p и α.

Эти теоремы являются аналогами теорем Харди и Литлвуда, получающихся из теорем 1 и 2 заменой трехмерного пространства на двумерное, шара на круг, сферы на окружность, конуса на сектор. Дано также новое доказательство первой из теорем Харди и Литлвуда.

Х. Л. Смолицкий

5697. О сингулярных интегралах. Зигмунд (On singular integrals. Zygmund A.), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 3-4, 468—505 (англ.)

Статья представляет собой изложение лекций, читанных автором в Международном летнем математическом центре в Варенне (Италия) в июне 1957 г., и посвящена преимущественно исследованиям автора и Кальдерона, опубликованным в ряде предшествующих работ; со-

общены и некоторые новые результаты. Результаты совместной работы Кальдерона и автора (РЖМат, 1957, 2173) не приводятся. Вкратце изложены также некоторые ранние результаты референта и Жиро. Некоторые из приведенных в статье теорем даны без доказательств или с неполными доказательствами. Перечислим некоторые из результатов статьи.

Пусть E_n — евклидово n-мерное пространство, x, y — его точки, $x' = x/|x|$, $K(x) = |x|^{-n}\Omega(x')$, Σ — единичная сфера в E_n и пусть $\int_\Sigma \Omega(x')\,dx' = 0$.

Положим

$$\widetilde{f}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{f}_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x-y|>\varepsilon} K(x-y)f(y)\,dy =$$

$$= \int_{E_n} K(x-y)f(y)\,dy.$$

1. Если $\Omega(x') \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $\alpha > 0$, и $f(x) \in L_p(E_n)$, $1 < p < \infty$, то $\widetilde{f}(x)$ существует почти всюду и $\|\widetilde{f}\|_p \leqslant A_p \|f\|_p$, где A_p зависит только от p и Ω. Одновременно

$$\|\widetilde{f}_*\|_p \leqslant A_p \|f\|_p, \text{ где } \widetilde{f}_*(x) = \sup_{\varepsilon>0}|\widetilde{f}_\varepsilon(x)|.$$

2. Пусть $\Omega(x')$ удовлетворяет перечисленным выше условиям и пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортогональный базис в E_n. Образуем векторы $\Sigma\mu_k e_k$, где μ_k — целые числа, и занумеруем эти векторы натуральными числами; пусть $\{h_q\}$, $q = 0,1,2\ldots$, — полученная таким образом последовательность. Если

$$X = \{x_0, x_1, \ldots\} \in l_p \text{ и } \widetilde{X} = \{\widetilde{x_0}, \widetilde{x_1}, \ldots\},$$

где $\widetilde{x_q} = \sum_{\substack{r=0,\\ r\neq q}}^{\infty} K(h_q - h_r)x_r$, $q = 0,1,\ldots$,

то $\widetilde{X} \in l_p$ и $\|\widetilde{X}\|_p \leqslant A_p \|X_p\|$.

3. Если $\Omega(x')\ln^+|\Omega(x')|$ суммируемо на Σ, то $\|\widetilde{f}\|_2 \leqslant A_2\|f_2\|$. При этом $\|\widetilde{f} - \widetilde{f}_{\varepsilon,\eta}\| \to 0 (\varepsilon\to 0,\ \eta\to\infty)$, где

$$\widetilde{f}_{\varepsilon,\eta}(x) = \int_{\varepsilon<|x-y|<\eta} K(x-y)f(y)\,dy.$$

4. Пусть $\hat{K}(x)$ — преобразование Фурье ядра $K(x)$. Справедлива формула

$$\hat{K}(x) = (2\pi)^{-n/2}\int_\Sigma \Omega(y')\left\{\ln\frac{1}{\cos(x,y')} - \frac{\pi i}{2}\operatorname{sgn}\cos(x,y')\right\}dy'.$$

5. Пусть векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеют общую длину 2π. Нумерацию векторов h_q произведем так, чтобы $h_0 = 0$. Положим

$$K^*(x) = K(x) + \sum_{q=1}^{\infty}\left\{K(x+h_q) - K(h_q)\right\}.$$

Пусть Q_n — куб в E_n с центром в начале и длиной ребра 2π и пусть на этот раз

$$\widetilde{f}(x) = \int_{Q_n} K^*(x-y)f(y)\,dy.$$

Тогда $\|\widetilde{f}\|_p \leqslant A_p\|f\|_p$, где $\|\ \|_p$ есть норма в $L_p(Q_n)$.

С. Г. Михлин

5698. О промежуточных значениях производных аддитивных функций интервала. Мишик (Der Mittelwertsatz für additive Intervallfunktionen. Mišík L.), Fundam. math., 1957, **45**, № 1, 64—70 (нем.)

Пусть $\varphi(I)$ — аддитивная функция интервала, определенная на интервале I_0. Если существует

$$\lim_{\substack{d(I)\to 0\\ I\ni x}}\frac{\varphi(I)}{|I|}, \tag{1}$$

где $d(I)$ — диаметр интервала I, а $|I|$ — его объем, и параметр регулярности интервалов I превосходит некоторое число, то говорят, что $\varphi(I)$ имеет обобщенную производную и обозначают ее $D\varphi(x)$. Если же (1) существует для любой последовательности интервалов, то он обозначается через $\varphi'(x)$ и называется сильной производной функции $\varphi(I)$.

Доказываются, в частности,

Теорема 1. Обобщенная производная $D\varphi(x)$ и сильная производная $\varphi'(x)$ обладают свойством Дарбу (т. е. принимают все промежуточные значения).

Теорема 3. Если $\varphi(I)$ допускает $D\varphi(x)$ или $\varphi'(x)$ во всех точках I_0 и $I \subset I_0$, то существует точка ξ такая, что $\varphi(I) = D\varphi(\xi)\cdot|I|$ или соответственно $\varphi(I) = \varphi'(\xi)\cdot|I|$.

Теорема 4. Если $\varphi(I)$ и $\psi(I)$ — аддитивные на I_0 функции, имеющие производные $D\varphi(x)$ и $D\psi(x)$ (или $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$) во всех точках I_0, и $I \subset I_0$, то существует точка ξ такая, что

$$\frac{D\varphi(\xi)}{D\psi(\xi)} = \frac{\varphi(I)}{\psi(I)}$$

$\left(\text{или соответственно } \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\varphi(I)}{\psi(I)}\right)$.

А. Я. Дубовицкий

5699. О дифференцировании под знаком интеграла. Рао (On differentiation under the integral sign. Rao C. Ramamohana), Math. Student, 1957, **25**, № 3-4, 143—146 (англ.)

Теорему о дифференцировании под знаком интеграла Римана

$$\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

автор обобщает, при некоторых условиях, для интеграла Лебега.

Н. А. Столяров

5700. О производных числах функции. Сенгупта, Лахири (A note on derivatives of a function. Sengupta H. M., Lahiri B. K.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 4, 189—191 (англ.)

Форт (Fort M. K., Amer. Math. Monthly, 1951, 408) доказал, что для функции $f(x)$, разрывной на всюду плотном на отрезке $[a, b]$ множестве и непрерывной на всюду плотном множестве, множество точек, где функция дифференцируема (если оно существует), есть множество первой категории.

Авторы получают более общий результат, доказывая, что для такой функции множество точек, где функция непрерывна и по крайней мере одно из четырех производных чисел D^+f, D_+f, D^-f, D_-f является бесконечным, есть множество второй категории (residual set).

В. М. Цодыкс

5701. Функции, имеющие обобщенные римановы производные. Кассиматис (Functions which have generalized Riemann derivatives. Kassimatis C.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 3, 413—420 (англ.)

Пусть $f(x)$ — измеримая функция, определенная на (a, b), и

$$\Delta_n(x, 2h; f) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f(x+2jh-nh)$$

$$(h>0;\ n = 1,2,\ldots).$$

Пределы

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\Delta_n(x,2h;f)}{(2h)^n}=\overline{D}^n f(x),$$

$$\underline{\lim_{h\to 0}}\frac{\Delta_n(x,2h;f)}{(2h)^n}=\underline{D}^n f(x)$$

называются соответственно верхней и нижней n-й обобщенной римановой производной функции $f(x)$ в точке x.

Если $\overline{D}^n f(x)=\underline{D}^n f(x)$, то их общее значение $D^n f(x)$ называется n-й обобщенной римановой производной $f(x)$ в точке x.

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — такие функции, что обычная n-я производная разности $F(x)-G(x)$ равна нулю. Тогда $F(x)$ и $G(x)$ отличаются на полином степени не выше $n-1$.

В статье изучается зависимость между функциями $F(x)$ и $G(x)$, для которых n-я обобщенная риманова производная непрерывной функции $F(x)-G(x)$ равна нулю. Как показал Данжуа, если при $n=2$ $D^2(F-G)=0$, то $F(x)-G(x)$ линейна. Этот же результат автор получает своим методом, а затем обобщает на случай $n>2$.

Оказывается, что результат неверен даже при $n=3$, если не наложить дополнительные условия на $F(x)-G(x)$. Автор определяет специальный класс непрерывных функций, для которых и обобщает результат Данжуа на случай $n>2$. Ф. И. Шмидов

5702. О смешанных частных производных. Маркус (Sur les dérivées partielles mixtes. Marcus Solomon), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 4, 522—524 (франц.)

Пусть D — область евклидова пространства R^n. Доказывается:

Теорема. Пусть $f(x)$ определена в области D и ее смешанные производные порядка p непрерывны по каждому переменному. Тогда значения смешанных производных порядка $\leqslant p$ не зависят от порядка дифференцирования.

Следствие. Если $f(x)$, определенная в D, допускает все смешанные частные производные порядка p, то значения смешанных производных порядка $<p$ не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство теоремы опирается на то, что функция, непрерывная в D по каждому переменному, обладает свойствами: 1) если $x\in D$ и $\varepsilon>0$ произвольно, то в любой окрестности S найдется сфера S_1 такая, что из $y\in S_1$ следует $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$; 2) $f(x)$ точечно разрывна в D. А. Я. Дубовицкий

5703. Теорема вложения для функций с частными производными, рассматриваемыми в различных метриках. Никольский С. М., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 3, 321—336

Подробное изложение результатов автора, опубликованных ранее без доказательств (РЖМат, 1959, 240). Л. Д. Кудрявцев

5704. Свойства некоторых классов функций n переменных. Гальярдо (Propriétés de certaines classes de fonctions de n variables. Gagliardo E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 79—80 (франц.)

Рассматриваются классы $W_p^r(\Omega)$ С. Л. Соболева.

5705. Вариация, кратность и полунепрерывность. Чезари (Variation, multiplicity, and semicontinuity. Cesari Lamberto), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 5, 317—332 (англ.)

Дается систематическое изложение теории функций ограниченной вариации с применением функций кратности. Устанавливаются полунепрерывность вариаций и их дифференциальные свойства. А. Я. Дубовицкий

5706. О суперпозиции двух непрерывных функций с ограниченным изменением. Левин, Ярнелл (On the product of two continuous functions of bounded variation. Levine Norman, Yarnelle John E.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 3, 192—193 (англ.)

Пусть $T_1(x)$ и $T_2(x)$ — непрерывные функции с ограниченными изменениями соответственно на сегментах $I_x=[\alpha,\beta]$ и $I_y=[a,b]$, $T_1(I_x)\subset I_y$,

$$N(y,T_1,I_x)\equiv\begin{cases}n, \text{ если } T_1^{-1}(y) \text{ состоит из } n \text{ точек } (n=0,1,\ldots),\\ \infty, \text{ если } T_1^{-1}(y) \text{ бесконечно,}\end{cases}$$

$\overline{Y}\equiv\{y|N(y,T_1,I_x)=\infty\}$, $Y_i\equiv\{y|N(y,T_1,I_x)=i\}$ $(i=0,1,\ldots)$,

$Z_{jl}\equiv\{z|T_2^{-1}(z)\cap Y_l$ состоит из j точек$\}$ $(j=0,1,\ldots)$.

Доказывается: Для того чтобы функция $T_{21}(x)=T_2\{T_1(x)\}$ была функцией с ограниченным изменением на сегменте I_x, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

$$m\{T_2(\overline{Y})\}=0,\quad \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} ijm(Z_{ij})<\infty.$$

Ш. С. Пхакадзе

5707. Функции, вторые разности которых стремятся к нулю. Тилман (Functions whose second differences converge to zero. Thielman H. P.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 68 (англ.)

5708. О редукции (по модулю 1) абсолютно монотонных на $(0,\infty)$ функций. Винтнер (On the reduction (mod 1) of completely monotone functions $(0,\infty)$ Wintner Aurel), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 299—312 (англ.)

Рассматривается класс A монотонных на $(0,\infty)$ функций $f(x)$, суммируемых на $(0,1)$ и стремящихся к 0 вместе с x^{-1}. Указывается интегральное представление функций этого класса:

$f(x)=\int_0^{\infty}e^{-xs}\,d\mu(s)$, где $\mu(s)$ не убывает на $[0,\infty)$, $\mu(+0)=\mu(0)$ и $\int_1^{\infty}s^{-1}\,d\mu(s)<\infty$. Доказывается теорема:

Если функция $\varphi(x)$ абсолютно монотонна на $(0,1)$, то ее «четная» и «нечетная» части, т. е. функции

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}\,[\varphi(x)+\varphi(1-x)] \text{ и } \varphi_2(x)=\frac{1}{2}[\varphi(x)-\varphi(1-x)], \quad (1)$$

абсолютно монотонны на $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

С помощью этой теоремы изучаются функции

$$\widetilde{f}(x)=\lim_{N\to\infty}\left\{\sum_{n=0}^{N-1}f(x+n)-\int_0^N f(u)\,du\right\}\ (f(x)\in A)$$

и их «четные» и «нечетные» части $\widetilde{f}_1(x)$ и $\widetilde{f}_2(x)$, определяемые аналогично (1). Устанавливается, что функции $\widetilde{f}_2(x)$ и $-\widetilde{f}_1'(x)$ абсолютно монотонны на $(0,\frac{1}{2})$. Используя разложения функций $\widetilde{f}_1(x)$ и $\widetilde{f}_2(x)$ в ряд Фурье, автор формулирует последнее утверждение также в следующей форме:

Пусть $\mu(s)$ удовлетворяет указанным выше условиям. Тригонометрические ряды $f_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt$ и $f_2(x)=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nt$, где $a_n=\int_0^{\infty}(s+n^2/s)^{-1}\,d\mu(s)$.

$b_n=\int_0^\infty (n+s^2/n)^{-1}\,d\mu(s)$, сходятся всюду на $(0,2\pi)$ и представляют аналитические на $(0,\pi)$ функции, при этом функции $f_2(x)$ и $-f_1'(x)$ абсолютно монотонны на $(0,\pi)$. Указанный класс тригонометрических рядов содержит, в частности, ряды

$$c_\lambda(t)=\sum_{n=1}^\infty n^{-\lambda}\cos nt \text{ и } s_\lambda(t)=\sum_{n=1}^\infty n^{-\lambda}\sin nt\ (0<\lambda<\infty).$$

А. Л. Гаркави

5709. Основные проблемы теории приближения функций. Албукерки (Problemas fundamentais da teoria da aproximaçao funcional. Albuquerque Luís G. M. de), Gaz. mat., 1958, **19**, № 70-71, 18—23 (порт.)

Продолжение статей (РЖМат, 1958, 3651; 1959, 3957). Общие начальные сведения о гильбертовом пространстве. Э. Апарисио

5710. О точках полного вырождения матриц Якоби. Дубовицкий А. Я., Уч. зап. Вологодск. гос. пед. ин-та, 1958, **23**, 201—216

Исследуется структура множества особых точек, т. е. точек $x\in G$ полного вырождения матриц Якоби, когда ранг

$$\|\partial U_i/\partial x_j\|_x=0,$$

где U — отображение области G из E^n в E^k. Луч ξ, выходящий из точки x_0, называется полукасательной множества $E\subset E^m$ в точке x_0, если существует последовательность $x_n\in E$, сходящаяся вдоль ξ к x_0. Сумма всех полукасательных множеств E в x_0 называется контингенцией E в x_0.

Контингенция E в x_0 не превосходит s, если ее можно погрузить в гиперплоскость размерности $\leqslant s$.

Множество E называется α-существенным, если $m_\alpha U(E)>0$, и α-несущественным, если $m_\alpha U(E)=0$ (m_α обозначает α-мерную меру Хаусдорфа).

Основной результат: Пусть $U_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i=1,2,\ldots,k$ — система m раз дифференцируемых в G функций, задающих отображение U. Тогда для любого B-множества N особых точек, в каждой из которых контингенция не превосходит $\omega\cdot m$,

$$m_\omega U(N)=0$$

(ω — любое положительное число).

При $\omega=k=1$ отсюда получается один результат Е. М. Ландиса. Ф. И. Шмидов

5711. B-множества и чисто циклические элементы. Нёйгебауэр (B-sets and fine-cyclic elements. Neugebauer Christoph J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 1, 121—136 (англ.)

Рассматривается пространство Пеано P конечной связности. Невырожденный континуум $B\subset P$ называется B-множеством в P, если либо $B=P$, либо каждая компонента $P-B$ имеет лишь конечное число граничных точек. B-множество $\Gamma\subset P$ называется чисто циклическим элементом пространства Пеано P, если оно связно и никакое конечное множество точек Γ не разбивает Γ.

Изучаются структура P и свойства чисто циклических элементов. Р. С. Гутер

5712. Новые результаты в теории площади поверхности. Чезари (Recent results in surface area theory. Cesari L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 43 (англ.)

5713 К. Действительные функции. I. Сикорский (Funkcje rzeczywiste. T. I. Sikorski Roman. (Monogr. mat. PAN, 35). Warszawa, PWN, 1958, 534 s., 55 zł.) (польск.)

Содержание книги: гл. I. Функции, множества, классы множеств; гл. II. Метрические пространства; гл. III. Непрерывность функции; гл. IV. Равномерная и неравномерная сходимость; гл. V. Функции Бэра; гл. VI. Теория меры; гл. VII. Интеграл Лебега; гл. VIII. Произведение мер. Теорема Фубини; гл. IX. Функции ограниченной вариации; гл. X. Дифференцируемость функций; гл. XI. Интеграл Стилтьеса.

Материал можно считать в основном классическим. Изложение строится в другом плане, чем в большинстве русских книг, где принято на первом месте детально излагать теорию функций одной действительной переменной. Автор, наоборот, исходит из общей постановки вопроса, рассматривая затем частный случай одной переменной. Р. С. Гутер

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

5714. Об униформизации указуемых множеств. Кондо (Sur l'uniformisation des ensembles nommables. Kondô Motokiti), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 19, 2712—2715 (франц.)

Пусть $\mathfrak{k}$ обозначает проективный континуум (терминологию см. РЖМат, 1958, 1943, 1944, 4621—4623). В релятивном анализе $\mathfrak{A}(\mathfrak{k},\mathfrak{k})$ доказаны следующие теоремы:

1. Всякое $(P_n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемое множество униформизируемо разностью двух $(P^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемых множеств.

2. Всякое $(P^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемое множество, где $n\geqslant 2$, униформизируемо $(P^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемым множеством.

3. Всякое $(P_n^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемое множество, где $n\geqslant 2$, униформизируемо $(P_n^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k},)$-указуемым множеством.

4. Два непересекающихся $(P_n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемых множества, где $n\geqslant 2$, отделимы $(P_n^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемыми множествами.

5. Если два множества A_1 и A_2 $(P^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемы ($(P_n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемы), то множества A_1-A_2 и A_2-A_1 отделимы $(P^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемыми множествами.

Заменяя в теоремах 1—5 $(P^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-, $(P_n^n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$- и $(P_n,\mathfrak{k},\mathfrak{k})$-указуемости соответственно $(E^n,\mathfrak{k})$-, $(E_n^n,\mathfrak{k})$- и $(E_n,\mathfrak{k})$-указуемостями, получаем теоремы 1′—5′. Доказательства теорем 4 и 5 (4′ и 5′) опираются на теорему 1 (1′). Отсюда автор высказывает мнение, что в теории проективных множеств высших классов и в теории $(E,\mathfrak{k})$-указуемых множеств более фундаментален принцип униформизации, чем принцип отделимости. Б. С. Содномов

5715. О проблеме измеримости проективных множеств. Маркус (Sur le problème de la mesurabilité des ensembles projectifs. Marcus Solomon), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 1, 21—22 (франц.)

Сформулированы следующие утверждения:

1. Из существования базы Гамеля, являющейся проективным множеством класса $2n$ или $2n+1$, следуют существование проективного множества класса $2n+1$, не измеримого по Лебегу, и существование проективного множества класса $2n+1$, не обладающего свойством Бэра.

2. Существует такое A_2-множество, что если оно обладает свойством Бэра, то не существует никакой базы Гамеля, являющейся A_2-множеством.

3. Существует база Гамеля, не являющаяся проективным множеством.

4. Существует база Гамеля, измеримая по Лебегу и не являющаяся CA-множеством. Б. С. Содномов

5716. Об измеримости проективных множеств. Маркус (Sur la mesurabilité des ensembles projectifs. Marcus S.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 85—86 (франц.)

Приводится теорема, совпадающая с частью теоремы 1 реф. 5715, касающейся неизмеримости по Лебегу.

5717. **Непрерывное жесткое множество. Гилман** (A continuous exact set. Gillman Leonard), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 412—418 (англ.)

Линейно упорядоченное множество $\mathfrak{A}$ называется жестким, если оно не подобно никакому своему собственному подмножеству. Автор доказывает существование непрерывного жесткого множества мощности $2^{\aleph_0}$. Однако его доказательство требует гипотезы, что $2^{\aleph_0}$ является регулярным кардинальным числом (очевидно, эта гипотеза является частным случаем гипотезы континуума). S. Mrówka

5718. **Основы теории колебания функций. Хаммер** (Basic theory of the oscillation of functions. Hammer P. C.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 80 (англ.)

Рассматриваются колебания функций, определенных на упорядоченных множествах и принимающих действительные значения.

5719 К. **Элементы математики. I. Основы анализа. Кн. I. Теория множеств. Гл. 4. Структуры. Бурбаки** (Éléments de mathématique. I. Les structures fondamentales de l'analyse. Livre I. Théorie des ensembles. Chap. 4. Structures. Bourbaki N. (Actual. scient. et industr., № 1258). Paris, Hermann, 1958, 125 p.) (франц.)

Изложение существенно опирается на гл. 1 и 2 этой же книги (РЖМат, 1957, 8544 К). В § 1 (Структуры и изоморфизмы) последовательно вводится и изучается ряд понятий, связанных со структурами. Имеются многочисленные примеры. В § 2 (Морфизмы и производные структуры) определяется понятие морфизма структуризованных множеств и рассматриваются некоторые особые виды структур. В § 3 (Универсальные отображения) исследуется специальный вид отображений структуризованных множеств, находятся условия существования универсальных отображений и указываются примеры.

Добавление содержит ряд критериев переносимости отношений.

Довольно обширный исторический обзор (48 стр.) охватывает темы: формализация логики; понятие истины в математике; объекты, модели, структуры; теория множеств; парадоксы теории множеств и кризис оснований математики; приводится эскиз доказательства теоремы Гёделя о неполноте. Д. А. Захаров

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

5720. **Некоторые теоремы о рядах Фурье со случайными знаками. Кьо** (Some theorems on Fourier series with random signs. Keogh F. R.), J. London Math. Soc., 1958, **33**, № 3, 284—288 (англ.)

Пусть $\{r_n(t)\}$ — система функций Радемахера. Рассмотрим тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty (a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \qquad (1)$$

$$\pm\frac{a_0}{2}+\sum_1^\infty \pm(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta), \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2}r_0(t)\,a_0+\sum_1^\infty r_n(t)(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta). \qquad (3)$$

Будем говорить, что тригонометрический ряд принадлежит C, если он является рядом Фурье от функции из класса C. Для всякого класса C интегрируемых функций обозначим через $E(C)$ множество значений t, обладающих свойством: для всякого ряда (1) такого, что (3) принадлежит C для всех t из $E(C)$, ряд (2) принадлежит C для всех возможных знаков.

Имеют место теоремы:

1. Каждое множество положительной меры есть $E(S)$ (где S — класс рядов Фурье — Стилтьеса), и для $1\leqslant r\leqslant 2$ оно есть $E(L^r)$.

2. Для $1\leqslant r\leqslant 2$ всякое $E(S)$ есть $E(L^r)$; для $1\leqslant r\leqslant s\leqslant 2$ всякое $E(L^r)$ есть $E(S)$.

3. Всякое множество второй категории есть $E(S)$ и для $r\geqslant 1$ оно и $E(L^r)$.

4. Всякое множество второй категории есть $E(B)$ (где B — класс существенно ограниченных функций).

Однако даже множество меры 1 не должно быть ни $E(B)$ множеством, ни $E(L^r)$ при $r>2$. Н. К. Бари

5721. **Лакунарные тригонометрические ряды. Рудин** (Lacunary trigonometric series. Rudin W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 67 (англ.)

Пусть Λ_p $(1<p<\infty)$ — класс всех множеств E целых чисел таких, что $f\in L_p$, если $f\in L$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta=0$ для всех $n\notin E$. Положим $\Lambda_\infty=\bigcap\Lambda_p$. По определению, $E\in S$, если $\sum c_n e^{in\theta}$ абсолютно сходится всякий раз, когда он является рядом Фурье ограниченной функции и $c_n=0$ при $n\notin E$.

Результаты: 1) Если $E\in\Lambda_p$ при некотором p, то E не содержит произвольно длинной арифметической прогрессии.

2) Если $E\in\Lambda_p$ для некоторого $p>2$, то не существует арифметической прогрессии из N членов, которая содержала бы больше, чем $C\cdot N^{2/p}$ чисел из E. 3) Если $E\in S$, то указанная выше граница улучшается до $C\cdot\log N$. 4) $S\subset\Lambda_\infty$, $S\neq\Lambda_\infty$. 5) Если $p>2k$, $k=2,3,4,\ldots$, то $\Lambda_p\neq\Lambda_{2k}$. 6) Λ_4 исследован более детально. 7) Результат 3) используется для доказательства существования слабо почти периодических функций, не являющихся равномерными пределами преобразований Фурье—Стилтьеса.

5722. **Критерий сходимости для рядов Фурье. Нобл** (Some convergence criteria for Fourier series. Noble M. E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 63 (англ.)

Пусть $f(x)\in L(-\pi,\pi)$ имеет ряд Фурье $a_0/2+\sum_1^\infty(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ с частными суммами $s_n(x)$ и пусть $\varphi_x(t)=\{f(x+t)+f(x-t)\}/2$.

Теорема. Предположим, что:

1) $\int_0^u|\varphi_x(y)-f(x)|\,dy=o(u)$,

2) $n_k\to\infty$ — последовательность натуральных чисел и $\lambda(n_k)$ — последовательность действительных чисел такие, что

$$\int_{1/n_k}^{\lambda(n_k)}\left|\varphi_x\left(u+\frac{1}{n_k}\right)-\varphi_x(u)\right|u^{-1}\,du=o(1),$$

$\lim_k(\min\{s_m(x)-s_n(x):n_k-\lambda(n_k)\leqslant n<m\leqslant n_k+\lambda(n_k)\})\geqslant 0$ (G).

Тогда $s_{n_k}(x)\to f(x)$.

Частные случаи (G): 1) $a_n,b_n=o(1/\lambda(n))$, 2) $a_n=b_n=0$ при $|n-n_k|\leqslant\lambda(n_k)$. Теорема включает случаи $\lambda(n)=\text{const}$ (Лебег), $\lambda(n)=n^\delta$, $\delta>0$ (Харди и Литлвуд).

5723. **О коэффициентах Фурье—Стилтьеса сингулярных функций. Ивашев-Мусатов** (On Fourier—Stieltjes coefficients of singular functions. Ivašev-

Musatov O. S.), Amer. Math. Soc. Translat., 1958, **10**, 107—124 (англ.)
Перевод статьи автора (РЖМат, 1957, 311).

5724. О гладких функциях. Фрёйд (On smooth functions. Freud G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 50 (англ.)

Пусть $f \in C$ и $\{T_n\}$ — последовательность тригонометрических полиномов (T_n имеет порядок n), для которых $|f(\theta) - T_n(\theta)| \leqslant \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \downarrow 0$.
Тогда при $|h_n| \leqslant 1$

$$f(\theta + h) - f(\theta) = hT_n'(\theta) + O\{n^{-2}\sum_{k=1}^{n} k\,\varepsilon_k\}.$$

Указываются приложения. Из резюме автора

5725. К вопросу об экстремальных функциях в некоторых задачах теории приближения. Рабинович С. И., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 6, 977—979

Некоторые результаты, полученные в работах С. М. Никольского (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, **10**, 393) и референта (Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 4), распространяются на класс $W^{(r)}H^{(\alpha)}$ функций периода 2π, имеющих производную порядка r, удовлетворяющую условию Липшица степени α с константой единица.

Основной результат реферируемой работы заключается в доказательстве неравенства (теорема 1) (дополняющего оценку А. Ф. Тимана (РЖМат, 1953, 656))

$$|f_0(x_0) - U_{n_i}(f_0;\, x_0;\, \lambda)| > \frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2 n_i^{\alpha}} \int_0^{\pi/2} t^{\alpha} \sin t\, dt \left| \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\mu_k^{(n_i)}}{n_i - k + 1} - \frac{\ln n_i}{n_i'} \right| (1 - \varepsilon_{n_i}) \quad (\varepsilon_{n_i} \to 0), \tag{1}$$

где $f_0(x)$ — функция периода 2π, принадлежащая классу $W^{(r)}H^{(\alpha)}$; a_k, b_k — ее коэффициенты Фурье;

$$U_n(f_0;\, x;\, \lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

$$\mu_k^{(n)} = \frac{1 - \lambda_k^{(n)}}{k^2}, \quad \mu_k^{(n)} \leqslant \mu_{k+1}^{(n)}, \quad \Delta^2 \mu_k^{(n)} \geqslant 0.$$

Доказательство неравенства (1) потребовало конструирования соответствующей функции, аналитическое выражение которой приводится в статье.

В качестве следствия приводится условие, необходимое для того, чтобы линейный метод $U_n(f;\, x;\, \lambda)$ при $n \to \infty$ осуществлял для функции $f(x) \in W^{(r)}H^{(\alpha)}$ приближение того же порядка, что и наилучшее.

Доказательства теорем не приводятся. Г. Я. Доронин

5726. Дальнейшее усиление теоремы Джексона о приближении обыкновенными многочленами непрерывных функций. Дзядык В. К., Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 3, 403—406

Доказывается следующее усиление теоремы Джексона. Если $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, имеет там r-ю (r — целое $\geqslant 0$) непрерывную производную $f^{(r)}(x)$, то найдется последовательность обыкновенных многочленов $P_n(x)$ степени не выше n ($n = 1, 2, \ldots$) такая, что при каждом $x \in [a, b]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant C \cdot \left[\frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{n} + \frac{1}{n^2}\right]^r \left[\omega_2^{(r)}\left(\frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{n}\right) + \omega_2^{(r)}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

где C — постоянная, не зависящая ни от n, ни от x; $\omega_2^{(r)}(\delta)$ — модуль гладкости r-й производной $f^{(r)}(x)$:

$$\omega_2^{(r)}(\delta) = \sup \left| f^{(r)}(x_1) + f^{(r)}(x_2) - 2f^{(r)}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right| \quad (|x_1 - x_2| \leqslant \delta;\ x_1, x_2 \in [a, b]).$$

Г. К. Лебедь

5727. Замечания об интерполировании. III (Сходимость). Балаж, Туран (Notes on interpolation. III (Convergence). Balázs J., Turán P.), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, **9**, № 1-2, 195—214 (англ.)

Для интерполяционного процесса

$$R_n(f, x) = \sum_{\nu=1}^{n} f(x_{\nu n})\, r_{\nu n}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{\nu n} \rho_{\nu n}(x), \quad n = 2, 4, 6, \ldots,$$

описанного в заметках I и II (РЖМат, 1956, 5809; 1958, 1978), доказываются теоремы:

1. Пусть $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в $[-1, 1]$, причем модуль непрерывности производной $\omega(\delta)$ таков, что интеграл $\int_0^{-1} t^{-1} \omega(t)\, dt$ существует. Пусть, кроме того, $|\beta_{\nu n}| \leqslant \varepsilon n$ для произвольно малого $\varepsilon > 0$ при $n > n_0(\varepsilon)$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Тогда интерполяционный процесс $R_n(f, x)$, $n = 2, 4, 6, \ldots$ сходится к $f(x)$ равномерно в $[-1, 1]$.

2. Для произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует функция $F(x)$ класса $\mathrm{Lip}(1 - \varepsilon)$, для которой полиномы $R_n(F, x)$ (даже в случае $\beta_{\nu n} = 0$) неограничены при $x = 0$.

В. Ф. Николаев

5728. О распределении узлов в интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна. Берман Д. Л., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 6, 1063—1065

Повторение в основном другой статьи автора (РЖМат, 1958, 8727). В. Ф. Николаев

5729. О единственности приближения полиномами в случае нескольких действительных переменных. Ривлин, Шапиро (Unique approximation by polynomials in several real variables. Rivlin T. J., Shapiro H. S.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 87 (англ.)

См. также: 5639, 5931

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

5730. О коэффициентах регулярных функций. Сакагути, Сугаку, 1954, **6**, № 2, 83—84 (японск.)

5731. Преобразование Лапласа и его приложение к теории функций комплексного переменного. 6. Такэути (Takeuchi J.), Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1958, **45**, № 5, 599—603 (японск.)
Часть 5 см. РЖМат, 1959, 2551

5732. Преобразование Лапласа и его приложение к теории функций комплексного переменного 7. Такэ-

ути (Takeuchi J.), Ом. Дэнки дзасси, Ohm. Electr. Mag., 1958, **45**, № 6, 717—720 (японск.)

5733. Об определении фазы интеграла Фурье. II. Акутович (On the determination of the phase of a Fourier integral. II. Akutowicz Edwin J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 2, 234—238 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1959, 3922

Пусть $C(a)$ — класс всех комплекснозначных функций φ, удовлетворяющих условиям:

1) $\varphi \in L^2(-\infty, \infty)$;

2) φ равны нулю почти всюду вне конечного интервала, который может зависеть от φ;

3) преобразование Фурье $\hat{\varphi}(x)$ функции φ отлично от нуля на $(-\infty, \infty)$;

4) $|\hat{\varphi}(x)|$ равен фиксированной функции $a(x)$.

Тогда любые две функции φ_1, φ_2, принадлежащие классу $C(a)$, связаны соотношением

$$\hat{\varphi}_1(x) = e^{i\alpha + i\beta x} B_2^*(x) B_1(x) \hat{\varphi}_2(x).$$

Здесь $B_1(x)$ — функция Бляшке, имеющая своими нулями нули функции

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_0}^{\infty} e^{izt} \varphi_1(t)\, dt \quad (z = x + iy,\ y > 0),\ \varphi_1 \approx 0 \text{ для } t < t_0 \equiv t_0(\varphi),\ B_1(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^m \prod_n \frac{|z_n - i|}{z_n - i} \frac{|z_n + i|}{z_n + i} \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n},$$

m — целое, $m > 0$.

z_n'' — нули функции $\Phi_2(z)$, расположенные в нижней полуплоскости,

$$B_2^*(x) = \lim_{y \to 0} \prod_{\{z_n''\}} \frac{|z_n'' - i|}{z_n'' - i} \frac{|z_n'' + i|}{z_n'' + i} \frac{z - z_n''}{z - \bar{z}_n''}.$$

Л. Я. Цлаф

5734. Об аналитическом представлении некоторых функций. Орте (Sobre la representación analitica de algunas funciones. Orts J. M.), Tome homenaje póstumo Dr. D. Francisco Pardillo Vaquer, 1884—1955. Univ. Barcelona. Barcelona. s. a., 1—7 (исп.)

Изучается разложение аналитической функции $f(z)$ в ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} [A_n (z - \alpha)^n + B_n (z - \beta)^n]$$

в области, ограниченной дугами двух ортогональных окружностей (Относительно таких рядов см. Гурса, Курс математического анализа, М.—Л., Гостехиздат. 1933, т. II, стр. 84). Э. Апарисио

5735. Весовые приближения многочленами. Мергелян (Weighted approximations by polynomials. Mergelyan S. N.), Amer. Math. Soc. Translat., 1958, **10**, 59—106 (англ.)

См. РЖМат, 1958, 262.

5736. Простые базисы и линейные гомеоморфизмы в пространстве аналитических функций. Арсов (Proper bases and linear homeomorphisms in spaces of analytic functions. Arsove Maynard G.), Math. Ann., 1958, **135**, № 3, 235—243 (англ.)

Ранее полученные автором результаты для пространства целых функций (РЖМат, 1959, 3693; 3694) обобщаются на пространство F функций, аналитических в конечном круге $|z| < R$, с топологией, определяемой равномерной сходимостью на замкнутых множествах, расположенных целиком внутри $|z| < 1$.

Последовательность функций $\{a_n |z|\}$, аналитических в $|z| < R$, называется линейно независимой, если из того, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n(z)$ равномерно сходится внутри $|z| < R$ и сумма его равна нулю, следует, что все коэффициенты $c_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Если $\{a_n(z)\}$ — последовательность линейно независимых функций, то совокупность функций, представимых рядами $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n(z)$, где $\{c_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел, для которой ряд равномерно сходится внутри $|z| < R$, автор называет пространством F_0; очевидно, $\{a_n(z)\}$ — базис в F_0. Для функций $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ таких, что $\|a\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n < \infty$, определяются аналогично пространства A и A_0. Базис $\{a_n\}$ называется простым (в F, F_0, A, A_0), если из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n(z)$ следует сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, и наоборот.

Доказываются теоремы:

Теорема 1. Чтобы базис $\{a_n\}$ в F_0 был простым, необходимо и достаточно, чтобы:

а) для каждого $r < R$

$$\limsup_{n \to \infty} \{M_r(a_n)\}^{\frac{1}{n}} < R,\quad M_r(a) = \max_{|z| \le r} |a(z)|,$$

б) $$\lim_{r \to R} \liminf_{n \to \infty} \{M_r(a_n)\}^{\frac{1}{n}} = R.$$

Теорема 2. Если T — линейный гомеоморфизм F в себя, то $\{T\delta_n\}$, $\delta_n = z^n$ — простой базис в некотором F_0, и наоборот, если $\{a_n\}$ — простой базис в F_0, то существует гомеоморфизм F в F_0 такой, что $a_n = T\delta_n$, $n = 0, 1, \ldots$

Теорема 3. Чтобы базис $\{a_n\}$ в A_0 был простым, необходимо и достаточно, чтобы существовали две константы $\varkappa > 0$ и K такие, что

$$\varkappa R^n < \|a_n\| < K R^n,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Примечание референта. Простой базис автора совпадает с квазистепенным базисом референта (Докл. АН СССР, 1951, **80**, 177 — 180 — автор ссылается на эту статью). Теорема 1 совпадает с результатом Ю. Ф. Коробейника (РЖМат, 1959, 281).

М. Г. Хапланов

5737. Несколько замечаний о полноте в E_1 и L_2. Казьмин Ю. Л., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 197—203

Пусть $\{f_n(z)\}_0^{\infty}$ — некоторая последовательность из E_1, где E_1 — пространство аналитических в круге $|z| < 1$ функций с обычной для него топологией, определяемой равномерной сходимостью внутри $|z| < 1$. Через $f(e^{i\theta})$ обозначаются угловые граничные значения функции $f(z) \in E_1$.

Доказываются следующие условия, при которых последовательность $\{\mathrm{Re} f_n(e^{i\theta}), \mathrm{Im} f_n(e^{i\theta})\}_0^{\infty}$ образует базис или полную систему в вещественном гильбертовом пространстве:

Теорема 1. Пусть система функций $\{1, f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству Рисса H_2 и является там базисом по топологии E_1. Для того чтобы система функций $\{1, \mathrm{Re} f_n(e^{i\theta}), \mathrm{Im} f_n(e^{i\theta})\}_{n=1}^{\infty}$ была базисом в

$L_2(0, 2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f(z) \in H_2$ выполнялось условие

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(e^{i\theta}) \right|^2 d\theta < \infty, \quad (1)$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z) = f(z) \quad (|z| < 1).$$

Если условие (1) заменить условием полноты $\{f_n(e^{i\theta})\}_0^{\infty}$ в линеале $\{f(e^{i\theta})\}$ $(f \in H_2)$ по метрике $L_2(0,2\pi)$, то из полноты $\{f_k(z)\}_0^{\infty} \subset H_2$ в H_2 следует полнота системы $\{\mathrm{Re} f_n(e^{i\theta}), \mathrm{Im} f_n(e^{i\theta})\}_0^{\infty}$ в $L_2(0, 2\pi)$.

Рассматривается и в некотором смысле обратный вопрос. Опечатка на стр. 200: в формуле (7′) следует читать $\{\mathrm{Re} f(\zeta_n e^{i\theta}), \mathrm{Im} f(\zeta_n e^{i\theta})\}$. К. М. Фишман

5738. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка. Леонтьев А. Ф., Тр. 3-го Всес. матем. съезда 1, М., АН СССР, 1956, 86—87

Сообщаются результаты, подробно изложенные в статье автора (РЖМат, 1957, 6986).

5739. Итерационные инварианты. Яботинский (Iterational invariants. Jabotinsky E. Technion. Israel. Sci. Publ., 1954—1955, 6, 64—80) (англ.; рез. иврит.)

Пусть $F(z) = F_1(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n$ для $|z| < \rho\ (>0)$ и пусть $F_m(z) = F(F_{m-1}(z)) = \sum_1^{\infty} a_{nm} z^n$. Вопрос о существовании „итерационных инвариантов" или функций $\Phi_n = \Phi(a_{1m}, a_{2m}, \ldots, a_{nm})$, не зависящих от m, был выдвинут Адамаром (Hadamard J., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 67—75).

В настоящей работе доказывается, что для $|a_1| \neq 1$ единственное решение $G(z) = \sum_1^{\infty} g_n z^n$ уравнения $G(F(z)) = a_1 G(z)$ позволяет получить систему инвариантов от $g_2, g_3, g_4, \ldots$. Аналогично, $G(z)/G'(z) = \sum_1^{\infty} j_q z^q$ позволяет получить другую систему, совпадающую с системой, данной Адамаром. Эти коэффициенты инвариантны относительно итераций дробного или комплексного порядка.

Определяем $f_{p,q}(m)$ через $\{F_m(z)\}^p = \sum_p^{\infty} f_{p,q}(m) z^q$. Показывается, что $f_{p,q}(m) = \sum_{s=p}^{s=q} H_{p,s,q}(a_1^m)^s$, а также дается большое число соотношений, обобщающих соотношения, относящиеся к разложению Лагранжа. Разбирается пример, основанный на $G_{-1}(z) = ze^{-z}$. Приводятся некоторые частные результаты в случае $|a_1| = 1$; случаи $a_1 = 1$ и a_1 — корень из единицы требуют специального рассмотрения. Широко используется принцип равенства коэффициентов и делается попытка дать элементарный обзор различных результатов из теории функций Кёнига (Koenig) и аналитических итераций.

A. J. Macintyre

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 6, 601.

5740. Неподвижные точки и итерации целых функций. Бейкер (Fix-points and iterates of entire functions. Baker I. N.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 39 (англ.)

Точка ξ является неподвижной точкой для $f(z)$, если $f(\xi) = \xi$, а $f'(\xi)$ называется множителем. Итерации $f_n(z)$ целой функции $f(z)$ определяются индуктивно:

$$f_1(z) = f(z), \quad f_{n+1}(z) = f(f_n(z)) = f_n(f(z)).$$

Одной из теорем о связи теории итераций и неподвижных точек является теорема Фату и Розенблюма: Если $F(z)$ имеет только конечное число неподвижных точек, то она не является итерацией порядка $n\ (n \geqslant 2)$ какой-либо целой функции. Получены дальнейшие результаты о возможном распределении неподвижных точек итераций целых функций и показывается значение величин коэффициентов.

5741. О кратности неподвижной точки аналитической функции и ее итераций. Якобсталь (Über die Multiplizität der Fixpunkte einer analytischen Funktion und ihrer Iterierten. Jacobstahl Ernst), Math. Ann., 1957, 134, № 2, 134—139 (нем.)

Пусть $f(z)$ регулярна в точке $z = 0$ и $f(0) = 0$. Обозначается $f'(0) = \alpha$. Через m_r обозначается кратность неподвижной точки 0 для r-й итерации $f_r(z)$. Доказываются следующие утверждения: 1) Для $\alpha = 1$ $m_r = m_1$ $(r = 1, 2, \ldots)$. 2) Если α не есть корень из единицы, то $m_r = 1$ $(r = 1,2,3, \ldots)$. 3) Если α есть первообразный корень n-й степени из единицы, $n \geqslant 2$, то $m_r = 1$ для любого r, не кратного n. Для любого r, кратного n, кратность m_r имеет одно и то же значение, не меньшее, чем $n+1$. С. П. Пулькин

5742. О приближенном построении некоторых конформных отображений. Вертгейм Б. А., Докл. АН СССР, 1958, 119, № 1, 12—14

Известно, что задача о конформном отображении единичного круга на область, звездообразную относительно некоторой своей точки, сводится к решению нелинейного сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта. Полученное интегральное уравнение может быть решено методом итераций при некоторых ограничениях на функцию, входящую в уравнение границы области (способ Теодорсена).

Автором рассмотрен вопрос о конформном отображении единичного круга на область (не обязательно звездообразную), уравнение границы которой задано параметрически в виде

$$w = \exp\{f_1(t) + if_2(t)\},$$

где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ дважды дифференцируемы, $f_1''(t)$ и $f_2''(t)$ удовлетворяют условию Липшица.

Показано, что в этом случае для решения соответствующего нелинейного сингулярного интегрального уравнения может быть применен модифицированный метод Ньютона, развитый Л. В. Канторовичем (Успехи матем. наук, 1948, 3, вып. 6,89; Докл. АН СССР, 1951, 80, № 6, 849) Решение проводится в пространстве 2π-периодических функций $u(\varphi)$, удовлетворяющих условию Гёльдера с нормой $\|u\| = \max|u| + A_u$, где A_u— постоянная Гёльдера. Приводится теорема о достаточных условиях существования решения интегрального уравнения в указанном пространстве. А. В. Батырев

5743. О конформных отображениях. Трохимчук Ю. Ю., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 3, 430—431

Существенно обобщаются известные теоремы Меньшова, Бора и Курамоти (Z. Kuramochi). Пусть $w = f(z)$— непрерывное отображение области D комплексной плоскости z. Скажем, что это отображение сохраняет углы в точке $z \in D$, если в этой точке существует предел

$$\lim_{h \to 0} \mathrm{Arg} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

(предполагается, что берутся значения Arg, непрерывно зависящие от h, и что $f(z+h) \neq f(z)$ при достаточно малом $|h|$). Скажем, что это отображение обладает постоянным растяжением в точке $z \in D$, если в этой точке существует конечный или бесконечный предел

$$\rho(z) = \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \right|.$$

Называем точку $z_0 \in D$ U-точкой отображения $w = f(z)$, если существует такая ее окрестность $V(z_0) \subset D$, что для каждой точки $z' \in V(z_0)$, $z' \neq z_0$, имеем $f(z') \neq f(z_0)$. При этом, если $\operatorname{Arg}[f(z) - f(z_0)]$ получит неотрицательное приращение при положительном обходе точкой z всякой замкнутой жордановой кривой $\lambda \subset V(z_0)$, окружающей точку z_0, то скажем, что в точке z_0 это отображение $w = f(z)$ прямое.

Основные результаты: 1) Если отображение $w = f(z)$ сохраняет углы в каждой точке области D, исключая, быть может, не более чем счетного их множества, то $f(z)$ аналитична внутри D.

2) Пусть отображение $w = f(z)$ обладает постоянным растяжением в каждой точке области D, за исключением, возможно, не более чем счетного их множества. Тогда имеем: а) если U-точки существуют и в каждой из них это отображение прямое, то $f(z)$ аналитична внутри D (если U-точек не существует, то $f(z)$ — постоянная); б) если $\rho(z)$, может равняться нулю разве лишь на множестве точек 1-й категории в D, то существует открытое, всюду плотное в D множество O, в каждой компоненте которого аналитической является либо сама $f(z)$, либо ей сопряженная $\overline{f}(z)$. Доказательства этих теорем не приводятся. Имеется опечатка: на стр. 430, строка 7 снизу, напечатано „выражается" вместо „выражение". В. С. Федоров

5744. О конформном преобразовании области, близкой к кругу, на круг. Путята Т. В., Изв. Киевск. политех. ин-та, 1956, **19**, 141—148

Дан краткий критический обзор методов Гёндорфа (Höhndorf F., ZAMM, 1926, **6**, № 24), Теодорсена (Theodorsen T., Rep. NACA, 1931, № 411), Я. М. Серебрийского (Инж. сб., 1946, **3**, вып. 1) и А. И. Гусейнова (Матем. сб., 1947, **20**, № 2).

В заключение автор предлагает ввести малый параметр в структурную формулу класса однолистных звездных в области $|z| > R > 0$ функций и затем применить соображения, аналогичные изложенным в указанной выше статье А. И. Гусейнова. В. А. Зморович

5745. Одно из доказательств теоремы Варшавского. Ван Хун-шэн (Wang Hung-schen), Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 2, 304—305 (кит.; рез. англ.)

Доказывается следующая теорема Варшавского (Warschawski S., Math. Z., 1932, **35**, 321—456): Пусть $z = \varphi(w)$ дает конформное отображение круга $|w| < 1$ на область D, ограниченную замкнутой гладкой жордановой кривой Γ, и пусть модуль непрерывности $j(h)$ функции $\theta(s)$, дающей угол наклона касательной к Γ в зависимости от длины дуги s кривой Γ, удовлетворяет условию $\int_0^c \frac{j(h)}{h}\,dh < \infty$. Тогда в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$ функция $\varphi'(w)$ непрерывна и $\neq 0$.

Примечание референта. Автору, по-видимому, не было известно, что аналогичным образом цитированная теорема Варшавского была доказана Геронимусом (РЖМат, 1957, 3043), где, кроме того, были даны оценки при тех же предположениях модуля непрерывности функции $\varphi'(w)$ и $\ln \varphi'(w)$. Автором при доказательстве используется теорема Ли Гоу-пэна о том, что функция $v(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, сопряженная к непрерывной функции $u(\theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, модуль непрерывности $j(h)$ которой удовлетворяет условию $\int_0^c \frac{j(h)}{h}\,dh < \infty$, является также непрерывной. Эта теорема была известна и ранее (см. работу Магнарадзе Л. Г.). Сообщ. АН ГрузССР, 1947, **8**, № 9-10, 591—595), где изучались интегралы типа Коши с функциями плотности, модуль непрерывности которых обладает указанным свойством, и работу Уолша и Эллиот (Walsch J., Elliot Margaret H., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1952, **38**, 1058—1066), где была также дана оценка модуля непрерывности сопряженной функции). Г. Ц. Тумаркин

5746. О вершинах с мнимыми углами и их конформное отображение. Ункельбах (Über Ecken mit imaginären Winkeln und ihre konforme Abbildung, Unkelbach Helmut), Monatsh. Math., 1958, **62**, № 3, 200—211 (нем.)

В данной статье — четвертом сообщении автора о конформном отображении обобщенных круговых многоугольников — дается распространение теоремы, устанавливающей связь между величиной угла при вершине четного порядка и первого рода такого многоугольника и коэффициентами разложения соответствующего дифференциального инварианта Шварца в окрестности нулевой точки (РЖМат, 1958, 4647) на случай вершин второго рода (РЖМат, 1957, 1321).

Как приложение этой теоремы выводится соотношение между асимптотическими значениями локально однолистной мероморфной функции в изолированной существенно особой точке и некоторыми коэффициентами дифференциального уравнения Шварца, которому удовлетворяет эта функция. С. А. Гельфер

5747. К вопросу об изолированных однолистных функциях. Хорних (Zur Frage der isolierten schlichten Funktionen. Hornich Hans), Math. Ann., 1958, **135**, № 3, 189—191 (нем.)

Продолжение работы автора по исследованию распределения однолистных функций в пространстве функций, регулярных в единичном круге (РЖМат, 1959, 1408).

Доказывается теорема: Существует функция $f(z)$, однолистная и регулярная в круге $|z| < 1$, такая, что для некоторого числа $\eta > 0$ все функции $f(z) + cz$, $0 < |c| < \eta$, будут не однолистными, за исключением самое большее положительных значений c. Г. В. Корицкий

5748. Некоторые свойства однолистных функций с осевой симметрией. Дундученко Л. Е., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 84—95

Изучается класс функций $f(z)$, определяемых структурной формулой:

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\int_0^{z}\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{1-2\alpha}\frac{d\zeta}{1-2\zeta\cos\theta+\zeta^2}\right]d\mu(\theta),$$ где $|z|<1$, $0<\alpha<1$, $\mu(\theta)$ — неубывающая функция на отрезке $[0, \pi]$, $\mu(0) = 0$, $\int_0^{\pi} d\mu(\theta) = \pi$. Приводится доказательство теоремы В. А. Зморовича, из которой, в частности, следует, что представимость функции $f(z)$ указанной структурной формулой является необходимым и достаточным условием принадлежности ее классу L_α^2 Б. Н. Рахманова (РЖМат, 1954, 1625). При $\alpha = \frac{1}{2}$ получаем класс однолистных функций, выпуклых в направлении мнимой оси и имеющих вещественные коэффициенты. Исходя из приведенной структурной формулы, автор устанавливает ряд точных оценок в классе L_α^2.

Примечание референта. Из интегрального представления функций $f(z)$ класса L_α^2 и функций $\varphi(z)$ хорошо известного класса T_r типично вещественных функций очевидна следующая связь между ними: $f'(z) = \frac{\varphi(z)}{z}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{1-2\alpha}$, $|z| < 1$ (при $\alpha = \frac{1}{2}$ это соотношение известно, Robertson M. S., Ann. Math., 1936, **37**, № 2). Отсюда и из известных (РЖМат, 1956, 7272; 1957, 4735) экстремальных свойств функций класса T_r легко следуют соответствующие экстремальные свойства функций класса L_α^2 и, в частности, оценки, полученные автором. Ю. Е. Аленицын

5749. Об одном классе функций, однолистных в круге $|z| < (\sqrt{2})^{-1}$. Дундученко (Про один клас функцій, однолистих в крузі $|z| < (\sqrt{2})^{-1}$. Дундученко Л. О.), Доповіді, АН УРСР, 1958, № 6, 595—597 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть Δ есть замкнутый круг: $|\zeta| \leqslant 1$, $\zeta = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\sigma \subset \Delta$ и σ определяется неравенствами $\rho_1 < \rho \leqslant \rho_1 + h_1$, $\varphi_1 < \varphi \leqslant \varphi_1 + h_2$; $h_1 > 0, h_2 > 0$; $(\rho_1; \varphi_1) \in \Delta$. Через $\mathfrak{M}$ обозначается класс неотрицательных, аддитивных и нормальных функций промежутка $G(\sigma)$, определенных в Δ, нормированных условием $\int\int_{\Delta} G(d\sigma) = 1$ и получаемых с помощью функции точки $g(\rho; \varphi)$: $G(\sigma) = g(\rho_1 + h_1; \varphi_1 + h_2) - g(\rho_1 + h_1; \varphi_1) - g(\rho_1; \varphi_1 + h_2) + g(\rho_1; \varphi_1) \geqslant 0$, где $g(\rho; \varphi)$ непрерывна справа по обеим переменным в каждой точке $(\rho; \varphi) \in \Delta$ и $g(0; 0) = 0$; кроме того, $g(\rho; \varphi)$ не убывает по каждой переменной и $g(1; 2\pi) - g(1; 0) = g(1; 2\pi) - g(0; 2\pi) = 1$.

Рассматривается класс функций $f(z) = \int\int_{\Delta} \frac{z\, G(d\sigma)}{1 - \zeta z}$, где $\zeta = \rho e^{i\varphi} \in \Delta$, $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $G(\sigma) \in \mathfrak{M}$, а интеграл понимается как двумерный интеграл Стильтьеса. Функции этого класса регулярны в $|z| < 1$ и однолистны в $|z| < (\sqrt{2})^{-1}$. Приводятся без доказательства точные оценки снизу и сверху для $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\left|\arg \frac{f(z)}{z}\right|$, $|\arg f'(z)|$ и для тейлоровских коэффициентов $f(z)$. Ю. Е. Аленицын

5750. К теории однолистных функций с ограниченным вращением. Гальперин И. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 50—61

Классом однолистных функций с ограниченным вращением в круге $|z| < 1$ называется класс $\hat{S}$ функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, регулярных в этом круге и удовлетворяющих в нем условию $\operatorname{Re} f'(z) > 0$. Ряд экстремальных свойств функций этого класса был указан В. А. Зморовичем. Исходя из результатов В. А. Зморовича, автор получает дополнительные свойства функций класса $\hat{S}$, из которых приведем следующие. Для длины $\hat{L}(r)$ образа окружности $|z| = r < 1$ при отображении круга $|z| < 1$ функцией класса $\hat{S}$ имеем точные оценки:

$$2\pi r \leqslant \hat{L}(r) \leqslant 4r \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \left(\frac{2r}{1+r^2}\right)^2 \sin^2\varphi}}.$$

Если

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \hat{S}, \text{ то } S_n(z) = z + \sum_{k=2}^{n} a_k z^k \ (n = 2, 3, \ldots)$$

является однолистной функцией с ограниченным вращением в круге $|z| < \frac{1}{2}$ и константа $\frac{1}{2}$ не может быть увеличена. Рассматривается также класс $\hat{S}(\alpha)$ функций из $\hat{S}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} f'(z) > 1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, и класс $\hat{S}_n$ функций из $\hat{S}$, удовлетворяющих условию $|\arg f'(z)| < \frac{\pi}{2n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Для функций этих двух классов даются структурные формулы и точные оценки ряда величин. Кроме того, автор вводит в рассмотрение класс функций $f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots$, регулярных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих в нем условию $\operatorname{Re} f^{(p)}(z) > 0$, и называет этот класс классом p-листных функций с ограниченным вращением, указывая, что в следующей заметке им будут даны для функций этого класса структурная формула и некоторые точные оценки. Ю. Е. Аленицын

5751. О производной ограниченных однолистных функций. Кшиж (On the derivative of bounded univalent functions. Krzyż J.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 3, 157—159, XII (англ., рез. русск.)

Дается элементарный вывод оценок снизу и сверху модуля производной для однолистных функций вида $f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$, $|f(z)| < M$ $(M > 1)$, $|z| < 1$. Получаемая при этом оценка снизу является точной для $|z| < 1$, а оценка сверху — для $|z|$, не превосходящих некоторой величины, зависящей от M. Кроме того, приводится без доказательства теорема: Если функция $f(z)$, регулярная в круге $|z| < 1$, отображает его на риманову поверхность с конечной площадью, то при $|z| \to 1$

$$f'(z) = o\left(\frac{1}{1 - |z|}\right).$$

Ю. Е. Аленицын

5752. К теории однолистных функций. II. Проблема коэффициентов. Гун Шэн (Contributions to the theory of schlicht functions. II. The coefficient problem. Kung Sun), Acta sci. sinica, 1955, **4**, № 3, 359—373 (англ.)

Для класса S регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$ функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ доказывается ряд теорем об оценках коэффициентов. Большая часть теорем опубликована автором ранее (РЖМат, 1955, 174, 3166; 1957, 1330). Некоторые результаты теперь несколько усиливаются. Отметим, например, теорему: Если

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1} \in S,$$

то $|c_{2n+1}| < 2^{-1/3} 3^{1/3} e^{1/3} = 2{,}54\ldots$

Библ. 25 назв. Ю. Е. Аленицын

5753. О росте многолистных функций. Кеннеди (On the growth of multivalent functions. Kennedy P. B.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 54 (англ.)

Описываются результаты, полученные Хейманом и докладчиком. Пусть $f(z)$ регулярна и однолистна при $|z| < 1$ и $M(r, f) = \max |f(z)|$ на $|z| = r$. Известно, что $M(r, f) = O\{(1 - r)^{-2}\}$, и Хейман доказал, что $\alpha \equiv \lim_{r \to 1} (1 - r)^2 M(r, f)$ существует. Хейман показал также, что если $\alpha > 0$, то найдется θ_0 $(0 \leqslant \theta_0 < 2\pi)$, для которого $\liminf_{r \to 1} (1 - r)^2 |f(re^{i\theta_0})| > 0$ и для фиксированного $\eta > 0$, $\ln |f(re^{i\theta})| < O(1) \left(\ln \frac{1}{1 - r}\right)^{\frac{1}{2}}$ $(r \to 1)$ (1) равномерно при $\eta \leqslant |\theta - \theta_0| \leqslant \pi$.

Неравенство (1) улучшено докладчиком заменой $O(1)$ на $o(1)$. Полученную оценку улучшить нельзя. Результат переносится на p-листные в среднем функции в смысле Спенсера.

5754. О емкости обобщенного канторова множества. Рибер (Über die Kapazität einer verallgemeinerten Cantorschen Punktmenge. Riiber Ågot E.), Arch. Math., 1957, 8, № 5, 368—373 (нем.)

Пусть M_0 — плоское замкнутое связное множество диаметра d_0, $A_{1,\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, k_1)$ — замкнутые связные непересекающиеся подмножества M_0, $M_1 = \cup A_{1,\nu}$. Этот процесс продолжаем бесконечно так, что M_n состоит из $N_n = k_1 \cdot k_2 \ldots k_n$ непересекающихся замкнутых связных множеств $A_{n,\nu}$, причем в каждом $A_{n-1,\nu}$ содержится $k_n \geqslant 2$ подмножеств $A_{n,\nu}$. Диаметр $D_{n,\nu}$ множества $A_{n,\nu}$ должен удовлетворять условию $D_{n,\nu} <$

$< d_n'$ ($D_0 = d_0' = d_0$), $\lim d_n' = 0$. Множество $M = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ называется обобщенным канторовым множеством и содержит как частные случаи рассмотренные ранее канторовы множества (Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, 1941, п. п. 125 — 130; Ohtsuka M., РЖМат, 1956, 5840; 1957, 7782; Tsuji M., РЖМат, 1955, 2637; Hallström G., РЖМат, 1957, 6252; Riiber Å. РЖМат, 1957, 6999). При дополнительных ограничениях на M устанавливаются признаки, позволяющие судить, является ли емкость M положительной или равной нулю.

Пусть $\sup d_n' / d_{n-1}' < 1$, $p_n = d_{n-1}' / (d_n' k_n)$, $\inf p_n > Q > 0$. Тогда для того, чтобы M имело нулевую емкость, достаточна расходимость ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} N_\nu^{-1} \ln (p_\nu / Q^\nu) = \infty. \qquad (1)$$

Обозначим δ_n наименьшее расстояние между двумя $A_{n,\mu}$, входящими в одно и то же $A_{n-1,\nu}$, $\rho_{n+1} = \max (d_n / \delta_{n+1}, 1)$. Тогда, если $\sum_{\nu=0}^{\infty} N_\nu^{-1} \ln \rho_{n+1} < \infty$, то условие (1) не только достаточно, но и необходимо. Необходимость условия (1) установлена также еще в одном специальном случае. А. А. Гольдберг

5755. Задача об обтекании профиля с реактивным закрылком. Тумашев Г. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 2, 29—36

Рассматривается обтекание тонкого профиля, снабженного реактивным закрылком, т. е. щелью в задней кромке, из которой вытекает с большой скоростью V_j искусственно создаваемая струя воздуха, плоским установившимся потоком несжимаемой жидкости. Профиль заменяется прямолинейным отрезком. Скорость невозмущенного потока V_0 считается заданной, отыскивается форма средней линии вытекающей струи. Показано, что угол η, образованный касательной к искомой линии с осью OX, удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{aV_j^2}{8V_0^2} \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\pi(1+t)} \sqrt{\frac{1-t}{3-t}} \int_{-1}^{1} \eta \frac{1+t'}{(1-t')^2} \sqrt{\frac{3-t'}{1-t'}} \cdot \frac{dt'}{t'-t},$$

где a — ширина струи, а V_j и V_0 определены выше. После преобразования независимого переменного $t = -\cos\lambda$ и неизвестной функции $U = \eta \frac{1+t}{(1-t)^2} \sqrt{\frac{3-t}{1-t}}$ решение находится в виде тригонометрического ряда. В. С. Рогожин

5756. Обтекание криволинейной дуги с отрывом струй. Кузнецов А. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, 95—99

1. Рассматривается задача симметричного обтекания со срывом струй криволинейной дуги Г, опирающейся на хорду AB заданной длины h (A и B — концы дуги, являются точками срыва струй), безграничным потенциальным потоком несжимаемой жидкости, обладающей заданной скоростью v_0 в бесконечности, при следующих предположениях: 1) примем ось симметрии (направление скорости потока v_0 в бесконечности) за ось x, плоскости течения $z = x + iy$; 2) криволинейная дуга Г, заданная уравнением $y = y(x)$, обладает непрерывной кривизной и симметрично расположена относительно оси x; 3) как и в теории Лерея автор предполагает, что каждая прямая, параллельная оси x, пересекает обтекаемую дугу только в одной точке; 4) пусть D_z — область течения в плоскости z и пусть $w = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$ — комплексный потенциал течения. Обозначим через D_w область, соответствующую области D_z в плоскости комплексного потенциала w; $\varphi_0 = 0$ в точке разветвления потока.

При этих условиях автором ставится задача приближенного определения части границы области D_z (границ струй) и потенциального течения жидкости в области D_z, по известным значениям угла наклона β вектора скорости к оси x и скорости v_0 ни границе струй.

Используя метод последовательных приближений, автор дает эффективный метод для приближенного построения по заданной дуге Г потока, обладающего заданной скоростью v_0 в бесконечности, а также для приближенного определения границ струй (т. е. дуг, выходящих из точек A и B и соединяющих эти точки с точкой ∞).

Сущность приближенного метода автора заключается в замене в нулевом приближении дуги Г хордой, проведенной через ее концы, и использованием известных решений задачи об отрывном обтекании пластинки, поставленной перпендикулярно к потоку. Даются расчетные формулы для первого, второго и последующих приближений, соответствующих дугам $\Gamma^{(n)} (n = 1, 2, \ldots)$, которые равномерно сходятся к заданной дуге Г, а также формулы для приближенного представления формы струй. Для проверки эффективности предлагаемого метода автором проведены расчеты обтекания дуг кривых второго порядка. Приведен расчет двух приближений задачи обтекания дуги окружности заданной длины $S = \frac{\pi}{2} r$ (r — радиус окружности) в предположении $v_0 = 1$, $h = \pi + 4$. Результаты расчетов приведены в таблицах 1 и 2.

В работе не дается оценки быстроты сходимости последовательных приближений. Автор не дает выводов, используемых формул. Изложение носит весьма схематичный и сжатый характер. Г. Я. Хажалия

5757. Решение первой основной задачи теории упругости в эксцентрическом кольце. Фука (Řešení prvního problému pružnosti v excentrickém mezikruží. Fuka Jaroslav), Aplikace mat., 1958, 3, № 1, 45—66 (чешск.; рез. русск., нем.)

Методом, разработанным Н. И. Мусхелишвили (Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, М.-Л., 1949), решается первая основная задача теории упругости для эксцентрического кольца: по заданному на обеих окружностях вектору внешних напряжений, предполагаемыми кусочно-гладкими функциями, найти комплексные функции напряженности $\varphi(z)$ и $\psi(z)$; при этом общий главный вектор на каждой окружности является нулевым.

Сначала приводится решение этой задачи для концентрического кольца методом рядов: функции, выражающие краевые условия, разлагаются в ряды Фурье, а искомые функции напряжения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — в ряды Лорана; затем определяются неизвестные коэффициенты в этих рядах. Доказана сходимость этих рядов и то, что эти ряды являются решением задачи.

Эксцентрическое кольцо T конформно отображается $\left(w = \frac{az+b}{z+c}\right)$ на концентрическое кольцо T_1, а затем ищутся преобразованные функции напряжения, удовлетворяющие преобразованному краевому условию.

Автор вводит в T_1 новые вспомогательные функции $h(w)$, $f(w)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\varphi(z) = \frac{1}{w-a} \left[h(w) - \bar{a} f(w) \right],$$

$$\varkappa(z)=\frac{1}{w-a}\left[\bar{c}\,h(w)+(b-ac+\bar{a}\,\bar{c})f(w)\right]$$

где $\frac{d\varkappa}{dz}=\psi(z)\Big)$, и показывает, что функции f, h выражаются в виде

$$f(w)=f_0(w)+\frac{a(w-a)}{b-ac}\ln w,$$

$$h(w)=h_0(w)-\frac{a\bar{a}(w-a)}{b-ac}\ln w,$$

где f_0, h_0 — функции, голоморфные в T_1. Продолжая решение, автор, используя соотношение $\frac{dh_0}{dw}=g_0(w)$, разлагает краевые значения для $f_0+w\frac{df_0}{dw}+\bar{g}_0$, которые удалось установить из данных краевых условий, в ряд Фурье и функции f_0, g_0 — в ряды Лорана; затем он (аналогично решению вспомогательной задачи о концентрическом кольце) определяет неизвестные коэффициенты разложения f_0, g_0 и постоянную a. Таким образом удается найти функции φ и ψ и получить решение задачи.

На основании общего решения получено решение для специального случая эксцентрического кольца, находящегося под равномерным давлением на обеих окружностях.

Все рассуждения в статье отличаются математической точностью, которая до сих пор не получила в теории упругости должного распространения (точные определения понятий, рассмотрение особых точек на границе, исследование существования и однозначности решения). Статья непосредственно примыкает к книге Бабушки (Babuška Ivo, РЖМат, 1956, 6605К). F. Kroupa

5758. Одна обратная смешанная задача. Лебедев Л. Л., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 100—103

Решается следующая обратная смешанная краевая задача: контур C, состоящий из двух частей λ и ω, обтекается плоским потенциальным потоком идеальной жидкости. Часть λ известна и представляет собой прямолинейный отрезок заданной длины, а на искомой части ω задана скорость потока $v=f(s)$, где s — дуга контура C. Требуется построить контур C и определить поток, обтекающий этот контур.

Используя известные методы теории обратных краевых задач, автор показывает, что для функции $X(\zeta)=\ln\frac{dw}{dz}$, аналитической в круге $|\zeta|<1$, на одной части единичной окружности известна $\operatorname{Re}X(z)$, а на другой — $\operatorname{Im}X(z)$. Это дает возможность определить $\frac{dw}{dz}$ как функцию ζ, а затем выразить координаты искомого контура в виде функции угла на единичной окружности. Оказывается, что при заданной скорости на бесконечности наклон отрезка λ к оси OX, а также и его длина не могут задаваться произвольно, а определяются остальными условиями задачи. В. С. Рогожин

5759. Теорема единственности обратной задачи логарифмического потенциала для звездных множеств. Иванов В. К., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 99—106

Ограниченное множество D комплексной плоскости называется звездным относительно начала O, если из $z\in D$ вытекает принадлежность к D всего отрезка Oz. Каждый луч $\arg z=\theta$ содержит такую граничную точку $z_0=z_0e^{i\theta}$ множества D, что все точки $z=re^{i\theta}$ $r<r_0$ принадлежат D. Функция $r_0=f(\theta)$ называется определяющей звездное множество D. В работе доказана

Теорема. Если два ограниченных измеримых, звездных относительно начала O множества D_1 и D_2 имеют при одинаковой постоянной плотности одинаковый внешний потенциал, то определяющие их функции $f_1(\theta)$ и $f_2(\theta)$ совпадают почти для всех значений θ.

Эта теорема обобщает (в случае логарифмического потенциала) известную теорему П. С. Новикова (Докл. АН СССР, 1938, **18**, № 3, 165—168). Ю. А. Шашкин

5760. Определение формы профиля по заданной хордовой диаграмме, близкой к диаграмме известного профиля. Салимов Р. Б., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, **117**, № 9, 55—59

Решается следующая задача: задано распределение скоростей на контуре неизвестного профиля, обтекаемого безграничным плоским потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, близкое к распределению скоростей на известном профиле; требуется определить форму профиля.

Для определения параметрических уравнений контура, ограничивающего профиль, строится процесс последовательных приближений, основанный на рассмотрении конформного отображения области, занятой потоком, на область, внешнюю к кругу. Для построения первого приближения используется уравнение контура известного профиля.

Сходимость последовательных приближений не исследована, и вопрос об этом не поставлен. Не указаны также условия, при которых будет существовать интеграл в смысле главного значения по Коши в формуле (6) на стр. 57. Все это снижает значение указанного способа решения задачи, так как остаются невыясненными условия его применимости. А. В. Батырев

5761. Об обтекании проницаемых контуров. Третьяков М. В., Прикл. матем. и механ., 1958, **22**, № 2, 220—225

Рассматривается обтекание произвольного гладкого замкнутого равномерно проницаемого контура L потенциальным потоком идеальной жидкости. Искомое поле скоростей представляется в виде наложения двух вспомогательных полей: поля, созданного вихревым слоем, распределенным вдоль данного контура, и поля поступательного движения жидкости. Комп ексная скорость первого из этих полей представляется интегралом типа Коши с неизвестной плотностью $\gamma(s)$. Используя формулы Сохоцкого для предельных значений интеграла типа Коши, автор подсчитывает значение нормальной и касательной составляющих скорости при подходе к контуру изнутри и извне. После удовлетворения граничным условиям получается нелинейное сингулярное интегральное уравнение относительно $\gamma(s)$. Если параметр проницаемости устремить к бесконечности, то это уравнение вырождается в известное уравнение М. А. Лаврентьева, решающее задачу обтекания замкнутого плотного контура потенциальным потоком.

Во второй части работы автор преобразует полученное нелинейное уравнение в линейное, однако его рассуждения содержат ошибку. Автор пытается доказать, что нелинейный член

$$\gamma(s_0)\cdot\int_L\gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}\,ds$$

($\gamma(s)$ — неизвестная функция, r — расстояние между точками с дуговыми абсциссами s и s_0, λ — угол между касательной в точке s и секущей, проходящей через точки s и s_0) фактически приводится к линейному, так как $\int_L\gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}\,ds=\text{const}$. Это утверждение автора ошибочно, так как указанный интеграл является контурным

значением потенциала двойного слоя с плотностью $\gamma(s)$ в точке s_0 и, следовательно, его величина, вообще говоря, зависит от s_0. Этот факт легко усмотреть и из формулы, ссылаясь на которую автор делает вывод о постоянстве рассматриваемого интеграла:

$$\int_L \gamma(s)\frac{\sin\lambda}{r}\,ds = \int_L \gamma[s(\vartheta)]\,d\vartheta.$$

Автор не замечает, что ϑ является функцией не только s, но и s_0, а значит, и интеграл является функцией s_0. Таким образом, лишаются смысла дальнейшие рассуждения автора, относящиеся к исследованию интегрального уравнения. В. С. Рогожин

5762. О функциях классов A и $\mathfrak{H}_\delta$ в круговом кольце. Касьянюк С. А., Матем. сб., 1957, 42, № 3, 301—326

Автор переносит на круговое кольцо определения аналитических функций классов $\mathfrak{H}_\delta$ и A, хорошо изученные для случая круга. В теоремах 1, 2, 3, 4 рассматривается вопрос о построении аналога произведения Бляшке в n-связной круговой области.

Прямое распространение произведения Бляшке на многосвязные области невозможно, так как факторы $e^{-g(z,z_k)+ih(z,z_k)}$ (где $g(z,z_k)$ — функция Грина нашей области с полюсом z_k, а $-h(z,z_k)$ — сопряженная к ней), из которых в случае круга составляется произведение Бляшке, оказываются многозначными. Автор обобщает на случай бесконечного числа нулей, ранее применявшуюся в случае конечного числа нулей В. А. Зморовичем (РЖМат, 1957, 4737) идею о конструировании произведения Бляшке из факторов $H(z,z_k)$, дающих однолистное отображение области на круг с разрезами по концентрическим дугам окружностей ($H(z_k,z_k)=0$). Далее дается структурная формула для функций класса A в круговом кольце и устанавливаются оценки роста модуля функции в классах A и $\mathfrak{H}_\delta$

Приводится также обобщение на случай кольца теоремы В. И. Смирнова о том, что функция $f(z)$ с положительной вещественной частью входит во все классы $\mathfrak{H}_\delta$, $0<\delta<1$.

Примечания референтов. 1. Идею о построении произведения Бляшке в круговой канонической области автору не удалось провести корректно. Доказательство сходимости произведения (стр. 34) является несостоятельным из-за допущенной очевидной ошибки: в оценке (1.5) r зависит от a, а затем тут же эта оценка используется так, как если бы r от a не зависело. Заметим, кроме того, что при отсутствии нормировки факторов $H(z,a)$, аналогичной той, какая делается для множителей Бляшке в круге $\left(\text{множитель } \frac{|a|}{a}\right)$ произведение факторов $H(z,a_k)$ сходиться не обязано. Автор, однако, о нормировке не говорит совсем.

2. Теорема 5 о сходимости рядов $\sum \ln\frac{R}{|a_k|}$ и $\sum \ln\frac{|b_k|}{r}$, где $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — нули функций ограниченного вида в кольце, является частным случаем доказанной ранее П. Мюрбергом теоремы для круговой канонической области.

3. Развитая в работах Парро (Parreau M., Ann. Inst. Fourier, 1951, 3), В. Рудина (РЖМат, 1957, 361) и референтов (РЖМат, 1958, 3661) общая теория классов аналитических функций в многосвязных областях позволяет легко получить доказательство теоремы В. И. Смирнова в любой (даже бесконечносвязной) области. Г. Ц. Тумаркин, С. Я. Хавинсон

5763. Граничное поведение функций, аналитических в круге. Ловатер, Пиранян (The boundary behavior of functions analytic in a disk. Lohwater A. J., Piranian G. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1957, Sar. A-I, № 239, 17 pp.) (англ.)

Авторы занимаются главным образом следующей общей проблемой. Берется некоторый класс аналитических в круге $|z|<1$ функций (например, ограниченных) и рассматривается какая-либо определенная форма поведения функций этого класса на радиусе, проведенном в точку $e^{i\theta}$ (например, существование радиального граничного значения $f(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$. Требуется дать топологическую и метрическую характеристику множеств E, лежащих на единичной окружности C, для которых можно найти аналитическую функцию $f(z)$ из взятого класса, обладающую нужным поведением лишь на множестве E.

В § 2 рассматривается класс R аналитических в $|z|<1$ функций $f(z)$, имеющих радиальные граничные значения $f(e^{i\theta})$ во всех точках $e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$. Дается характеристика множеств E точек разрыва функций $f(e^{i\theta})$. Из известных результатов Бэра о разрывных функциях (Baire R. Lecons sur les fonctions discontinues, Paris, 1905) легко следует, что множество E должно быть типа F_σ и иметь первую категорию. Авторы показывают в теореме 1, что это условие является не только необходимым, но и достаточным, строя для наперед заданного множества $E\subset C$ первой категории и типа F_σ ограниченную, аналитическую в $|z|<1$ функцию $f(z)\in R$, у которой множество точек разрыва совпадает с E. Построенная ими функция $f(z)$ оказывается к тому же и однолистной в $|z|<1$. Этот результат находит себе тут же применение в теории конформных отображений, позволяя сделать следующее заключение о распределении простых концов по Каратеодори (см., например, А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М. — Л., 1950).

Теорема 2. Для того чтобы существовал гомеоморфизм между C и пространством простых концов односвязной ограниченной области, при котором каждой точке $C-E$ соответствует простой конец первого рода, а каждой точке E — простой конец второго рода, необходимо и достаточно, чтобы E было типа F_σ и первой категории.

Рассматривается класс R_0 ограниченных аналитических в $|z|<1$ функций $\not\equiv$ const, для которых во всех точках $e^{i\theta}$, $0\leqslant\theta<2\pi$ существуют радиальные граничные значения $f(e^{i\theta})$ такие, что либо $|f(e^{i\theta})|=1$, либо $f(e^{i\theta})=0$.

Доказывается

Теорема 3. Для того чтобы множество $E\subset C$ было множеством точек, где радиальные граничные значения некоторой функции $f(z)=f_E(z)$, входящей в класс R_0, обращаются в нуль, необходимо и достаточно, чтобы $mE=0$ и множество E было одновременно типов F_σ и G_δ.

В § 3 изучается класс A ограниченных аналитических в $|z|<1$ функций $f(z)$, имеющих почти всюду на $|z|=1$ радиальные граничные значения $f(e^{i\theta})$, $|f(e^{i\theta})|=1$. Доказывается следующая теорема, дающ

щая некоторое усиление известного результата Лузина — Привалова о возможности построения аналитических и ограниченных в круге $|z|<1$ функций, не имеющих радиальных граничных значений на заранее заданном множестве (см., например, И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М. — Л., 1950) меры нуль.

Теорема 5. Пусть множество $E \subset C$ замкнуто и $mE = 0$. Тогда существует функция $f(z) \in A$ такая, что во всех точках $e^{i\theta} \in C - E$ существует $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\theta})$, а во всех точках множества E

$$\lim_{r\to 1} |f(re^{i\theta})| = 0, \quad \overline{\lim_{r\to 1}} |f(re^{i\theta})| = 1.$$

В теореме 8, обобщающей теорему 5, показывается, что если предположить, что E будет одновременно типов F_σ и G_δ и $mE = 0$, то существует функция $f(z) \in A$, удовлетворяющая, помимо перечисленных в теореме 5 свойств, также условию: $|f(e^{i\theta})| = 1$ всюду на $C - E$, за исключением счетного множества точек, где $f(e^{i\theta}) = 0$.

Из теоремы Фату о существовании почти всюду угловых, граничных значений у аналитической ограниченной в круге $|z|<1$ функции сразу вытекает, что для почти всех точек $|z| = 1$ найдется кривая Γ, касающаяся $|z| = 1$, вдоль которой $f(z)$ будет стремиться к определенному пределу. В § 5 авторы, усиливая ранее известную теорему Литлвуда (Littlewood J. E., London Math. J., 1927, 2, 172—176), показывают, что в известном отношении этот результат не может быть улучшен. Для любой заранее заданной кривой Γ, касающейся в точке $z = 1$ внутренним образом окружности $|z| = 1$, приводится простая конструкция произведения Бляшке $b(z)$, не стремящегося к пределу, когда z приближается к любой точке $e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$ по кривой Γ_θ, полученной из Γ вращением на угол θ вокруг $z = 0$ (Литлвуд установил существование ограниченных аналитических функций с подобным свойством лишь для почти всех точек $e^{i\theta}$).

В § 6 доказывается существование мероморфной в круге $|z|<1$ функции $f(z)$, характеристика которой $T(r, f) = 0[-\log(1-r)]$, не имеющей ни при одном θ радиального граничного значения. Библ. 20 назв.

Г. Ц. Тумаркин

5764. Проблема коэффициентов для некоторых функций, мероморфных в единичном круге. Дюфренуа (Le problème des coefficients pour certaines fonctions méromorphes dans le cercle unité. Dufresnoy Jacques. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 250/9, 7 p.) (франц.)

Вводится класс $\mathfrak{M}_p$. Функция $f(z) \in \mathfrak{M}_p$, если она мероморфна в $|z|<1$, имеет p полюсов (считая и их кратность) и если $\limsup\limits_{|z|\to 1} |f(z)| \leqslant 1$. Автор указывает, что, производя над функцией $f(z)$ класса $\mathfrak{M}_p$ конечное число преобразований, аналогичных преобразованиям, входящим в алгоритм Шура для проблемы коэффициентов ограниченных функций, он получает функцию класса $\mathfrak{M}_0$, т. е. ограниченную и регулярную в единичном круге. Отсюда можно получить требуемые неравенства и для коэффициентов функций класса $\mathfrak{M}_p$. Указывается, что результаты, полученные при изучении класса $\mathfrak{M}_1$, находят некоторые приложения в теории алгебраических чисел. С. А. Гельфер

5765. Семейства преобразований в функциональных пространствах H_p. Суэрлинг (Families of transformations in the function spaces H_p. Swerling P.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 1015—1029 (англ.)

Изучаются полугруппы линейных преобразований в пространствах H_p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ (о классах H_p см., например, Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, ГИТТЛ, 1950). Пусть Δ — единичный круг, $\{\omega_t(z)\}$ — семейство функций $(z \in \Delta, t \in \Gamma)$, где Γ — множество комплексных чисел, подчиненное условиям: если $t_1, t_2 \in \Gamma$, то $t_1 + t_2 \in \Gamma$; Γ содержит начало координат и некоторый луч, исходящий из начала; всякие две точки Γ могут быть соединены в Γ с помощью конечного числа спрямляемых дуг Жордана. Предположим, что при всяком $t \in \Gamma$, ω_t регулярна в Δ и отображает Δ в себя; пусть для $t_1, t_2 \in \Gamma$ и $z \in \Delta$ $\omega_{t_2}[\omega_{t_1}(z)] = \omega_{t_1+t_2}(z)$; $\omega(z, 0) = z$ для всех $z \in \Delta$; пусть при всяком $z \in \Delta$ $\omega_t(z)$ дифференцируема по t вдоль Γ, причем функцию $P(z) = \dfrac{\partial}{\partial t}\omega(z, t)\Big|_{t=0}$ будем предполагать регулярной в Δ. Пусть оператор T_t $(t \in \Gamma)$ действует из H_p в H_p по формуле $(T_t f)(z) = f(\omega_t(z))$, $z \in \Delta$.

В первой теореме статьи оцениваются нормы операторов T_t.

Семейство T_t образует полугруппу линейных непрерывных операторов из H_p в H_p. Пусть A — производящий оператор этой полугруппы, $D(A)$ — его область определения. Показано, что $(Af)(z) = P(z)f'(z)$ при всех $z \in \Delta$, $f \in D(A)$.

При некоторых дополнительных требованиях, наложенных на строение τ вблизи $t = 0$, из условия $\lim\limits_{t\to 0, t\in\Gamma} \|T_t f - f\| = 0$ $f \in H_p$ вытекает, что $D(A) = E\{f : f \in H_p, f' \times P \in H_p\}$, $\overline{D(A)} = H_p$, оператор A замкнут.

Далее решается вопрос о восстановлении семейства ω_t и множества Γ по данной функции $P(z)$ (при дополнительных предположениях о P).

В заключение развитая теория иллюстрируется на примерах полугрупп $(T_w f)(z) = f(wz)$, $|w| \leqslant 1$; $(L_\alpha f)(z) = f\left(\dfrac{z+\alpha}{1+\alpha z}\right)$ $(-1 < \alpha < 1)$. Библ. 9 назв. В. П. Хавин

5766. Об интерполировании аналитических семейств операторов, действующих в пространствах H_p. Стейн, Уэйсс (On the interpolation of analytic families of operators acting on H_p -spaces. Stein E. M., Weiss Guido), Tohoku Math. J., 1957, 9, № 3, 318—339 (англ.)

Работа посвящена распространению одной теоремы Кальдерона—Зигмунда (Calderon A. P., Zygmund A., Studia math., 1951, 194—204) на тот случай, когда рассматриваются линейные преобразования, зависящие от параметра.

Пусть M — точечное множество, μ — определенная на нем мера, $q > 0$, $L^q(M, \mu)$ — класс всех измеримых на M комплекснозначных функций f, для которых

$$\|f\|_q = \left\{\int_M |f|^q d\mu\right\}^{1/q} < \infty,$$

и Π — класс всех полиномов $P(w) = a_0 + a_1 w + \ldots + a_k w^k$, где $a_0, a_1, \ldots, a_k$ — комплексные числа, а w — комплексная переменная. Изучаются линейные преобразования T типа (p, q), т. е. такие, которые отображают Π в класс измеримых функций, определенных на M и обладают тем свойством, что $\|TP\|_q \leqslant A\|P\|_p$ для всех $P \in \Pi$, где A — некоторая положительная константа. В том случае, когда для значений z, лежащих в замкнутой полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$, семейство преобразований $\{T_z\}$, отображающих Π в $L^1(M, \mu)$ таково, что для любого многочлена $P \in \Pi$ и любой функции $g \in L^\infty(M, \mu)$ интеграл $\int_M (T_z P)\, g d\mu$ является аналитической функцией

от z, а $\ln \| T_z P \|_1 \leqslant Be^{b|y|}$, где $b < \pi$ и B — некоторые константы, доказывается следующая теорема: Если при заданных значениях положительных чисел p_0, p_1, q_0, q_1 для всех y $(-\infty < y < \infty)$ и для всех $P \in \Pi$

$$\| T_{iy} P \|_{q_0} \leqslant A_0(y) \| P \|_{p_0}, \quad \| T_{1+iy} P \|_{q_1} \leqslant A_1(y) \| P \|_{p_1},$$

где $\ln A_\nu(y) \leqslant C_\nu e^{d_\nu |y|}$, $0 < d_\nu < \pi$, $C_\nu > 0$ $(\nu = 0,1)$, то при любом вещественном значении t на отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$, для всех $P \in \Pi$,

$$\| T_z P \|_{q_t} \leqslant A \| P \|_{p_t},$$

где

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

и A — константа, зависящая только от t, p_ν, q_ν, C_ν, d $(\nu = 0,1)$. Дано приложение этого результата к доказательству одной теоремы Суноути из теории рядов Фурье. А. Ф. Тиман

5767. Принцип монотонности аргумента и дифференцирование неравенств. Мейман Н., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 6, 1191—1193

Пусть G — открытая комплексная плоскость $z \neq \infty$ с разрезами вдоль системы β замкнутых интервалов вещественной оси (в эту систему могут входить полубесконечные интервалы и бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$). Допустимыми функциями в G (или в универсальной накрывающей $\widetilde{G}$ области G) автор называет однозначные и аналитические в G (в $\widetilde{G}$) функции $f(z)$, для которых существует однозначная и аналитическая функция $\bar{f}(z)$, принимающая на границе β (соответственно, на границе $\tilde{\beta}$, лежащей над β) значения, сопряженные значениям $f(z)$.

Класс HB в G (или $\widetilde{G}$) состоит из допустимых в G (соответственно в $\widetilde{G}$) функций $\omega(z)$, не имеющих общих нулей с функцией $\omega(z)$ и удовлетворяющих в G (в $\widetilde{G}$) неравенству $|\bar{\omega}(z) : \omega(z)| < 1$. Допустимая функция $f(z)$ по определению подчинена допустимой функции $\omega(z)$, если $|\bar{f}(z) : \omega(z)| < 1$ и $|f(z) : \omega(z)| < 1$ всюду в $\widetilde{G}$. Если допустимая функция $f(z)$ подчинена функции $\omega(z)$ и $\bar{\omega}(z) \in HB$, то при любом t, для которого $|t| < 1$, функция $\omega_t(z) = \bar{\omega}(z) - t\bar{f}(z)$ принадлежит классу HB в $\widetilde{G}$ и $\arg \omega_t(z)$ монотонно убывает вдоль границы $\tilde{\beta}$. При этом в регулярных точках границы $\tilde{\beta}$ (т. е. в точках, лежащих над внутренними точками берегов разрезов β), при любых γ и δ, $\operatorname{Im}(\gamma : \delta) \leqslant 0$, справедливо неравенство $|\gamma f'(x) + \delta f(x)| \leqslant |\gamma\omega'(x) + \delta\omega(x)|$, которое при $\gamma \neq 0$ может в какой-либо такой точке обратиться в равенство только тогда, когда $f(z) = c_1\omega(z) + c_2\bar{\omega}(z)$, а $|c_1| + |c_2| = 1$.

Наименьшее значение для верхней грани отношений $|f(z) : \omega(z)|$ и $|\bar{f}(z) : \omega(z)|$ в $\widetilde{G}$ среди всех функций $f(z)$, для которых в какой-либо регулярной точке ξ на $\tilde{\beta}$, $\gamma f'(\xi) + \delta f(\xi) = 1$, $(\gamma \neq 0)$, равно $|\gamma\omega'(\xi) + \delta\omega(\xi)|^{-1}$.

Указан вид экстремальной функции этой задачи и приведен один критерий для принадлежности функции классу HB. А. Ф. Тиман

5768. О $\cos x \cos(x/2) \cdot \cos(x/3) \ldots$ Макинтайр (On $\cos x \cos(x/2) \cdot \cos(x/3) \ldots$ Macintyre A. J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 58 (англ.)

Целая функция $F(x) = \prod_1^\infty \cos(x/n)$ имеет нули при $x = n\pi/2$, порядок которого равен числу четных делителей n. Из распределения этих делителей применением известной тауберовой теории получается асимптотическая оценка для $F(z)$: $\ln F(iy) \sim y \ln(2y/\pi)$. Однако эта теория дает нам весьма мало информации для действительных z. Специальные вычисления показывают, что $\ln F(x) \sim -\pi x$, когда x стремится к бесконечности вне интервалов фиксированной длины, содержащих нули.

5769. Об исследовании Уиттекера. Виджаяраghаван, Падмавалли (On a question of J. M. Whittaker. Vijayaraghavan T., Padmavally K.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1956, **A22**, № 1, 1—6 (англ.)

Уиттекер (РЖМат, 1956, 1273) поставил вопрос, может ли случиться, что выражение

$$\sum_1^\infty a_n f(nz)$$

тождественно равно нулю, когда a_n не все равны нулю и $f(z)$ — целая трансцендентная функция, и показал, что этот вопрос эквивалентен следующему: может ли оказаться, что целая функция от e^z имеет бесконечное число коэффициентов, равных нулю, в своем ряде Тейлора. Авторы строят пример, положительно отвечающий на второй вопрос. R. P. Boas

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 646

5770. Нули одного семейства целых функций. Перри (The zeros of a family of integral functions. Perry R. L.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 2, 144—153 (англ.)

Рассматривается семейство целых функций $f(z,t) = \sum_{n=0}^\infty r_n(t) a_n z^n$ $(0 < t < 1)$ комплексного переменного z, где $a_0 = 1$, $\sum a_n z^n$ — любая целая функция и $r_n(t)$ — функции Радемахера, определенные следующими соотношениями:

$$r_n(t+1) = r_n(t) = r_0(2^n t), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$r_0(t) \doteq \begin{cases} 1, \text{ если } 0 \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ -1, \text{ если } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассматривается множество S всех нулей всех функций семейства $f(z,t)$. Доказываются следующие теоремы: 1) Множество S несчетно. 2) Множество S совершенно. 3) Множество S имеет нулевую размерность по Хаусдорфу (Hausdorff M., Math. Ann., 1919, **79**, 157—179). Рассматривается также обобщение результатов на семейства вида $f(z,t) = \sum_{n=0}^\infty a_n(t) a_n z^n$, где $a_n(t)$ — независимые функции, рассмотренные Кацем (Кас М., Studia math., 1936, **6**, 47). Н. П. Романов

5771. О кратных нулях производных периодических функций. Реньи (On multiple zeros of derivatives of periodic entire functions. Rényi C.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 66 (англ.)

Пусть $f(z)$ — периодическая целая функция экспоненциального типа τ с периодом P и a — произвольная точка комплексной плоскости. Тогда число производных $f(z)$, имеющих кратный корень в точке a, не превосходит $\frac{1}{2}|P|\tau$.

Если обозначить через $z_a(n)$ число нулей в последовательности $f(a), f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то из этой теоремы следует, что последовательность $z_a(n) - \frac{1}{2}n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена. Таким образом улучшен предыдущий результат, устанавливающий, что при тех же предположениях $\liminf \left(z_a(n) - \frac{n}{2} \right)$ конечен. Получаются и другие связанные с этим результаты о целых функциях.

5772. **О кратных почти периодических целых функциях.** **Торнехаве** (On multiply almost periodic entire functions. Tornehave H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 68—69 (англ.)

Петерсен в 1938 г. построил целую функцию $f(z) = f(x + iy)$, которая почти периодична в каждой полосе $\alpha < x < \beta$ и в каждой полосе $\gamma < y < \delta$. Эта функция была предельно периодической в обоих направлениях. Метод, примененный Петерсеном, развивается дальше для построения дважды почти периодических функций, которые имеют конечный целый базис в обоих направлениях или предельно периодичны в одном направлении и с конечным целым базисом в другом.

5773. **Добавление к теореме Марцинкевича.** **Лукач** (Extensions of a theorem of Marcinkiewicz. Lukacs E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 123—124 (англ.)

Марцинкевич нашел необходимые условия, чтобы целая функция конечного порядка являлась характеристической. При этом он показал, что не существует характеристической функции в виде $e^{P(t)}$, где $P(t)$ — полином степени, большей 2. В настоящей заметке этот результат распространен на целые функции бесконечного порядка. Доказана следующая теорема: Пусть $P(t)$ — полином степени $m > 2$ и пусть $f_n(t) = K_n e_n[P(t)]$, где K_n выбрана так, что $f_n(0) = 1$. Тогда $f_n(t)$ не может быть характеристической функцией. Здесь $e_n(z)$ определена рекуррентно: $e_n(z) = e^{e_{n-1}(z)}$, $e_1(z) = e^z$. Подобные результаты получены для характеристических функций в форме $f(t) = f_1(t)\, e^{P(t)}$.

5774. **Некоторые свойства максимальной функции для мероморфной функции.** **Бос, Сривастав** (Certaines propriétés de la fonction maximum d'une fonction méromorphe. Bose S. K., Srivastav R. P.), Ann. scient. École norm. supér., 1958, **75**, № 1, 37—47 (франц.)

Пусть $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ — мероморфная в $z \neq \infty$ функция порядка ρ, $f_1(z)$ — целая функция, $f_2(z)$ — каноническое произведение, построенное по полюсам $f(z)$. Пусть a_n и b_n — нули и полюсы $f(z)$, ρ_1 и ρ_2 — их предельные показатели сходимости, $h_1 > \rho_1$, $h_2 > \rho_2$. Исключим из $|z| < \infty$ кружки $|z - a_n| < |a_n|^{-h_1}$ и $|z - b_n| < |b_n|^{-h_2}$ и все дальнейшие построения будем проводить в полученной области, не оговаривая этого. Максимальной функцией $f(z)$ называется $S(r) = S(r, f) = \max_{|z|=r} |f_1(z)| / \min_{|z|=r} |f_2(z)|$, $S^*(r) = \max \left(S(r, f), S\left(r, \frac{1}{f}\right) \right)$. Максимальные функции исследовались первым из авторов (Bose S. K., Bull. Calcutta Math. Soc., 1952, **44**, 69—74; Math. Z., 1952, **56**, 223—226; РЖМат, 1958, 1162); продолжая эти исследования, в настоящей статье авторы доказывают семь теорем, которые показывают, что $S(r)$ и $S^*(r)$ обладают многими свойствами максимальной функции $M(r, g)$ для целой функции $g(z)$. Приведем три из них.

Теорема 1. Если существуют точки ζ и ζ' на $|z| = r$ такие, что $|f(\zeta)| = S(r, f)$ и $|f'(\zeta')| = S(r, f')$, то $\overline{\lim_{r \to \infty}} \ln \{rS(r, f')/S(r, f)\}/\ln r = \rho$.

Теорема 6. Если при некотором целом q $\ln S^*(r) = o(r^{q+1})$, то $f(z)$ — мероморфная функция рода $\leqslant q$.

Теорема 7. При $0 < r < R \leqslant 2r$ $m(r, f'/f) < \ln^+ R + 2\ln^+ (R - r)^{-1} + 2\ln \ln S^*(r) + O(1)$.

В статье много мелких неточностей. А. А. Гольдберг

5775. **Некоторые оценки для мероморфных функций порядка меньше единицы.** **Гольдберг А. А.**, Докл. и сообщ. Ужгородск. ун-та, Сер. физ.-матем. и хим., 1957, № 1, 22

Краткое сообщение о результатах автора, изложенных более полно в другой работе (РЖМат, 1958, 4662). Г. Ц. Тумаркин

5776. **О характеристической функции мероморфной функции. I.** **Шанкар** (On the characteristic function of a meromorphic function. I. Shankar Hari), Tôhoku Math. J., 1957, **9**, № 3, 243—246 (англ.)

Пусть $f(z)$ мероморфна в $z \neq \infty$ и имеет конечный положительный порядок ρ, $T(r)$ — ее неванлинновская характеристика, $\pi A(r)$ — площадь образа $|z| < r$, измеренная в сферической метрике. Пусть $L(r)$ — некоторая медленно растущая функция (РЖМат, 1958, 2027 К, 48), обозначим $(r \to \infty)$

$$\left.\begin{matrix}\tau \\ t\end{matrix}\right\} = \overline{\lim} \frac{T(r)}{r^\rho L(r)}, \quad \left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} = \underline{\lim} \frac{A(r)}{r^\rho L(r)}.$$

Тогда: 1) $\nu \leqslant \rho t \leqslant \nu(1 + \ln \mu/\nu) \leqslant \mu$; $\nu \neq 0$

2) $\nu \leqslant \mu \exp(\nu/\mu - 1) \leqslant \rho\tau \leqslant \mu \leqslant e\rho\tau$;

3) $\mu + \nu \leqslant e\rho\tau$.

Как отмечает автор, при $L(r) = 1$ эти результаты известны (Singh S. K., Thesis. Aligarh, 1953).

В формулах (2. 2) — (2. 5) опечатка: k — множитель, а не индекс. А. А. Гольдберг

5777. **Теорема относительно существования деформируемых конформных отображений.** **Хейнс** (A theorem concerning the existence of deformable conformal maps. Heins Maurice), Ann. Math., 1958, **67**, № 1, 42—44 (англ.)

Риманова поверхность F допускает деформируемое конформное отображение в себя $(F \in D)$, если существует непрерывно зависящее от $t \in [0, 1]$ семейство конформных (не обязательно взаимно однозначных) отображений $f(p, t)$, $p \in F$, F в F такое, что $f(p, 0) \neq f(p, 1)$.

Очевидно, что поверхности, конформно эквивалентные сфере, сфере с одним или двумя проколами, тору, принадлежат классу D (Heins M., J. math. pures et appl., 1958, **37**, 153—160). Компактные римановы поверхности рода $\geqslant 2$ не принадлежат классу D (классический результат). Некомпактные поверхности с нулевой границей, отличные от сферы с одним или двумя проколами, не принадлежат классу D. В реферируемой статье рассмотрен оставшийся случай некомпактной римановой поверхности с положительной границей и доказано, что для принадлежности ее к классу D необходимо и достаточно существование на этой поверхности ограниченной аналитической функции, не равной тождественно постоянной. А. А. Гольдберг

5778. **Некоторые замечания относительно параболических римановых поверхностей.** **Хейнс** (Some remarks concerning parabolic Riemann surfaces. Heins Maurice), J. math. pures et appl., 1957, **36**, № 4, 305—312 (англ.)

Пусть F — некомпактная риманова поверхность, Ω — область на F, обладающая функцией Грина $\mathfrak{G}_\Omega$, Δ — замкнутый круг с аналитической границей γ, содержащийся в Ω, $\lambda(\Omega) = \inf_u \{\sup_{p \in \Omega - \Delta} u(p)\}$, где $u(p)$ — гармоническая в

Ω—Δ функция, равная нулю на γ, такая, что $\int_\gamma (\partial u/\partial n)ds = 2\pi$. В случае $\Omega = \{|z|<r\}$, $\Delta = \{|z|<1\}$ $\lambda(\Omega) = \ln r$. Пусть f отображает конформно F в риманову поверхность G (отображение не обязательно взаимно однозначное). Для этого отображения вводится неванлинновская характеристика $T(\Omega)$ и формулируется обобщение первой основной теоремы. Это отличается от результатов автора (реф. 5779) лишь тем, что на области Ω не накладываются некоторые ограничения, которые при доказательстве существенной роли не играют.

Основной результат статьи: Если F — параболического типа и Ω исчерпывают F, то всегда существует $\lim T(\Omega)/\lambda(\Omega)$, конечный или бесконечный. Пусть $\nu(q)$ ($q \in G$) равно числу точек на F, в которых $f(p) = q$. Если упомянутый предел конечен, то $\max \nu(q) = \nu^0 < \infty$, $\lim T(\Omega)/\lambda(\Omega) = \nu^0$ и $\nu(q) = \nu^0$ на дополнении нигде не плотного замкнутого множества. Наоборот, предполагая $\nu^0 < \infty$, получаем, что для всех $\Omega \supset \Omega_0 \supset \Delta$ $T(\Omega) = \nu^0 \lambda(\Omega) + O(1)$.

Доказательство опирается на оценки $\operatorname{osc} \mathfrak{G}_\Omega(p_1, p_2)$, когда (p_1, p_2) принадлежат компактному подмножеству $K \times K$ без диагонали, где $K \subset \Omega$-компактное множество, содержащее более одной точки. А. А. Гольдберг

5779. Линделёфовы отображения. Хейнс (Lindelöfian maps. Heins Maurice), Ann. Math., 1955, 62, № 3, 418—446 (англ.)

Автор называет линделёфовым отображением конформное отображение f римановой поверхности F с положительной или нулевой идеальной границей в некоторую риманову поверхность G, обладающее следующим свойством: если $(p, q) \in F \times G$, тогда

$$S(p, q) = \sum_{f(r)=q} n(r) \cdot \mathfrak{G}_F(p, r) < +\infty$$

для $f(p) \neq q$, где $\mathfrak{G}_F$ — функция Грина для F, а $n(r)$ — кратность f в точке r.

Любое отображение является линделёфовым, если G имеет положительную идеальную границу, как это следует из принципа Линделёфа. Этот случай был исследован автором в его работе (РЖМат, 1957, 6316), которую в дальнейшем цитируем обозначением L. P. (Lindelöf Principle). В настоящей работе автор исследует поверхности G с нулевой идеальной границей.

Если предполагать, что F — внутренность единичного круга ($|z|<1$) и G — расширенная плоскость, тогда линделёфово отображение совпадает с отображением, осуществляемым мероморфной функцией с ограниченной неванлинновой характеристикой. Многие из классических результатов, относящихся к этим функциям, распространяются автором на линделёфовы отображения.

Он доказывает для некомпактной римановой поверхности G существование непрерывной и симметричной в $G \times G$ функции K, значения которой находятся в интервале $(-\infty, +\infty)$; со свойством: для каждого $q \in G$ функция $s \to K(s, q)$ гармонична всюду на G кроме q, где она имеет положительно нормированную логарифмическую особенность и, кроме того, она ограничена сверху в дополнительном множестве каждой окрестности q; разность $K(s, q_1) - K(s, q_2) = O(1)$ в дополнительном множестве компактной окрестности $\{q_1, q_2\}$, где q_1 и q_2 — две разные точки в G. Если G имеет нулевую идеальную границу, тогда функцию K можно рассматривать как аналог функции Грина.

Затем автор строит для двух разных точек в G, q_1 и q_2 вспомогательную функцию $D(s; q_1, q_2)$, определенную в G соотношением $\mathfrak{G}_G(s, q_1) - \mathfrak{G}_G(s, q_2)$ или $K(s, q_1) - K(s, q_2)$ смотря по тому, является ли идеальная граница G положительной или нулевой (если G компактна, тогда D рассматривается для $G - \{r\}$, $r \neq q_1, q_2$).

Пусть q — точка области $\Omega \subset G$ и p_0 — фиксированная точка из области $\omega \subset F$ (области, рассматриваемые в реферируемой работе, ограничены конечным числом жордановых аналитических кривых). Обозначая через $S(p, q; \omega)$ величину $\sum_{f_\omega}(r) = q^{n(r)} \mathfrak{G}_\omega(p, r)$, (где f_ω — сужение f на ω), а через $U_q(s)$ функцию, равную $\mathfrak{G}_\Omega(s, q)$ для $s \in \Omega$ и равную 0 для $G - \Omega$, автор вводит функцию $H(p)$ — наименьшую гармоническую мажоранту для $U_q \circ f_\omega - S(p, q; \omega)$, и строит функцию

$$T(q, \Omega; \omega) = H(p_0) + S(p_0, q, \omega)$$

для $q \neq f(p_0)$ (Это определение соответственно изменяется, если $q = f(p_0)$). T монотонна по отношению к ω. При помощи функции T автор распространяет первую основную теорему Р. Неванлинны на отображение некомпактной римановой поверхности в произвольную римановую поверхность. $T(\omega)$ берется в качестве характеристической функции при зафиксированных q и Ω. Обобщается теорема Фростмана — Неванлинны.

Линделёфовы отображения совпадают с конформными отображениями с ограниченными характеристиками $T(\omega)$. Далее устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы f было линделёфовым отображением.

Обозначим для каждого открытого в G множества $\mathfrak{E}$ знаком P_0 наименьшую супергармоническую функцию, которая $\geqslant 0$ в F и $\geqslant 1$ в $f^{-1}(O)$, а через b_0 ее наибольшую гармоническую миноранту и пусть $B_\mathfrak{E}$ — нижняя огибающая семейства b_0 для $O \supset \mathfrak{E}$, $O \subset G$. $B_\mathfrak{E}$ гармонична, $\geqslant 0$ в F и если f — линделёфово отображение а емкость $\mathfrak{E}$ равна нулю, то $B_\mathfrak{E} = 0$. Из этой теоремы автор выводит данное Фростманом и Неванлинной обобщение теоремы Ф. Рисса и М. Рисса.

Далее характеризуются при помощи функции $B_\mathfrak{E}$ или еще функции

$$S^*(p, q) = \inf_{V(q)} \sup_{r \in V(q)} S(p, r)$$

($V(q)$ — окрестность точки q) те точки G, для которых линделёфово отображение f принадлежит типу Бляшке (в смысле L. P.). Для этой цели автор обобщает для римановых поверхностей одно равенство Лехто, посредством которого изучается функция $p \to \delta(p, q) = S^*(p, q) - S(p, q)$, $\delta(p, q) > 0$ только на множестве F_σ емкости нуль в G, которое не зависит от p; для каждого q и этого множества $p \to \delta(p, q)$ гармонична, сингулярна и положительна в F.

Уточняя результаты Лехто, автор характеризует множество тех точек, в которых мероморфная функция ($\neq$ const) с ограниченной характеристикой в $|z|<$ принадлежит типу BI.

Пусть f и q — конформные отображения римановых поверхностей F в G и G в H, а $h = q \circ f$.

Изучаются те условия, в которых свойство для некоторых из этих отображений быть линделёфовым влечет за собой как следствие для остальных тоже быть линделёфовыми.

Линделёфовы отображения позволяют уточнить классификацию римановых поверхностей: вводится класс O

оверхностей, которые не допускают мероморфные линделёфовы функции не равные константе, и показывается, что

$$O_{BA} \supsetneq O_L \supsetneq O_{BH}.$$

Здесь O_{BA} (O_{BH}) обозначает класс римановых поверхностей, не допускающих на них ограниченных аналитических (гармонических) функций, не равных константе. В случае поверхностей конечного рода, обозначая звездочками соответствующие классы, имеем

$$O^*_{BA} \supsetneq O_L = O^*_{BH} = O^*_G.$$

Автор приводит пример поверхности $\notin O_L$, на которой, между тем, не существует аналитической линделёфовой функции $\not\equiv$ const. В заключение изучается поле функций на F, линделёфовых, мероморфных или равных константе, и доказывается теорема единственности относительно класса гармонических функций, равных разностям двух неотрицательных гармонических функций. C. Andreian Cazacu

5780. **О поверхностях наложения Абеля и Шоттки для замкнутой римановой поверхности. Цудзи** (On Abelian and Schottkyan covering surfaces of a closed Riemann surface. Tsuji Masatsugu), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1957, 6, № 1, 9—28 (англ.)

Пусть F — риманова поверхность, лежащая над z-сферой, однозначная на F мероморфная функция $w(z)$ отображает F на другую риманову поверхность над w-сферой, чью площадь (в сферической метрике) обозначим $D^*[w]$. Если для любой $w(z) \not\equiv$ const $D^*[w] = \infty$, то $F \in O_{MD^*}$, в противном случае — $F \in P_{MD^*}$. Очевидно класс O_{MD^*} содержится в классе O_{AD} римановых поверхностей, на которых не существует отличных от постоянной регулярных функций с ограниченным интегралом Дирихле.

Пусть F — замкнутая риманова поверхность рода $p \geqslant 2$, C_i, C_i' ($i = 1, \ldots, p$) — p пар ее канонических циклических сечений. Пусть $\varphi(z)$ — некоторая многозначная непрерывная (не обязательно аналитическая) функция на F такая, что разность ее значений на краях разреза $C_i(C_i')$ равна постоянной $\omega_i(\omega_i')$, равной приросту $\varphi(z)$ при обходе z по $C_i'(C_i)$. ω_i, ω_i' называются периодами $\varphi(z)$, r — максимальное число линейно независимых периодов. Риманова поверхность Φ, которая накрывает F и на которой $\varphi(z)$ однозначна (имеется в виду слабейшая униформизирующая поверхность. *Реф.*), называется поверхностью наложения Абеля для F.

Мори (Mori A., РЖМат, 1956, 2946) показал, что всегда $\Phi \in O_{AD}$ и Φ имеет нулевую при $r \leqslant 2$ и положительную границу при $r \geqslant 3$. В реферируемой работе показано, что при $r \geqslant 3$ $\Phi \in O_{MD^*}$. Если $r = 2$ и ω_1 и ω_2 линейно независимы, то также $\Phi \in O_{MD^*}$. Если $r = 2$, ω_1 и ω_1' линейно независимы и $\Phi \in P_{MD^*}$, то на F существует абелев интеграл первого рода (Неванлинна Р., РЖМат, 1956, 7313К) $\zeta = \zeta(z) = \int^z R(z)\,dz$, периоды которого Ω_i, Ω_i' на C_i, C_i' обладают тем свойством, что их линейные комбинации с целыми коэффициентами обращаются в нуль одновременно с такими же комбинациями ω_i, ω_i'; $\zeta = \zeta(z)$ отображает Φ на N-листную риманову поверхность ($2 \leqslant N < \infty$) с единственной граничной точкой над $\zeta = \infty$, в произвольной окрестности которой содержится бесконечное число точек ветвления; однозначная мероморфная функция $w(z)$ на Φ имеет $D^*[w] < \infty$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ является рациональной функцией от $\zeta(z)$. Аналогичные результаты получены для случая $r = 1$, в этом последнем случае, как утверждает автор, более общий результат получен Одзава (РЖМат, 1958, 6650).

Пусть Φ_p^q — поверхность наложения F, чья фундаментальная группа изоморфна подгруппе фундаментальной группы F, составленной из произведений путей, гомотопных $C_1', \ldots, C_p', C_{q+1}, \ldots, C_p$ ($1 \leqslant q \leqslant p$); Φ_p^q называется поверхностью наложения Шоттки. Ранее автором было показано (РЖМат, 1955, 5758; Φ_p^q там обозначалось $F_{(q)}^{(\infty)}$; ссылка в цит. реферате дана неточно), что Φ_p^q имеет при $q = 1$ нулевую или положительную границу при $q \geqslant 2$, и получены другие свойства Φ_p^q. В реферируемой работе эти исследования продолжены. Всегда $\Phi_p^q \in O_{AD}$, Φ_p^1 является поверхностью наложения Абеля, Φ_p^p подобна однолистным и $\Phi_p^p \in P_{MD^*}$. Если $2 \leqslant q \leqslant p-1$ и $\Phi = \Phi_p^q \in P_{MD^*}$, то существует однозначное на Φ мероморфное решение $\zeta(z)$ уравнения $\{\zeta, z\} = R(z)$ (фигурная скобка означает шварцову производную, $R(z)$ — однозначная на F мероморфная функция) со всюду разрывной линейной группой (Форд Л. Р., Автоморфные функции, М.-Л., 1936) такое, что однозначная мероморфная на Φ функция $w(z)$ имеет $D^*[w] < \infty$ тогда и только тогда, когда $w(z)$ является рациональной функцией от $\zeta(z)$, при этом $\zeta(z)$ отображает Φ на N-листную риманову поверхность ($2 \leqslant N < \infty$) со всюду разрывным совершенным множеством граничных точек, являющихся точками сгущения для точек ветвления. А. А. Гольдберг

5781. **Обобщение теоремы Пикара. Лехто** (A generalization of Picard's theorem. Lehto O.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 57 (англ.)

Теорема Пикара устанавливает, что функция $f(z)$, которая мероморфна в комплексной z-плоскости, исключая конечное число точек, и не является рациональной, может не принимать самое большее два значения вне этих точек. Показывается, что этот результат справедлив в дополнении к достаточно редкому (thin) бесконечному множеству точек с одной точкой сгущения.

5782. **О построении алгебраических функций с заданными полюсами по методу Кристоффеля. Липин Н. В.,** Сб. тр. общетехн. кафедр. Ленингр. технол. ин-т холодильн. пром-сти, 1956, 12, 3—14

Дается простое решение задачи, впервые поставленной и решенной Вейерштрассом, о построении для заданной римановой поверхности положительного рода самой общей рациональной функции, имеющей в заданных точках поверхности полюса первого порядка, и об определении числа произвольных постоянных, которые входят в эту функцию. С. А. Гельфер

5783. **О подобластях, ограниченных линиями уровня функции Грина. Акадза** (On the subregions bounded by the level curves of the Green's function. Akaza Toru), Sci. Rep. Kanazawa Univ., 1955, 3, № 1, 1-3 (англ.)

Ищется связь между так называемым T-свойством области R (РЖМат, 1959, 2558) и фуксовой группой Γ_0, получающейся при конформном отображении R на круг $|x| < 1$. Функции $T(w)$ предполагаются однозначными аналитическими и однолистными в R, причем $T(0) = 0$, $|T'(0)| \leqslant 1$.

Если $x(w)$ — функция, отображающая универсальную поверхность наложения R^∞ области R, то $f(x) = x(T(w(x)))$ есть аналитическая в единичном круге функция, обладающая свойством T. Пусть G — группа всех взаимно однозначных преобразований $T(w)$ области R на себя, получаемых с помощью отображений с указанным свойством. Пусть Γ—группа линейных преобразований $L_\mu S_\nu$ единичного круга на себя, где S_ν пробегает Γ_0, соответствующих элементам G. Тогда имеет место теорема 1: Группа G в области R изоморфна фактор-группе Γ/Γ_0, представляющей собой эллиптическую циклическую группу.

Доказывается в известном смысле обратная теорема. Г. П. Боев

5784. Несколько замечаний о теореме Абеля. Липин Н. В., Сб. тр. общетехн. кафедр. Ленингр. технол. ин-т холодильн. пром-сти, 1956, **12**, 15—22

Дается доказательство теоремы Абеля из теории алгебраических функций, содержащее простое определение алгебраическо-логарифмической функции, замыкающей сумму интегралов. С. А. Гельфер

5785. Теория абелевых интегралов. Кусуноки, Сугаку, 1955, **7**, № 1, 32—45 (японск.)

5786. Аналитическое вложение аналитических многообразий и связанные с этим вопросы. Морри (The analytic embedding of analytic manifolds, and related topics. Morrey C. B., Jr), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 99 (англ.)

Доказывается, что любое абстрактное компактное действительное аналитическое многообразие M_0 размерности n может быть аналитически вложено в евклидово пространство размерности $2n+1$. Доказательство основывается на вложении M_0 в некоторые „цилиндрические" комплексно-аналитические расширения M_R с границей, конструировании определенных „приближенно аналитических" функций на M_R и результатах, относящихся к некоторым проблемам „δ-неймановских" граничных значений в теории комплексного потенциала на M_R. Последние результаты распространяются на произвольные комплексно-аналитические многообразия, имеющие „комплексно-выпуклую" границу.

5787. Неограниченные области Гартогса. Эгесой (Die unbeschrankten Hartogsschen Körper. Egesoy E. Comm. Fac. Sci. Univ. Ankara, 1954, **A6**, 17—31) (нем.; рез. турецк.)

Автор доказывает несколько результатов об аналитических отображениях неограниченных областей Гартогса ($w \in G$, $|z| < \mathrm{Re}(w)$) в пространстве двух комплексных переменных. Некоторые из результатов автора подобны результатам, полученным Бенке и Пешлем (Behnke H., Peschl E., Math. Ann., 1936, **112**, 433—468, 1937, **114**, 69—73) для неограниченных областей Рейнгардта и круговых областей. Среди результатов автора имеется следующий (теорема 2): Если неограниченная область Гартогса H есть область регулярности, то существует по крайней мере одна аналитическая плоскость $w = c$, которая лежит целиком в H (исключая, возможно, бесконечно удаленную точку плоскости). Автор получает также следующий результат (теорема 9): Пусть H является областью Гартогса, в которой существует по крайней мере две регулярных ограниченных функции, функциональный детерминант которых не равен тождественно нулю. Если H отображается взаимно однозначно и аналитическим образом на себя посредством преобразований

$$w' = f(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w) z^n; \quad z' = g(w, z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(w) z^n$$

и если $f_0(w) = aw +$ члены высших степеней, $g_0(w) = 0$, $g_1(w) = bw +$ члены высших степеней с $ab \neq 0$, то $f(w, z) \equiv f_1(w)$ и $g(w, z) \equiv g_1(w) z$. W. T. Martin

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 7, 688.

5788. Сингулярные модулярные функции. Пятецкий-Шапиро (Singular modular functions. Pyatecki-Šapiro I. I.), Amer. Math. Soc. Translat., 1958, **10**, 13—58 (англ.)

См. РЖМат, 1958, 8764.

5789. О линейном операторе и базисе в пространстве аналитических функций нескольких комплексных переменных. Еремин С. А., Тр. Куйбышевск. инж.-строит. ин-та, 1958, вып. 5, 275—278

Рассматривается пространство E_R всех аналитических функций двух комплексных переменных в бицилиндре $|w| < R$, $|z| < R$. Распространяя некоторые результаты А. И. Маркушевича для пространства E_R аналитических функций одной переменной, автор дает одно необходимое и одно достаточное условие для того, чтобы базис $\{f_{mn}(w, z)\}$ в E_R представлялся в виде

$$f_{mn}(w, z) = K(w^m z^n),$$

где K — линейный оператор, взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображающий E_R на себя. Имеются опечатки. К. М. Фишман

5790. О теореме Ландау. Каидзука (Note on Landau's tseorem. Kaizuka Tetsu), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1956, **A5**, 25 Nov., 280—282 (англ.)

Теорема Ландау распространяется на случай многих комплексных переменных при тех же условиях, что и в случае одного комплексного переменного. В работе имеются опечатки. А. В. Лебедев

5791. Обобщенные ряды Дирихле, как функции двух переменных. Мод (HyperDirichlet series as functions of 2 variables. Maude R.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 59 (англ.)

В ряде Дирихле $\Sigma p_n e^{-\lambda_n s}$ p_n являются постоянными. В обобщенных рядах Дирихле $p_n(s)$ — полиномы степени n по s. Изучаются эти ряды и в особенности множества s, в которых они сходятся. Рассматривая ряды, в которых p_n — полиномы по другому комплексному переменному t и используя методы, развитые в теории функций 2 комплексных переменных, получаем для плоскости $t = s$ сведения о поведении обобщенных рядов Дирихле и о множествах, на которых они сходятся.

5792. Один результат о выпуклых поверхностях уровня гармонических функций трех переменных. Гейбриэл (A result concerning convex level surfaces of 3-dimensional harmonic functions. Gabriel R. M.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 286—294 (англ.)

Автор усиливает доказанную им ранее (РЖМат, 1956, 7280) теорему, утверждающую выпуклость поверхностей уровня $g(x, y, z) = k$, где g—функция Грина выпуклой трехмерной области. А именно доказывается, что для конечной выпуклой области упомянутые поверхности строго выпуклы в том смысле, что в любой точке поверхности ее нормальные кривизны положительны. Н. С. Ландкоф

5793. Некоторые результаты относительно поверхностей уровня функции Грина для трехмерных выпуклых областей (1). Гейбриэл (Further results concerning the level surfaces of the Green's function for a 3-dimensional convex domain (I). Gabriel R. M.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 295—302 (англ.)

Если D—выпуклая плоская область, содержащая точку $z=0$, то некоторые известные теоремы искажения могут быть сформулированы в терминах функции Гри-

на $g(z) = -\ln r + O(r)$, $|z| = r$, области D следующим образом: 1) $e^{-g}(1+e^{-g})^{-1} \leqslant r \leqslant e^{-g}(1-e^{-g})^{-1}$; 2) $e^{g}(1-e^{-g})^{2} \leqslant |\operatorname{grad} g| \leqslant e^{g}(1+e^{-g})^{2}$; 3) если $C_1(g)$—линия уровня функции Грина, то для ее длины l имеем неравенство $l\{C_1(g)\} \leqslant 2\pi e^{-g}(1-e^{-2g})^{-1}$; 4) если $C_2(g)$—дуга ортогональной траектории линий уровня от полюса до линии уровня, отвечающей значению g, то $l\{C_2(g)\} \leqslant \pi e^{-g}(1-e^{-2g})^{-1}$.

Автор обобщает эти результаты на пространственный случай: Если D—выпуклая область пространства, содержащая точку (0, 0, 0), и функция Грина имеет вид $g = \frac{1}{r} - 1 + O(r)$ (к этой нормировке всегда можно прийти, делая преобразование подобия), то 1) $\frac{1}{2}(g + \sqrt{g^2+g}) \leqslant \frac{1}{r} \leqslant 2+g$; 2) $\frac{1}{2} g(g+\sqrt{g^2+g}) \leqslant |\operatorname{grad} g| \leqslant 2(2+g)^2$; 3) если $S(g)$—поверхность уровня, $A\{S(g)\}$—ее площадь, а $V\{S(g)\}$—объем области, ограниченной $S(g)$, то $A\{S(g)\} = O(g^{-1})$, $V\{S(g)\} = O(g^{-3/2})$; 4) если $\Gamma(g)$—дуга ортогональной траектории от полюса до поверхности $S(g)$, то $l\{S(g)\} = O(g^{-1/2})$. Оценки в 1), 2) точные. Доказательство основано на сравнении g с функцией Грина полупространства, ограниченного опорной для D плоскостью. Далее устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками поверхности S_0, ограничивающей D, и ортогональными траекториями Γ. Если $P \to P_0$ по внутреннему пути, причем P_0—обыкновенная точка S_0, то $\operatorname{grad} g$ имеет предел, причем $\operatorname{grad} g / |\operatorname{grad} g| \to \bar{n}(P_0)$, где $\bar{n}(P_0)$—нормаль к S_0 в P_0.

Н. С. Ландкоф

5794. Некоторые результаты относительно поверхностей уровня функции Грина для трехмерных выпуклых областей (II). Гейбриэл (Further results concerning the level surfaces of the green's function for a 3-dimensional convex domain (II). Gabriel R. M.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 3, 303—306 (англ.)

Из результатов предыдущей работы автора (реф. 5792) вытекает, что если D—выпуклая область, g—ее функция Грина, то в D—0

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{vmatrix} > 0.$$

Далее доказываются две теоремы: 1) Если $S(k)$ —поверхность $g = k$, а $\Sigma(k)$ — поверхность в пространстве (X, Y, Z), определяемая уравнениями $X = g_x(x,y,z)$, $Y = g_y(x,y,z)$, $Z = g_z(x,y,z)$ при условии, что (x,y,z) на $S(k)$, то $\Sigma(k)$ звездна относительно начала, и при $k_1 < k_2$ $\Sigma(k_1)$ лежит строго внутри $\Sigma(k_2)$. 2) Если при фиксированном $\alpha > 0$ $d(k)$ обозначает кратчайшее расстояние между $S(k)$ и $S(k+\alpha)$, то $d(k)$ есть строго убывающая функция от k.

Н. С. Ландкоф

5795. О представлении гомотопических классов регулярными функциями. Хейлбронн (On the representation of homotopic classes by regular functions. Heilbronn H.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 3, 181—184, XIV (англ.; рез. русск.)

Пусть A—открытое множество комплексной плоскости. Доказывается, что всякая непрерывная на A комплекснозначная функция $f(z)$, принимающая только конечные значения и не обращающаяся нигде в нуль, гомотопна функции $F(z)$, регулярной на множестве A. Выясняются необходимые и достаточные условия, которые надо наложить на открытые множества A и B комплексной плоскости для того, чтобы всякая непрерывная функция, отображающая A в B была бы гомотопна мероморфной на A функции.

Л. Д. Кудрявцев

5796. Теория комплексных функций в «сверхтеле» n-мерных гиперкомплексных чисел. II. Теория трояко-периодических функций. Такасу (A complex function theory on a «supra-corpus» of n-dimensional hypercomplex numbers. II. A theory of triply periodic functions. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1954, **2**, № 1, 1—68 (англ.)

В этой статье автор переходит от общего случая, рассмотренного в ч. I (РЖМат, 1955, 5761), к случаю $n=3$.

В § 1 дается определение и приводятся простейшие свойства периодических функций $f(\zeta)$, где ζ—трехкомпонентное гиперкомплексное число.

§ 2. Двоякопериодические и трояко-периодические функции. Обе теории развертываются параллельно. Приводится теорема об эквивалентных системах периодов. Доказывается теорема 9. Если ω_1, ω_2 (соответственно $\omega_1, \omega_2, \omega_3$)—фундаментальная система периодов однозначной периодической функции $f(\zeta)$, отличной от константы, то ω_i/ω_j не может быть действительным числом.

Теорема 10. Если однозначная и отличная от нуля функция $f(\zeta)$ имеет периоды $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ (соответственно $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$), то эти периоды связаны линейным однородным соотношением с целыми коэффициентами.

§ 3. Тернарные двоякопериодические эллиптические функции и тернарные трояко-периодические эллиптические функции.

Периоды обозначаются через $2\omega_2$, $2\omega_3$ (соответственно $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_4$). Теоремы 1 и 2 — о сохранении периодичности для производной, суммы, разности, произведения и частного функций.

Теорема 3. Целая двояко-(трояко-) периодическая аналитическая функция может быть только константой.

Далее следуют теоремы о сумме вычетов в параллелограмме (параллелепипеде) и о разности числа нулей и числа полюсов. Показывается (теорема 7), что если две двояко-(трояко-) периодических функции связаны алгебраически, то их периоды связаны линейно однородно с целыми коэффициентами.

§ 4. Аналогия вейерштрассовой теории эллиптических функций. Отправным пунктом служит функция

$$f(\zeta) = \sum \frac{1}{(\zeta-\omega)^k}, \text{ где } \omega = 2m\omega_1 + 2n\omega_3 \text{ (и соответственно } 2m\omega_1 + 2n\omega_2 + 2b\omega_4),$$

рассматриваемая в замкнутой области B на плоскости $(0, 2\omega_1, 2\omega_3)$, или соответственно в пространстве ζ, не заключающей точек параллелограммной (параллелепипедальной) решетки. Доказывается, что ряд сходится равномерно в случае $k = 3$ (и, соответственно, 4). Для этой функции $2\omega_i$ служат периодами. Далее строится

$$\int^{\zeta} \left[f(\xi) - \frac{1}{\zeta^3} \right] d\xi = -\frac{1}{2} \sum{}' \left\{ \frac{1}{(\zeta-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2} \right\}$$

и соответственно $-\frac{1}{3}\sum{}'\left\{\frac{1}{(\zeta-\omega)^3} + \frac{1}{\omega^3}\right\}$ и рассматриваются функции

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2} + \sum{}' \left\{ \frac{1}{(\zeta-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right\} \quad \text{и}$$

$$\frac{1}{\zeta^3} + \sum{}' \left\{ \frac{1}{(\zeta-\omega)^3} + \frac{1}{\omega^3} \right\}.$$

Первая из них—функция четная, вторая—нечетная, причем $\varphi(\zeta + 2\omega_1) = \varphi(\zeta)$, $\varphi(\zeta + 2\omega_3) = \varphi(\zeta)$ и соответственно

$\varphi(\zeta+2\omega_i)=\varphi(\zeta)+2\varphi(\omega_i)$, $i=1,2,3,4$, т. е. $\varphi(\zeta)$—двоякопериодическая функция 2-го порядка (и соответственно троякопсевдопериодическая 3-го порядка).

Вводится двоякопериодическая функция

$$\mathfrak{p}(u/\omega_1,\omega_3)=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left\{\frac{1}{(u-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right\}=\varphi(u)$$

и соответственно троякопсевдопериодическая функция

$$\mathfrak{z}(u)=\frac{1}{u^2}+\sum{}'\left\{\frac{1}{(u-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}+\frac{u}{\omega^3}\right\}=\frac{1}{u^2}-2\int_0^u\left\{\varphi(u)-\frac{1}{u^3}\right\}du.$$

В окрестности начала та и другая функция: $=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\ldots$, где $g_2=60\sum{}'\frac{1}{\omega^4}$, $g_3=140\sum{}'\frac{1}{\omega^6}$. Отсюда находятся дифференциальные уравнения, подчиняющие эти функции:

$$\mathfrak{p}'^2(u)=4[\mathfrak{p}(u)-e_1][\mathfrak{p}(u)-e_2][\mathfrak{p}(u)-e_3],\ \mathfrak{p}'^2=4\mathfrak{p}^2-g_2\mathfrak{p}-g_3,$$

$$\{[\mathfrak{z}'(u)-2\varphi\omega_1)][\mathfrak{z}'(u)-2\varphi(\omega_2)][\mathfrak{z}'(u)-2\varphi(\omega_3)][\mathfrak{z}'(u)-2\varphi(\omega_4)]\}^{2/3}=4[\mathfrak{z}(u)-\bar{e}_1]\ldots[\mathfrak{z}(u)-\bar{e}_4],$$

где $e_\alpha=\mathfrak{p}(\omega_\alpha)$, $\alpha=1,2,3$; $\bar{e}_\alpha=\mathfrak{z}(\omega_\alpha)$, $\alpha=1,2,3,4$.

В теореме 12 приводится для $\mathfrak{z}(u)$ еще уравнение $\mathfrak{z}'^2(u)=4\mathfrak{z}^4(u)\ (1+u^3+\ldots)-g_2A\mathfrak{z}(u)-g_3B$, где A и B явно выражаются через $\varphi(\omega_\alpha)$.

Приводится разложение $\mathfrak{p}(u)-\frac{1}{u^2}$ в ряд Тейлора до члена u^{10}. В теоремах 9—10 приведены разложения в ряд функции

$$\mathfrak{P}(u)/\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_4)=\sum\frac{1}{(u-\omega)^4}$$

и ее производной. В § 10 вводятся функции $\zeta(u)/\omega_1,\omega_2)$ и $\zeta(u/\omega_1,\omega_2,\omega_4)$, имеющие формально одно и то же выражение $\frac{1}{u}+\sum{}'\left\{\frac{1}{u-\omega}+\frac{1}{\omega}+\frac{u}{\omega^2}\right\}$. Оказывается, что $\mathfrak{p}(u)=-\zeta'(u/\omega_1,\omega_3)$, $\mathfrak{z}(u)=-\zeta'(u/\omega_1,\omega_2,\omega_4)$. В § 11 вводится $\sigma(u)=\Pi'\left(1-\frac{u}{\omega}\right)e^{\frac{u}{\omega}+\frac{u^2}{2\omega^2}}$; $\zeta(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$;

$$\sigma(u+2\omega_\alpha)=-e^{2\zeta(\omega_\alpha)(u+\omega_\alpha)}\quad(\alpha=1,2,3)$$

и соответственно

$$\sigma(u)+2\omega_\alpha)=-e^{2\zeta(\omega_\alpha)\ (u+\omega_\alpha)-\frac{2}{3}\varphi(\omega_\alpha)(u+\omega_\alpha)^2}\ (\alpha=1,2,3,4).$$

§ 5. Выражение двояко- и троякопериодических эллиптических функций через соответствующие функции. Выводятся формулы:

$$\mathfrak{p}(u)-\mathfrak{p}(\alpha)=\frac{\sigma(\alpha+u)\,\sigma(\alpha-u)}{\sigma^2(\alpha)\sigma^2(u)},$$

$$\mathfrak{P}(u)-\mathfrak{P}(\alpha)=-\frac{\sigma(\alpha-u)\,\sigma(\alpha+u)\,\sigma(i\alpha-u)\,\sigma(i\alpha+u)}{\sigma^4(\alpha)\,\sigma^4(u)},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{p}(u)-e_1}=\frac{\mathfrak{p}(u-\omega_1)-e_1}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)},\quad\frac{1}{\mathfrak{P}(u)-E_1}=\frac{1}{E_2-E_1}+4!\,\frac{\mathfrak{P}(u-\omega_1)-\mathfrak{P}(\omega_1+\omega_2)}{\mathfrak{P}^{IV}(\omega_2)},$$

и строится теория σ_α-функций.

Г. П. Боев

5797. Критерий однолистности преобразования в пространстве R^n. Островский (Un critère d'univalence des transformations dans un R^n. Ostrowski Alexandre), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 2, 172—175 (франц.)

Известному условию существования однозначного обращения на интервале (a,b) функции $y=f(x)$ придается следующая форма: если существует такое $x_0\in(a,b)$, что для всех $x\in(a,b)$ выполняется условие $\left|\frac{f'(x)}{f'(x_0)}-1\right|<1$, то $y=f(x)$ допускает однозначное обращение. Это условие распространяется на случай непрерывно дифференцируемого отображения выпуклой области в пространстве R^n и получается достаточное условие однолистности такого отображения.

Приводимые автором применения этого условия к конформным отображениям не новы и, в частности, рассматривались референтом (РЖМат, 1957, 6989).

А. В. Лебедев

5798. О приближенном построении некоторых квазиконформных отображений. Вертгейм Б. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 2, 203—206

Рассмотрена задача о построении квазиконформного отображения единичного круга на область G, содержащую нулевую точку и ограниченную кривой Γ с уравнением $F(u,w)=0$, с помощью функции $w=u+iv$, где u и v удовлетворяют линейной эллиптической системе дифференциальных уравнений

$$au_x+bu_y=v_y,\quad -bu_x+au_y=-v_x$$

при условиях нормировки $w(0)=0$; $w(t_1)=w_1=u_1+iv_1$, где $w_1\in\Gamma$, $|t_1|=1$ $(F(u_1,v_1)=0)$. Требуется чтобы функции $F(u,v)$, $a(x,y)$, $b(x,y)$ были дважды непрерывно дифференцируемы и вторые частные производные от функции $F(u,v)$ удовлетворяли условию Липшица, а также чтобы функция $a(x,y)$ была положительна.

Задача о квазиконформном отображении сводится к определению функций $u(t)$ и $v(t)$ из системы нелинейных функциональных уравнений. Для решения полученной системы применен модифицированный метод Ньютона, развитый Л. В. Канторовичем, а также результаты исследований И. Н. Векуа, касающиеся системы уравнений Карлемана.

Формулируются условия, при которых последовательные приближения, полученные модифицированным процессом Ньютона, сходятся к решению системы в пространстве H_μ (непрерывных в смысле Гёльдера функций с обычной нормировкой).

А. В. Батырев

5799. Об искажении расстояний при однолистных отображениях замкнутых областей. Суворов Г. Д., Матем. сб., 1958, **45**, № 2, 159—180

Дается уточнение и подробное изложение результатов автора, опубликованных им ранее без доказательства (РЖМат, 1957, 3944, 4766). Эти результаты касаются вопроса искажения расстояний (рассматриваемых в некоторых сферических метриках) при топологических достаточно гладких отображениях плоских односвязных областей. Библ. 13 назв.

Л. Д. Кудрявцев

5800. О некоторых проблемах квазиконформных отображений. Лаврентьев (On some problems of quasi-conformal mapping. Lavrentieff M. A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 56 (англ.)

Рассматриваются гомеоморфные отображения, соответствующие системам уравнений эллиптического типа. Для таких отображений получены аналоги теоремам Линделёфа и Монтеля. Найдены достаточные условия экстремума для класса функционалов. Полученный вариационный принцип применяется для изучения двух граничных проблем.

5801. **Связь между локальной коммутативностью и регулярностью функций Уайтмана. Дайсон** (Connection between local commutativity and regularity of Wightman functions. Dyson Freeman J.), Phys. Rev., 1958, **110**, № 2, 579—581 (англ.)

Из свойства слабой локальной коммутативности операторов поля (РЖФиз, 1958, 9930)

$$W(\eta) \equiv \langle \psi_0(y_0)\psi_1(y_0-\eta)\rangle = \langle \psi_1(y_0-\eta)\psi_0(y_0)\rangle_0 \equiv V(-\eta)$$

и из лоренц-инвариантности (с *TCP*-теоремой) вытекает совпадение функций Уайтмана W и V (РЖФиз, 1956, 30897) для действительных η. Отсюда, а также из свойств функций Уайтмана следует совпадение W и V и их аналитичность в некоторой комплексной окрестности точек η (этот факт доказывается не строго, однако имеется и строгое доказательство). Если не пользоваться *TCP*-инвариантностью, то W и V будут двумя ветвями аналитической функции, однозначной на двулистной римановой поверхности. Г. В. Рязанов

5802 К. **Упражнения по инженерной математике. В. IV. Теория функций комплексного переменного. Фазекаш** (Műszaki matematikai gyakorlatok. B. IV. Komplex függvénytan. Fazekas Ferenc. Budapest, Tankönyvkiadó, 1956, 376 l., ill., 36 Ft.) (венг.)

5803 К. **Об одной гипотезе Пойа. Тезисы кандидатской диссертации. Реньи** (Pólya György egy sejtéséről. Kand. értekezés Téz. Rényi Kató. Budapest, Akad. ny., 1957, 8 l.), Magyar nemzeti bibliogr., 1957, № 4-6, 60 (венг.)

См. также: 5822, 6031

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, И. Н. Векуа, А. Г. Свешников*

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5804. **Применение метода разделения на множители к дифференциальному уравнению пластинки. Ивинский** (Application of the method of separation into factors to the differential equation of a certain plate. Iwiński Tadeusz), Arch. mech. stosowanej, 1958, **10**, № 1, 35—56 (англ.; рез. русск., польск.)

Изучается вопрос о разложении на множители линейного дифференциального оператора. Название статьи связано с приложением метода к задаче о больших изгибах круглой пластины. Показано, что представление линейного дифференциального уравнения $(n+1)$-го порядка в виде

$$\left[\frac{d}{dx}+a(x)\right]\left[y^{(n)}+a_{n-1}(x)\,y^{n-1}+\ldots+a_1(x)\,y'+a_0(x)\,y\right]=\beta_n(x)$$

приводит к нелинейному относительно $a(x)$ дифференциальному уравнению порядка n, которое автор называет уравнением типа Риккати n-го порядка.

Доказывается такая теорема: Если коэффициенты линейного дифференциального уравнения на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ имеют непрерывные производные до n-го порядка, то существует линейное дифференциальное уравнение порядка n (неоднородное), которое эквивалентно данному уравнению порядка $(n+1)$. В случае постоянных коэффициентов очевидным образом получается алгебраическое (характеристическое) уравнение. Кроме этого случая, автор указывает еще два класса уравнений, когда разделение на сомножители может быть проведено элементарным путем. В частности, это относится к уравнению Эйлера. П. И. Кузнецов

5805. **Графическое решение дифференциального уравнения** $(D-\alpha)\,(D-\bar{\alpha})\,y=e^{ivx}$. **Моппперт** (Graphical discussion of the differential-equation $(D-\alpha)\,(D-\bar{\alpha})\,y=e^{ivx}$. Moppert K. T.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 341, 226 (англ.)

5806. **Приводите дифференциальные уравнения к стандартной форме. Болл, Джонсон** (Fit differential equation to standard form. Ball William E., Johnson R. Curtis), Chem. Engng, 1958, **65**, № 2, 135—139 (англ.)

5807. **Общее решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения. Ларссон** (General solutions of linear ordinary differential equations. Larsson R. D.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 7, 523—525 (англ.)

5808. **Частные решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Гримм** (Particular solutions of second order linear differential equations with constant coefficients. Grimm C. A.), Math. Mag., 1958, **32**, № 1, 25—30 (англ.)

5809. **Постоянные и периодические матрицы. Алмейда** (Konstante und periodische Matrizen. Almeida Costa A. Rev. Fac. Cienc., Univ. Lisboa, 1954, A 3, 61—74) (порт.)

5810. **Об одном обыкновенном дифференциальном уравнении четвертого порядка типа Лапласа. Кошляков Н. С., Максимова И. Г.**, Инж.-физ. ж., 1958, **1**, № 8, 73—83 (рез. англ.)

В интегральной форме строится общее решение дифференциального уравнения

$$xy''''' + 3y''' - y'' + y' - xy = 0.$$

Для полученных интегралов при больших значениях аргумента находятся асимптотические представления. При малых x применительно к заданным начальным условиям используются формулы механических квадратур. В связи с тем, что найденное решение имеет колебательный характер, указывается способ отыскания его корней. П. И. Кузнецов

5811. **Об одном обыкновенном дифференциальном уравнении третьего порядка типа Лапласа. Кошляков Н. С., Гусева Н. К.**, Инж.-физ. ж., 1958, **1**, № 5, 71—75

Строится в интегральной форме общее решение дифференциального уравнения

$$W''' - \frac{3\nu}{x}W'' + \frac{3\nu(\nu+1)+x^2}{x^2}W' - \frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)}{x^3}W = 0.$$

Предварительной заменой $W = x^{\nu}y$ это уравнение сводится к виду

$$xy''' + xy' + \nu y = 0,$$

после чего применяется общая теория интегрирования уравнения Лапласа. П. И. Кузнецов

5812. **К теории уравнения Риккати. Еругин Н. П.**, Инж.-физ. ж., 1958, **1**, № 4, 76—80

Дается способ построения общего решения уравнения Риккати

$$dy/dx = a(x)\,y^2 + b(x)\,y + c(x),$$

где $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — целые функции комплексного переменного x. Также дается способ построения функций $P(x)$ и $Q(x)$, через отношение которых выражается решение

$$y = P(x)/Q(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — целые функции. Для построения решения уравнения во всей области требуется лишь непрерывность $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$. Изучаются особые точки решения как функции начальных значений.

П. И. Кузнецов

5813. Применение теории непрерывных групп преобразований к исследованию решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Молчанов Н. Н., Докл. АН СССР, 1957, 112, № 6, 998—1001

Рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \qquad (1)$$

где $Y(x, y)$ и $X(x, y)$ — многочлены степени n; относительно этого уравнения делается ряд утверждений, а именно: в любой выпуклой плоской области D существует интегрирующий множитель уравнения (1) вида $M = e^{\frac{\Theta_1(x, y)}{\Theta_2(x, y)}}$, где $\Theta_1(x, y)$ и $\Theta_2(x, y)$ аналитичны в D. При этом функции Θ_1 и Θ_2 могут быть выбраны так, что интегрирующий множитель M окажется однозначной и аналитической функцией в $D - \sum P_k$, где P_k — особые точки уравнения (1). Если особые точки уравнения (1) были первой кратности, то функция M, кроме того, может быть выбрана непрерывной в D. Число предельных циклов уравнения (1) не превосходит некоторого числа, имеющего порядок n^2.

Примечание референта. Утверждения заметки либо приводятся без доказательства, либо опираются на утверждение, которые в свою очередь в заметке не доказываются. Полностью приведено доказательство леммы (3), по словам автора, важной для вопроса о числе предельных циклов. Это доказательство неверно.

С. А Гальперн

5814. Нахождение границы области асимптотической устойчивости для одной нелинейной системы дифференциальных уравнений. Соловьев А., Бюл. Студ. научн. о-ва. Ленингр. ун-т, 1958, вып. 1, 3—11

Рассматривается система

$$dx/dt = y - f(x),\ dy/dt = -g(x), \qquad (1)$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и $f(0)=g(0)=0$. Предполагается, что система (1) удовлетворяет условию единственности решения при любых начальных данных, и выполняются так называемые обобщенные условия Гурвица

$$x f(x) > 0,\ xg(x) > 0. \qquad (2)$$

Рассматривается случай, когда

$$\overline{\lim_{x \to +\infty}} \{f(x) + \int_0^x g(x)\,dx\} < +\infty. \qquad (3)$$

В этих предположениях доказывается, что область устойчивости нулевого решения системы (1) ограничена либо одной, либо двумя траекториями, уходящими в бесконечность как при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$. Дается прием, позволяющий различать эти две возможности для заданной системы вида (1). Указывается метод построения границы области устойчивости с произвольно высокой точностью. Кроме того, выясняется характер расположения траекторий системы (1) за пределами области устойчивости. В. А. Плисс

5815. Об одной задаче Сансоне, связанной с теорией синхротрона. Олех (Sur un problème de M. G. Sansone lié à la théorie du synchrotrone. Olech Izeslaw), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 44, 317—329 (франц.)

Рассматривается уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + x\varphi(x) = p(t),$$

обладающее следующими свойствами: 1) $\varphi(x)$ определена в области $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяет в ней условию Липшица; 2) $\varphi(x) > 0$ при $x > \alpha$, $\varphi(x) < 0$ при $x < \alpha$, где $\alpha < 0$; 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) \to -\infty$; 4) $x\varphi(x)$ монотонно возрастает при $x > b$ и монотонно убывает при $x < b$; 5) функция $p(t)$ определена, непрерывна и ограничена при $-\infty < t < +\infty$. Кроме того, предполагается, что $\alpha < b < 0$, $\min\limits_{-\infty < x < +\infty} x\varphi(x) = b\varphi(b) < 0$, $|p(t)| < p_0$, $p_0 < h = -b\varphi(b)$.

Решение уравнения будет называться решением типа (A), если оно строится следующим образом. Пусть точки t_i определены уравнением $t_i = t^* + i\tau$, где $i = 0, \pm 1, \pm 2\ldots$, а t^* и τ — заданные числа и пусть $x(t_0) = \xi$, $\dot{x}(t_0) = \eta$ ($t_0 < t_1$) — заданные начальные значения. Если функция $x(t)$ определена в области $[t_0, t_i]$, то решение в области $t > t_i$ строится по новым начальным условиям $x_i(t_i) = \xi_i$, $\dot{x}_i(t_i) = \eta_i$, где $\xi_i = \lim\limits_{t \to t_i - 0} x(t) + c \lim x(t)$, $\eta_i = \lim\limits_{t \to t_i - 0} \dot{x}(t)$ (c — заданное число).

Задача Сансоне (являющаяся обобщением задачи на определение области устойчивости по начальным условиям для частиц, ускоряемых в синхротроне) формулируется следующим образом: при заданных числах t^*, τ, c, определить область R изменения ξ, η, для которой решение типа (A) существует и ограничено на $[t_0, \infty)$.

При вышеуказанных допущениях доказаны следующие теоремы:

1. Существует функция $\eta = \eta(\xi)$, определенная, непрерывная и монотонно убывающая в области $a \leqslant \xi \leqslant b$ (где $a < \beta_1(p_0)$; $\beta_1(p_0)$ — меньший из двух корней уравнения $-u\varphi(u) + p_0 = 0$), причем множество точек $(\xi, \eta(\xi))$ принадлежит области R.

2. Для каждого решения $x(t)$ типа (A), удовлетворяющего начальным условиям $x(t^*) = \xi^*$, $\dot{x}(t^*) = \eta^* > \eta(\xi^*)$ существует такое $\bar{t} > t^*$, что $x(\bar{t}) \geqslant b$, $\dot{x}(\bar{t}) > 0$.

3. Пусть $x^1(t)$ и $x^2(t)$ — решения типа (A), удовлетворяющие начальным условиям $x^1(t^*) = \xi^1$, $\dot{x}^1(t^*) = \eta(\xi^1)$, $x^2(t^*) = \xi^2$, $\dot{x}^2(t^*) = \eta(\xi^1)$, где $\xi^1, \xi^2 \in [a, b]$. Тогда $\lim\limits_{t \to \infty} (x^1 - x^2) \to 0$, $\lim\limits_{t \to \infty} (\dot{x}^1 - \dot{x}^2) \to 0$. Ю. С. Саясов

5816. О колеблющихся решениях дифференциального уравнения $[fy'']'' + [gy']' + hy = 0$. Ильинская Г. В., Уч. зап. Коломенск. пед. ин-та, 1958, 2, 117—125

Самосопряженное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$[fy'']'' + [gy']' + hy = 0, \quad f(x) \neq 0, \qquad (1)$$

записывается в виде

$$\ddot{\eta}^{(IV)}(\xi) + \Phi(\xi)\eta(\xi) = 0. \qquad (2)$$

Здесь принято

$$y(x) = u(x)\eta(\xi),\ \xi = \int^x \frac{dx}{\sqrt[3]{fu^2}}.$$

Функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению, эквивалентному уравнению Риккати общего вида. Автор доказывает две теоремы, условия которых гарантируют, чтобы функция $u(x)$ не имела нулей (в противном случае указанное преобразование невозможно). Далее, используя результаты (Fate W. B., Trans. Amer. Math. Soc., 1918, 19, 344 — 350) относительно колеблющихся решений уравнения $y^n + g(x)y$, автор устанавливает следующий окончательный результат: Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют неравенству

$$\left[\frac{f'}{f}\right]' + \frac{1}{4}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{g}{f} \geqslant 0$$

и решения уравнения (2) являются колеблющимися, то решения уравнения (1) также колеблющиеся.

П. И. Кузнецов

5817. Особое периодическое решение видоизмененного уравнения Даффинга. Территин, Калмер (A peculiar periodic solution of a modified Duffing's equation. Turrittin H. L., Culmer W. J. A.), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 44, 23—33 (англ.)

Рассматривается видоизмененное уравнение Даффинга

$$\ddot{X} + h\dot{X} + X + X^3 = B\cos\omega t + \frac{A^3}{4}\cos 3\omega t, \qquad (1)$$

где h, B и A — вещественные постоянные, h мало и положительно и $B = A - A\omega^2 + \frac{3}{4}A^3$. Наряду с уравнением (1) рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + x + x^3 = B\cos\omega t + \frac{A^3}{4}\cos 3\omega t, \qquad (2)$$

имеющее периодическое решение $x = A\cos\omega t$. Относительно A и ω предполагается, что точка (A, ω) лежит в плоскости $A\,0\omega$ на правой границе второй зоны неустойчивости следующего уравнения Матье:

$$\ddot{y} + (1 + 3A^2\cos^2\omega t)y = 0. \qquad (3)$$

В этих предположениях методом малого параметра Пуанкаре строится периодическое решение уравнения (1), лежащее вблизи $x = A\cos\omega t$ при достаточно малых h. Показывается, что величины h, ω и A могут быть выбраны таким образом, что это периодическое решение в своем разложении в ряд Фурье будет содержать четные гармоники.

В. А. Плисс

5818. Изучение колебательных систем с помощью смещений на фазовой плоскости. Часть I. Двойной дельта-метод. Такэи (Consideration of vibrating systems by phase-plane displacements. Part I. Double delta method. Takei Kenzo), Sci. Repts Res. Insts Tohoku Univ. Ser. B. Electr. Commun., 1956, 8, № 1, 49—60 (англ.)

Дается метод графического построения решений дифференциальных уравнений второго порядка на фазовой плоскости. Предлагаемый метод обладает тем свойством, что центры аппроксимирующих окружностей лежат на оси скоростей.

В. А. Плисс

5819. Об одном упрощении полиномиального метода Зоммерфельда. Новак, Тиц (Über eine Vereinfachung der Sommerfeldschen Polynommethode. Nowak W., Tietz T.), Ann. Physik, 1958, 1, № 4-5, 296—298 (нем.)

Предлагается следующий метод определения собственных значений одномерного волнового уравнения Шредингера: заменить зависимую переменную y по соотношению $y = Fu$ так, чтобы известная функция F обеспечивала выполнение граничных условий для y, а новая неизвестная функция u удовлетворяла уравнению, для которого легко решалась соответствующая задача о собственных значениях. Приводимые в статье примеры (хорошо известные задачи квантовой механики—гармонический осциллятор, атом водорода, одномерное уравнение Шредингера с потенциалом Вигнера вида $Ae^{-x}/(1 - e^{-x})$) не дают возможности судить об области применимости этого метода, так как в этих примерах авторы фактически повторяют обычные рассуждения.

Л. А. Чудов

5820. О собственных значениях некоторых эрмитовых операторов. Уайдом (On the eigenvalues of certain Hermitian operators. Widom Harold), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 2, 491—522 (англ.)

Рассматривается интегральное уравнение

$$\int_{-A}^{A} \rho(x - y)\varphi(y)dy = \lambda\varphi(x), \qquad (1)$$

где $\rho(x)$ — четная функция. Исследуется асимптотика собственных значений уравнения (1) при $A \to \infty$. При некоторых ограничениях, налагаемых на преобразование Фурье $F(\xi)$ функции $\rho(x)$ получена следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_k(A) = M - \frac{\sigma^2\pi^2k^2}{8A^2}\left[1 + \frac{\alpha}{A}\right] + o(A^{-3}),$$

где

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\,dx, \quad \sigma^2 = -F''(0),$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi^2}\log\left[\frac{2}{\sigma^2}\,\frac{M - F(\xi)}{\xi^2}\right]d\xi.$$

Аналогичные результаты получены для конечномерного аналога уравнения (1) — системы алгебраических уравнений с конечной матрицей Тёплица.

Л. А. Чудов

5821. Сингулярные самосопряженные краевые задачи для дифференциального уравнения $Lx = \lambda Mx$. Брауэр (Singular self-adjoint boundary value problems for the differential equation $Lx = \lambda Mx$. Brauer Fred), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 2, 331—345 (англ.)

Работа состоит из двух частей. В первой части рассматривается общая самосопряженная краевая задача на конечном интервале для уравнения $Lx = \lambda Mx$, где L и M — линейные самосопряженные дифференциальные операторы, причем порядок M меньше порядка L;

L — полуограниченный оператор, M — положительно определенный. Строится и исследуется функция Грина, доказывается полнота системы собственных функций в общей области определения операторов L и M. Далее доказывается основная теорема о возможности почленного дифференцирования разложения по собственным функциям (см. ниже примечание референта). С помощью этой теоремы получается формула Парсеваля с нормой (Mf, f), затем строится спектральная матрица, связанная с нормальной фундаментальной системой решений, которая определяется начальными условиями в произвольной внутренней точке c интервала $[a, b]$, и получается связь спектральной матрицы с производными функции Грина в точке $t = \tau = c$. Как отмечает автор, результаты, содержащиеся в первой части работы, в основном были получены ранее Камке, однако они несколько дополнены и изложены таким образом, чтобы их можно было применить к случаю бесконечного интервала.

Во второй части работы с помощью предельного перехода от конечного интервала к бесконечному строится и исследуется функция Грина для сингулярного случая $(-\infty < t < +\infty)$, затем доказывается существование спектральной матрицы, выводится формула Парсеваля и доказывается теорема о разложении по собственным функциям. При этом автор использует метод, предложенный для оператора второго порядка Б. М. Левита-

ном и развитый для уравнения вида $Ly = \lambda y$ в известной книге Коддингтона и Левинсона.

Примечание референта. Доказательство теоремы о почленном дифференцировании разложения по собственным функциям существенно опирается на оценки для производных до порядка $n-1$, где n—порядок оператора, приведенные в лемме 2,7. Доказательство леммы содержит ошибку, связанную с неучетом разрывности высших смешанных производных функции Грина при совпадающих значениях аргументов. Более того, само утверждение леммы 2.7 также является неверным для производных, порядок которых не меньше половины порядка L. Это легко видеть на примере следующей краевой задачи:

$$x^{(IV)} = \lambda x''; \; x(0) = x''(0) = x(\pi) = x''(\pi);$$

здесь $\lambda_k = -k^2$, $x_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin kt}{k}$ (при этом $(Mx_i, x_k) = \delta_{ik}$). Л. А. Чудов

5822. **Аналитические свойства матрицы рассеяния.** **Редже** (Analytic properties of the scattering matrix. Regge T.), Nuovo cimento, 1958, 8, № 5, 671—679 (англ.; рез. итал.)

Изучается распределение нулей аналитической функции $f(k)$, связанной с функцией рассеяния для уравнения

$$\psi'' + [k^2 - V(x)]\,\psi = 0.$$

Функция $f(k)$ определяется следующим образом: $f(k) = f(k, 0)$, $f(k, x)$ есть решение уравнения (1), стремящееся при $x \to \infty$ к e^{-ikx}. Предполагается, что $V(x) \equiv 0$ при $x > a$ и, кроме того, $V(x)$ разлагается вблизи точки x в асимптотический ряд с главным членом вида $c(x-a)^{\lambda}$. Функция $f(k, x)$ находится методом последовательных приближений из интегрального уравнения типа Вольтерра. Отсюда легко установить, что $f(k)$ является целой функцией экспоненциального типа с показателем $2a$. Для исследования распределения нулей $f(k)$ используются классические соотношения между порядком роста целой функции и быстротой роста ее нулей, а также относящиеся к этим вопросам теоремы Иенсена и Карлемана. Как отмечает автор, его выводы не являются вполне строгими.

Приведем основные результаты статьи.

1) В верхней полуплоскости асимптотика $f(k)$ определяется первыми двумя членами ряда последовательных приближений (так называемое „борновское приближение"):

$$f_B(k) \sim \frac{C \exp[-2ika]\,\Gamma(\lambda+1)}{(2ik)^{\lambda+2}},$$

отсюда, в частности, следует, что на любом луче в верхней полуплоскости лежит не более конечного числа нулей.

2) Если через $n(t)$ обозначить число нулей, не превосходящих t по модулю, то

$$\int_0^h \frac{n(t)}{t}\,dt \sim \frac{2ah}{\pi} - \frac{\lambda+2}{2} \log h.$$

3) Если $\theta_n = \arg k_n$ и $\sin\theta_n > 0$, то

$$\sin\theta_n \sim (\lambda+2)\,\frac{\log n}{2n}.$$

4) Функция $f(k)$ разлагается в произведение Адамара по формуле

$$f(k) = e^{-iak} f(0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k}{k_n}\right).$$

Автор указывает, что приведенные результаты справедливы также в том случае, когда $V(x)$ не является финитной, но весьма быстро (экспоненциально) убывает при $x \to \infty$. Л. А. Чудов

5823. **Критические частоты квазиканонических систем.** **Якубович В. А.**, Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 13, 35—63 (рез. англ.)

Систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{1}$$

с матрицей коэффициентов $A(t)$ автор называет квазиканонической, если существует невырожденная билинейная форма $G(x, y) = (Gx, y)$ такая, что для любых двух решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (1)

$$G(x_1(t), x_2(t)) \equiv C. \tag{2}$$

Всякая квазиканоническая система может быть приведена к системе с матрицей коэффициентов $i\tilde{G}H(t)$, где $\tilde{G}$ и $H(t)$ эрмитовы. Как известно, в случае канонической гамильтоновой системы матрица $i\tilde{G}$ имеет специальный вид $i\tilde{G} = I = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix}$.

В работе изучаются некоторые свойства квазиканонических систем в связи с явлением параметрического резонанса.

Пусть $\mathfrak{M} = \{A(t)\}$ — некоторый класс матриц с общим периодом 2π: $A(t + 2\pi) = A(t)$. Частоту $\omega = \omega_0$ автор называет критической для системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = Cx \tag{3}$$

и данного класса $\mathfrak{M}$ ($C \in \mathfrak{M}$), если все решения системы (3) ограничены при $t \to \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется матрица $A(t) \in \mathfrak{M}$, уклоняющаяся от C по норме менее, чем на ε, и такая, что среди решений системы

$$\frac{dx}{dt} = A(\omega_0 \cdot t)x \tag{4}$$

уже имеются неограниченные.

Наряду с общими рассмотрениями, автор выделяет ряд классов квазиканонических систем, для которых отыскивает критические частоты. В частности, доказывается, что для класса систем второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)y = 0$$

($P(t)$ — вещественные симметрические матрицы второго порядка) критическими частотами являются все числа вида:

$$\omega = \frac{\omega_j + \omega_h}{m} \; (m = 1, 2, \ldots),$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k$ — собственные значения постоянной матрицы P_0 невозмущенной системы (все они по смыслу задачи положительны).

Кроме того, находятся критические частоты класса систем

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Q\frac{dy}{dt} + P(t)y = 0,$$

где Q — постоянная кососимметрическая матрица, а $P(t)$ — симметрическая матрица.

При доказательстве автор исследует структуру G-унитарных матриц, являющихся решениями квазиканонических систем. Новое доказательство в работе находит тот факт, что если у канонической гамильтоновой системы имеются равные мультипликаторы разного рода, то она не является сильно устойчивой. В. Б. Лидский

5824. Дифференциальные уравнения, включающие параметрическую функцию. Камерон (Differential equations involving a parametric function. Cameron R. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 834—840 (англ.)

Ставится вопрос о существовании непрерывных решений $z(t) \in C[0, 1]$ системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{dt} + f[t, y(t)+z(t)]=0; \\ &z(0)=0, \quad t \in I[0, 1], \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

при „почти любом" выборе функции $y(t) \in C[0,1]$, где $y(0)=0$. Термин „почти любой" обозначает множество непрерывных функций, за исключением, быть может, множества функций меры нуль в смысле Винера (Wiener N., Acta Math., 1930, 55, 117—258). Под непрерывным решением системы (1) понимается непрерывная функция $z(t)$ такая, что функция

$$x(t)=y(t)+z(t)$$

является непрерывным решением эквивалентного нелинейного интегрального уравнения

$$y(t)=x(t)+\int_0^t f[s, x(s)]\,ds, \quad t \in I, \qquad (2)$$

при „почти любом" выборе непрерывной функции $y(t)$. Теорема. Пусть функция $f(t, u)$ в полосе $R\{0 \leqslant t \leqslant 1, \ -\infty < u < +\infty\}$ имеет непрерывные частные производные $f_t(t, u)$ $f_u(t, u)$; и, сверх того, в R выполнены условия:

1) $f(t, u)\ \operatorname{sgn} u \geqslant -A_1 \exp(B u^2)$;

2) $f_u(t, u)+4 g_t(t, u) \leqslant 2\alpha^2 u^2+A_2$;

3) $g(1, u) \geqslant -\frac{\alpha}{2} u^2 \operatorname{ctg} \beta - A_3$,

где $g(t, u)=\int_0^u f(t, v)\,dv$, A_1, A_2, A_3, B, α, β— положительные постоянные, причем $\alpha < \beta < \pi$ и $B<1$. Тогда при почти каждом выборе функции $y \in C$ система (1) имеет единственное решение $z \in C$, определенное на отрезке $[0, 1]$.

На примере показывается, что при наличии условий 1), 2) и 3) нельзя гарантировать существование непрерывного решения системы (1) для всех непрерывных функций $y(t)$. Б. П. Демидович

5825. Об устойчивости неустановившихся движений одного класса авторегулируемых систем. Беделбаев А. К., Тр. Сектора матем. и механ. АН КазССР, 1958, 1, 151—159

Система непрямого регулирования

$$\dot{\eta}_s = \sum_{k=1}^{n} b_{sk}(t)\,\eta_k + n_s(t)\,\xi, \quad \dot{\xi}=f(\sigma),$$

$$\sigma = \sum_{s=1}^{n} j_s(t)\,\eta_s - \xi \quad (s=1, \ldots, n)$$

при обычных предположениях относительно коэффициентов и функции $f(\sigma)$) после исключения переменной ξ записывается в виде

$$\dot{\eta}_s = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}(t)\eta_k - n_s(t)\,\xi, \quad \dot{\sigma} = \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\,\eta_k - p(t)\sigma - f(\sigma).$$

С помощью построения функций Ляпунова устанавливаются достаточные условия асимптотической устойчивости „в большом" в следующих трех частных случаях:

1) $\lim\limits_{t \to \infty} p_{sk}(t)=c_{sk}$ $(s, k=1, \ldots, n)$;

2) $p_{sk}(t)=c_{sk}+\mu q_{sk}(t)$ $(s, k=1, \ldots, n)$;

3) для фундаментальной системы решений $\eta_{sk}(t, t_0)$ уравнений $\dot{\eta}_s = \sum_{k=1}^{n} p_{sk}(t)\,\eta_k$ при всех $t \in [t_0, \infty)$ выполняется неравенство $|\eta_{ks}(t, t_0)| < Be^{-\alpha(t-t_0)}$, где β и α—некоторые положительные постоянные, не зависящие от t_0. Существование функций Ляпунова, допускающих бесконечно малый высший предел, следует из выполнения известных условий теорем К. П. Персидского и И. Л. Массера.

Изучению исходной системы дифференциальных уравнений посвящена также работа А. М. Летова (РЖМат, 1956, 5853). Р. А. Спасский

5826. Некоторые критерии различения опасных и безопасных участков границы области устойчивости одного класса авторегулируемых систем. Беделбаев А. К., Тр. Сектора матем. и механ. АН КазССР, 1958, 1, 50—61

Изучается состояние регулируемой системы вблизи границы области устойчивости, канонические уравнения которой записываются в виде

$$x_s=\varepsilon_s x_s+\varphi(\sigma), \ \varphi(\sigma)=c_2\sigma^2+c_3\sigma^3,$$

$$\sigma = \sum_{s=1}^{n} \frac{M(\varepsilon_s)}{\Delta'(\varepsilon_s)} x_s \quad (s=1, \ldots, n),$$

с использованием методов И. Г. Малкина (Прикл. матем. и механ., 1951, 15, № 4, № 5). Рассматриваются такие случаи, когда характеристическое уравнение исходной неканонической системы имеет или две пары чисто мнимых корней, или пару чисто мнимых с одним нулевым корнем. При этом в случае одной пары чисто мнимых корней, а также в случае одного нулевого корня получаются результаты, совпадающие с критериями А. И. Лурье (Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1951). Р. А. Спасский

5827. О периодических решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Норкин С. Б., Матем. сб., 1958, 45, № 1, 71—104

Изучаются периодические решения уравнения

$$y''(x)+2\mu y'(x)+\nu y(x)+T(x)\,y(x-\Delta(x))=0, \qquad (A)$$

где $T(x)$ и $\Delta(x)$—непрерывные периодические функции периода π, μ и ν—действительные числа, $x-\Delta(x) \geqslant 0$. Указывается, что последнее условие характерно для процессов с последействием, начинающихся из положения равновесия.

Устанавливаются условия существования периодических решений уравнения (A), причем для периодических решений, определяемых начальными значениями $y(0)=0$, $y'(0)=1$, даны условия существования и устойчивости. Л. Э. Эльсгольц

5828. О почти периодических решениях неоднородных линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Шиманов С. Н., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 270—274

Доказывается существование и единственность почти периодического решения системы линейных неоднородных уравнений с запаздывающим аргументом с почти периодической неоднородностью:

$$\frac{dx(t+\tau)}{dt}=ax(t+\tau)+bx(t)+F(t), \qquad (1)$$

где x и F—векторы, a и b—постоянные (n, n)-матрицы, постоянная $\tau>0$. Теорема доказана в предположении, что все нули характеристического квазиполинома удовлетворяют условию $\operatorname{Re}\lambda_k < -\alpha < 0$, координаты $f_j(t)$ вектора F и их производные $f_j(t)$ — почти периодические функции.

Кроме того, доказано, что координаты $x_\sigma^*(t)$ почти периодического решения удовлетворяют неравенству $|x_\sigma^*(t)| < AM$, где M—верхний предел модулей функций $f_j(t)$ и $f'_j(t)$ на интервале $(-\infty,\infty)$, а постоянная A зависит лишь от a, b и τ и не зависит от выбора функций $f_j(t)$.

Указывается, что теорема справедлива и при нескольких постоянных запаздываниях. Л. Э. Эльсгольц

5829. **Качественные исследования в задаче трех тел. Мерман Г. А.**, Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1958, 6, № 10, 687—712 (рез. франц.)

В реферируемой работе исследуются качественным путем финальные движения в задаче трех тел в области отрицательных значений постоянной энергии. Даются условия, обеспечивающие разделение движения трех тел на два почти независимых движения, близкие к кеплеровым. Показывается, что минимальное расстояние удаленного тела существенно не меняется, так что дальнейшие тесные сближения этого тела с двумя другими, которые могли бы резко изменить всю картину движения, невозможны. Границы, в которых меняется скорость третьего тела, как по величине, так и по направлению также близки к кеплеровым эллиптическим значениям. Расстояние двух ближайших тел всегда остается ограниченным, так что имеется своего рода частичная устойчивость по Лагранжу.

В качестве примера применения критериев распада движения в задаче трех тел на два почти кеплеровских движения рассматривается задача о движении Солнца, Меркурия и Плутона (всеми остальными возмущениями от других планет автор здесь пренебрегает). Показывается, что Меркурий никогда не удалится от Солнца дальше, чем на 4 астр. ед., а Плутон никогда не приблизится к Солнцу ближе, чем на 11,2 астр. ед. Реферируемая работа представляет весьма существенное дополнение к классическим работам Шази по качественной теории задачи трех тел. Г. Н. Дубошин

5830 К. **Упражнения по инженерной математике. В. VII. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Байчаи** (Műszaki matematikai gyakorlatok. B. VII. Közönséges differenciálegyenletek. Bajcsay Pál. Budapest, Tankönyvkiadó, 1956, 289 l., ill., 27 Ft.) (венг.)

5831 К. **Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гуревич** (Lectures on ordinary differential equations. 2nd print. rev. Hurewicz Witold. Cambridge, Mass. Technol. Press; New York, John Wiley and Sons, Inc.; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, xvii, 122 pp., ill.) (англ.)

Небольшой учебник, в котором излагаются теоремы существования и единственности решений систем дифференциальных уравнений, теория систем линейных уравнений, некоторое внимание уделяется качественной теории систем двух уравнений. Книга снабжена вступительной статьей С. Лефшеца „В память Витольда Гуревича". В этой статье дан краткий обзор научной деятельности В. Гуревича и библиография его работ. В. В. Немыцкий

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

5832 К. **Дифференциальные уравнения. Ч. 2. Гронец** (Diferenciálne rovnice. 2. diel. Parciálne diferenciálne rovnice. Hronec Jur. Bratislava, SAV, 1958, 408 s., 37 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. České knihy, 1958, № 19, 433 (словацк.)

5833 К. **Начальная задача для дифференциальных уравнений в частных производных. Зауэр** (Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. 2 erw. Aufl. Sauer Robert. Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer, 1958, XV, 284 S., ill., 41.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 40, 2907 (нем.)

5834. **Асимптотические решения задач с осциллирующими начальными данными. Лакс** (Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems. Lax Peter D.), Duke Math. J., 1957, 24, № 4, 627—646 (англ.)

Основное содержание работы составляют следующие два вопроса: 1) о корректности постановки задачи Коши для общей линейной системы уравнений первого порядка с частными производными

$$Mu=0,\ u=u(x,t)=u(x_1,\ldots,x_m;t);\ u(x,0)=\varphi(x); \quad (1)$$

2) о зависимости решения $u(x,t)$ от начальных данных в случае, когда система $Mu=0$ является гиперболической.

Для исследования этих вопросов используется формальный ряд по обратным степеням большого параметра ξ, возникающий при рассмотрении задачи Коши с быстро осциллирующими начальными данными: $\varphi(x)=e^{i\xi l(x)}\psi(x)$. Если система $Mu=0$ является t-гиперболической, этот ряд оказывается асимптотическим. В случае, когда плоскость $t=0$ не является пространственно-подобной, для произвольной системы вида (1) с аналитическими коэффициентами строится пример, аналогичный известному примеру Адамара, и таким образом показывается, что задача Коши в этом случае не корректна. Попутно с помощью общих функционально-аналитических соображений устанавливается, что требования, входящие в классическое определение корректной постановки задачи Коши, не являются независимыми: если потребовать, чтобы система $Mu=f$; $u(x,0)=\varphi$ имела единственное в некоторой области решение из C^1 при любых f и φ, принадлежащих C^∞, то отсюда уже следует, что решение непрерывно зависит от φ и f в норме некоторого C^k. Для гиперболической системы с помощью асимптотического ряда и общего энергетического неравенства с нормами положительных и отрицательных порядков исследуется фундаментальное решение задачи Коши, которое строится с помощью разложения δ-функции в интеграл Фурье. Показывается, что гладкость решения вблизи некоторой точки P зависит от гладкости начальных данных только в окрестности пересечения гиперплоскости $t=0$ и характеристического коноида с вершиной в точке P. Это утверждение автор называет обобщенным принципом Гюйгенса. Л. А. Чудов

5835. **О задаче Коши для уравнений с частными производными с кратными характеристиками. Лакс** (On Cauchy's problem for partical differential equations with multiple characteristics. Lax Anneli), Communs. Pure and Appl. Math., 1956, 9, № 2, 135—169 (англ.)

В работе даны алгебраические критерии корректной разрешимости задачи Коши для линейного дифференциального уравнения порядка m с действительными коэффициентами и двумя независимыми переменными. Для уравнений с постоянными коэффициентами устанавливается необходимое и достаточное условие на коэффициенты уравнения для корректной разрешимости задачи Коши, для уравнений с переменными коэффициентами указано некоторое достаточное условие. Пусть $L(u)=0$ — уравнение порядка m для $u(t,x)$, пусть a_{ij} — коэффициент при $\partial^{i+j}u/\partial x^i\partial t^j$ в $L(u)$ и

$$p_k(z)\equiv a_{0k}z^k+a_{1k-1}z^{k-1}+\ldots a_{k0}-$$

полином, соответствующий однородному оператору порядка k, входящему в $L(u)$. Для уравнения $L(u)=0$ с постоянными коэффициентами задача Коши с данными на нехарактеристической кривой корректно разрешима в том и только в том случае, если а) корни $p_m(z)$ действительны; б) всякий корень λ полинома $p_m(z)$ кратности r является корнем полинома $p_{m-s}(z)$ по крайней мере кратности $r-s$ для $s=1,2,\ldots,r-1$ (критерий A). Для уравнений с переменными коэффициентами установлено

следующее. Пусть $\partial_i \equiv \partial/\partial t - \lambda_i(t, x)\partial/\partial x$. Задача Коши для уравнения $L(u)=0$ корректно разрешима, если $L(u)$ представим в виде (условие A'):

$$\tilde{L}(u) \equiv \partial_1^{\nu_1}\partial_2^{\nu_2}\ldots\partial_k^{\nu_k}[u] + \partial_1^{\nu_1+1}\partial_2^{\nu_2-1}\ldots\partial_k^{\nu_k-1}M_1(u) + \ldots + \partial_1^{\nu_1-l}\ldots\partial_k^{\nu_k-l}M_l[u],$$

где λ_i — некоторые действительные функции, ν_i — целые числа, $\sum_{i=1}^{k}\nu_i = m$, M_i — дифференциальные операторы такие, что i-е в L слагаемое в $L(u)$ имеет порядок $m-i+1$. Пусть $\Pi_m=\partial_1^{\nu_1}\partial_2^{\nu_2}\ldots\partial_k^{\nu_k}$, $\Pi_m^i=\Pi_m/\partial_i$, $\Pi_m^{ij}=\Pi_m/\partial_i\partial_j$ и т. д. Условие A' эквивалентно тому, что $L(u)$ можно представить в виде $L(u)\equiv\Pi_m(u)+N(u)$, (условие C), где $N(u)$ линейная комбинация операторов вида Π_m^{ij} с достаточно гладкими коэффициентами. Для уравнений такого вида задача Коши решается методом последовательных приближений. Для уравнений с постоянными коэффициентами условия A' и A эквивалентны. О. А. Олейник

5836. **Задача Коши и вырожденная задача Коши для систем линейных уравнений с частными производными. Ван Гуан-инь** (Cauchy problem and singular Cauchy problem for systems of linear partial differential equations. Wang Guang-ying), Sci. Rec., 1957, 1, № 5, 323—328 (англ.)

В пространстве $t_0x_1,\ldots,x_n$ рассматривается система с переменными достаточно гладкими коэффициентами в векторной записи $Ku_t \doteq \sum_\alpha A^{(\alpha)}u_{x_\alpha} + Bu + f$, где матрицы K, $A^{(1)},\ldots,A^{(n)}$ симметричны, причем матрица K положительно определена (отсюда, как известно, вытекает гиперболичность системы в некотором расширенном смысле). Наличие „энергетического" неравенства позволяет автору установить область зависимости при решении задачи Коши, когда начальные условия задаются при $t=0$. Существование решения можно получить по методу Шаудера после соответствующей оценки производных. Утверждения остаются в силе, если коэффициенты имеют сингулярность при $t\to+0$, однако соответствующая квадратичная форма удовлетворяет неравенству

$$\left((K_t - \sum A_x^{(\alpha)} + 2B)\xi, \xi\right) \leqslant M\|\xi\|^2\gamma(t), \quad \text{где } \gamma(t)\geqslant 0, \quad \int_0^{t_0}\gamma(t)\,dt < M,$$

существенность которого показывается. Это же справедливо в некоторых случаях вырождения матрицы K, например, если ее наименьший характеристический корень удовлетворяет неравенству $\rho_1(t, x)\leqslant Mt^\alpha$ $(\alpha<1)$. Автор не упоминает, что подобные симметрические гиперболические системы рассматривали Фридрихс (РЖМат, 1956, 2217) и А. А. Дезин (РЖМат, 1957, 1451).

А. Д. Мышкис

5837. **О задаче Коши для одного уравнения в частных производных. Бриш Н. И.** Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 9, 3—33

Находится в явном виде решение задачи Коши для дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + (-1)^m\Delta^m u = f(t, x_1,\ldots,x_n)$, где Δ — оператор Лапласа. При решении используются обобщенные функции, в частности дельта-функция.

Примечание референта. Полученное решение тривиально находится обычным методом Фурье и применением известной формулы для преобразования n-кратного интеграла к однократному, доказанной Бохнером (Bochner S., Vorlesungen über Fouriersche Integrale, 1932, 182).

Ю. В. Сидоров

5838. **Об одном принципе двойственности для некоторых оценок, относящихся к дифференциальным уравнениям. Фикера** (Su un principio di dualità per talune formole di maggiorazione relative alle equazioni differenziali. Fichera Gaetano), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955 (1956), 19, № 6, 411—418 (итал.)

Пусть E_k $(k=1,\ldots,n)$ — множества, на которых заданы меры μ_k. $L^{(p_k)}(E_k)$ — банахово пространство действительных функций с p-й степенью, суммируемой в E_k по мере μ_k. V — линейное пространство, а $M_k(v)$, $L_k(v)$ — линейные операторы, определенные на V, области значений которых лежат соответственно в $L^{(q_k)}(E_k)$ и $L^{(p_k)}(E_k)$. Пусть U — другое линейное пространство. Линейные операторы $M_k^*(u)$ и $L_k^*(u)$ определены на этом пространстве и имеют области значений в $L^{(p_k)}(E_k)$ и $L^{(q^*_k)}(E_k)$ соответственно, где $\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k^*}=1$, $\frac{1}{q_k}+\frac{1}{q_k^*}=1$. Пусть для всех $v\in V$, $u\in U$

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{E_k}\left[M_k(u)L_k^*(v) - M_k^*(u)L_k(v)\right]d\mu_k = 0;$$

B — банахово пространство векторов $w=(w_1,\ldots,w_n)$, $w_k\in L^{(p_k)}(E_k)$ с нормой $\|w\| = \left(\sum_{k=1}^{n}\|w_k\|^2\right)^{1/2}$; через $L(v)$ обозначается линейный оператор, переводящий V в B, с компонентами $L_k(v)$.

Справедлива следующая теорема: Если область значений $L(V)$ полна в B и выполняется оценка

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|M_k(v)\|^2\right)^{1/2} \leqslant K\left(\sum_{k=1}^{n}\|L_k(v)\|^2\right)^{1/2},$$

для всех $v\in V$, то для всех $u\in U$ справедлива оценка

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\|M_k^*(u)\|^2\right)^{1/2} \leqslant K\left(\sum_{k=1}^{n}\|L_k^*(u)\|^2\right)^{1/2}.$$

Приводятся примеры применения сформулированного принципа к получению оценок для решений дифференциальных уравнений.

Т. Д. Вентцель

5839. **Интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом Драша. Хейльбронн** (Intégration des équations aux dérivees partielles du second ordre par la méthode de Drach. Heilbronn Georges. Mém. Sci. math., 1955, 129, 100 p.) (франц.)

Автор задался целью изложить в доступной широкому кругу читателей форме метод интегрирования уравнения

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad (1)$$

предложенный Драшом (J. Drach) в своей диссертации (Ann. scient. Ecol. norm. super., 1898, 15, 243 — 384) и развитого им в последующих работах (1924 — 1939 гг.). По мнению автора, метод Драша (который является естественным продолжением метода Ампера и который, как и метод Ампера, заключается в сведении уравнения (1) к системе уравнений первого порядка) не получил такого распространения, которое он заслуживает, по той причине, что указанные работы трудны для чтения. По мнению референта, другой причину надо считать то,

что за последнее время краевые задачи для дифференциальных уравнений привлекали к себе больше внимания, чем классические методы нахождения „общего интеграла". Данная книжка написана очень ясно, и автор ее достиг поставленной цели. В книге рассмотрены также уравнения
$s = F(x, y, z, p, q)$ и $S = F(x, y, z, p, q, r)$, которые являются частными случаями уравнения (1). R. Conti.
Перевод из Zbl. Math., 1956, **64**, №1—5, 92.

5840. **О сведении линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами к системе уравнений первого порядка. Михайлов В.,** Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 6, 157—160

Предлагается метод, которым можно сводить линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\left(\sum_{\rho=0}^{N}\sum_{(i_k)=\rho} a_{i_0,\ldots,i_n}\, p_0^{i_0},\ldots,p_n^{i_n}\right) u = 0$$

$$\left(a_{N,0,\ldots,0}=1,\ \frac{\partial}{\partial x_i}=p_i\right) \qquad (1)$$

к системе уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами так, что каждая компонента решения системы есть решение уравнения (1), и для любого решения (1) существуют еще несколько решений этого уравнения таких, что некоторый вектор, составленный из этих решений, является решением системы.

Ю. В. Сидоров

5841. **О некоторых эллиптических уравнениях четного порядка, содержащих малые параметры при старших производных и вырождающихся в уравнения первого (и вообще нечетного) порядка. Вишик М. И., Люстерник Л. А.,** Докл. АН СССР, 1957, **113**, № 5, 962—965

Для уравнений, указанных в названии работы, применяется та же методика, которая была предложена авторами ранее при изучении поведения при $\varepsilon \to 0$ решений эллиптических уравнений высших порядков, вырождающихся при $\varepsilon \to 0$ в эллиптические уравнения более низкого порядка (РЖМат, 1958, 1204). В частности, рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка вида

$$\varepsilon(au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}) + u_x - du = h \qquad (1)$$

$(d > c^2 > 0)$ в области Q с границей Γ, касающейся характеристик уравнения

$$u_x - du = h \qquad (2)$$

только в двух точках. При определенных предположениях гладкости коэффициентов (1) и границы области, решение u_ε задачи Дирихле для (1) с точностью до членов $O(\varepsilon^n)$ выражается через решение некоторой задачи Коши для уравнения (2), функций типа пограничного слоя и некоторых решений уравнения вида (2) при определенной правой части с коэффициентами ε^k $(0 < k < n)$. При построении этой асимптотической формулы для u_ε существенно используется, что при $\varepsilon \to 0$ u_ε стремятся к гладкому в Q решению уравнения (2). Отметим, что в самых общих предположениях эта задача была изучена ранее другим методом С. Л. Каменомостской. В работе устанавливаются также теоремы о слабой сходимости u_ε при $\varepsilon \to 0$ и указана слабая асимптотика. Авторы вводят новый класс уравнений нечетного порядка, названных ими однохарактеристическими. Эти уравнения определяются тем свойством, что в каждой точке их характеристический конус содержит только одну действительную плоскость. Изучен вопрос о поведении при $\varepsilon \to 0$ решений u_ε первой краевой задачи для эллиптических уравнений высшего порядка, вырождающихся при $\varepsilon \to 0$ в однохарактеристические уравнения. Указана асимптотическая формула для u_ε с точностью до $O(\varepsilon^n)$. Пределом для u_ε при $\varepsilon \to 0$ является решение однохарактеристического уравнения с граничными условиями, названными условиями первой краевой задачи для этого уравнения. О. А. Олейник

5842. **О теореме единственности для некоторых эллиптических уравнений второго и четвертого порядков. Педерсон** (On the unique continuation theorem for certain second and fourth order elliptic equations. Pederson R. N.), Communs Pure and Appl. Math., 1958, **11**, № 1, 67—80 (англ.)

Обозначим через m_k класс функций u, принадлежащих классу C^k в некоторой области, содержащей начало координат n-мерного евклидова пространства, и удовлетворяющих условию

$$\lim \exp\{\alpha r^{-m}\} D^i u = 0 \ (i = 1,2,\ldots,k-1),$$
$$\exp\{\alpha r^{-m}\} D^k u \in L_2(D),$$

для любого $\alpha > 0$. Рассматривается уравнение эллиптического типа

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} = f(x, u, u_{x_1},\ldots,u_{x_n}), \qquad (1)$$

причем: 1) $\| a^{ij} \|$ $(i, j = 1,\ldots,n)$ — положительно определенная матрица, элементы которой принадлежат классу C^2 в некоторой окрестности D; 2) функция $f(x, u, u_{x_1},\ldots,u_{x_n})$ определена в $D + E_{n+1}$ и удовлетворяет условию Липшица (с некоторым $m > 0$) вида:

$$|f(x, u, p_i) - f(x, v, q_i)| \leqslant$$
$$\leqslant M\left[\sum \frac{(p_i - q_i)^2}{r^{m+2}} + \frac{(u-v)^2}{r^{3m+4}}\right],\ M = \text{const},$$

а также уравнение четвертого порядка

$$\Delta^2 u = f_1(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_{x_i x_j x_k}), \qquad (2)$$

причем определенная в $D + E_{1+n+n^2+n^3}$ функция f_1 удовлетворяет условию вида

$$|f(x, u, p_i, p_{ij}, p_{ijk}) - f(x, v, q_i, q_{ij}, q_{ijk})| \leqslant$$
$$\leqslant M\left[\frac{\sum(p_{ijk} - q_{ijk})^2}{r^{2-\varepsilon}} + \frac{\sum(p_{ij} - q_{ij})^2}{r^{2m+4}} + \frac{\sum(p_i - q_i)^2}{r^{4m+6}} + \right.$$
$$\left. + \frac{(u-v)^2}{r^{6m+8}}\right]$$

при некоторых $m > 0$ и при $0 < \varepsilon \leqslant 2$. В статье доказаны следующие две основные теоремы: 1) Если u и v — два решения уравнения (1) такие, что $u - v \in m_2$, то $u \equiv v$ в некоторой окрестности начала координат, 2) Если u и v — два решения уравнения (2) такие, что $u - v \in m_4$, то $u \equiv v$ в некоторой окрестности начала координат. Отмечается, что тем же методом аналогичные теоремы могут быть доказаны и для уравнений вида

$$A^n u = f,\ A = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{a}\, a^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\right),\ a \cdot \det\| a^{ij} \| = 1,$$

если матрица $\| a^{ij} \|$ имеет диагональный вид и если f зависит только от x и от производных порядка $\leqslant \frac{6}{4}n$.

Библ. 13 назв. И. И. Данилюк

5843. **О решении третьей краевой задачи теории потенциала для внешности круга с помощью комплексного дифференциального уравнения. Шинке** (Über Lösungen des dritten Randwertproblems der Potentialtheorie für das Außengebiet des Kreises mittels einer komplexen Differentialgleichung. Schincke E.)

Z. angew. Math. und Mech., 1957, 37, № 7-8, 262-263 (нем.)

Строится метод последовательных приближений для нахождения в области $r>1$ регулярного решения дифференциального уравнения $\Delta\varphi(r,\theta)=0$ с краевым условием $k\cdot s(\theta)\cdot\varphi(r,\theta)-t(\theta)\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=1}=g(\theta)$, где Δ — оператор Лапласа, константа $k>0$,

$$s(\theta)=1+\sum_{\mu=1}^{m}\sigma_\mu\cos\mu\theta,\ t(\theta)=1+\sum_{\mu=1}^{n}\tau_\mu\cos\mu\theta\ (n\leqslant m),$$

$$\sum\left|\sigma_\mu\right|+\left|\tau_\mu\right|<1.$$

Ю. В. Сидоров

5844. Спектральная теория для дифференциального уравнения $Lu=\lambda Mu$. Брауэр (Spectral theory for the differential equation $Lu=\lambda Mu$. Brauer Fred), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 3, 431—446 (англ.)

Пусть L и M — два обыкновенных дифференциальных оператора порядков n и m ($m<n$) соответственно, определенных на интервале I, не обязательно замкнутом. Предполагается, что оператор M положительный и полуограничен, а L допускает самосопряженное расширение. При этих предположениях доказывается существование разложения по собственным функциям. Доказательство основывается на общей спектральной теореме и теории прямых интегралов Неймана и в общих чертах следует методу, впервые примененному Гордингом для случая уравнений в частных производных (РЖМат, 1958, 7732). Устанавливается формула, связывающая функцию Грина со спектральной матрицей, аналогичная формуле Титчмарша-Кодаира. В конце работы изучаются граничные условия, соответствующие самосопряженным расширениям. Б. М. Левитан

5845. О разложениях в ряды по собственным решениям. Киффи (Sugli sviluppi in serie di autosoluzioni. Chiffi Antonio), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1957, **11**, № 3-4, 217—223 (итал.)

Пусть в m-мерной конечной области D с границей FD рассматривается задача на собственные значения

$$E[\varphi]\equiv\sum_{i,k=1}^{m}\partial(a_{ik}(x)\,\partial\varphi/\partial x_i)/\partial x_k=-\lambda\theta(x)\varphi\ (\text{в }\overline{D}),$$

$$L[\varphi]\equiv\alpha(x)\,\partial\varphi/\partial\nu+\beta(x)\varphi=0\ (\text{на }FD),$$

где оператор E эллиптический, ν — конормаль, $\theta>0$, а предположения о коэффициентах и о FD обеспечивают существование функции Грина и при некотором целом $s\geqslant 0$ непрерывную дифференцируемость собственных функций в $\overline{D}s$ раз. Пусть функция f в $\overline{D}$ непрерывно дифференцируема s раз ($s+1$ раз) при s четном (нечетном); обозначим $E^0[f]=f$, $E^k[f]=\theta^{-1}E[E^{k-1}[f]]$, $M(f)=E^{[s/2]}[f]$ и пусть $\lambda_1,\lambda_2\ldots$ — собственные значения задачи, $\varphi_1,\varphi_2\ldots$ — собственные функции, а $c_r=\int_D\theta f\varphi_r dx$.

Пусть $L[E^i[f]]=0$ ($i=1,\ldots,[(s-1)/2]$) на FD. Тогда

$$\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r^s c_r^2\leqslant\int_D\theta(M(f))^2\,dx\ (s\text{ — четное}),$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r^s c_r^2\leqslant\int_D\{N[M(f)]-c(M(f))^2\}dx+$$

$$+\int_{FD}aM(f)\partial M(f)/\partial\nu d\sigma\ (s\text{ — нечетное});$$

в последнем случае предполагается, что $c\leqslant 0$, а $\beta\geqslant 0$;

$$N[u]=\sum_{i,k}a_{ik}(\partial u/\partial x_i)(\partial u/\partial x_k);$$

$$a=\left(\sum_k\left(\sum_i a_{ik}\cos(n,x_i)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Доказательство основано на применении формулы Грина. Аналогичные оценки вытекают из гл. II книги О. А. Ладыженской (РЖМат, 1955, 3774 К), о чем автор не упоминает. А. Д. Мышкис

5846. Разложение по собственным функциям для несимметрических операторов в частных производных. I. Брауэр (Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators. I. Browder Felix E.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 2, 365—381 (англ.)

Пусть L и B — два дифференциальных оператора, определенных на области G n-мерного евклидова пространства E^n ($n\geqslant 1$) Под разложением по собственным функциям оператора L относительно оператора B на G в общих чертах понимают следующее: существует на комплексной плоскости последовательность мер $\{m_j(\zeta)\}$ и последовательность функций $u_j(x,\zeta)$, определенных для $x\in G$ и комплексных ζ, такие, что: а) $(L-\zeta B)u_j(x,\zeta)=0$; б) для достаточно гладких функций v некоторого класса существует функция $u_j(v)(\zeta)=\int_G(Bv)(x)\,\overline{u_j(x,\zeta)}\,dx$, исключая множество m_j меры нуль, которая принадлежит $L^2(m_j)$, причем $(Bv,v)=\Sigma_j\int|u_j(v)(\zeta)|^2\,dm_j(\zeta)$; в) $v(x)=\Sigma_j\int u_j(v)(\zeta)\,u_j(x,\zeta)\,dm_j(\zeta)$. Оператор A называется субнормальным (subnormal), если он удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий: 1) он может быть продолжен до нормального оператора в объемлющем гильбертовом пространстве, 2) оператор A может быть представлен в виде $A=\int\zeta dF(\zeta)$, где F — положительная операторная мера на борелевских множествах комплексной C^1 плоскости, причем $\|Au\|^2=\int|\zeta|^2\,d[F_\zeta u,u]$. В работе доказывается существование разложения по собственным функциям для каждой субнормальной реализации A дифференциального оператора L, определенного в $L^2(G)$. Вначале рассматривается случай $B=E$ (единичный оператор). В этом случае для произвольного дифференциального оператора L, допускающего субнормальную реализацию, собственные функции реализуются в виде обобщенных функций. Если же оператор L гипоэллиптический, то, применяя обычные приемы сглаживания, удается доказать существование классических собственных функций. Если B — положительный дифференциальный оператор, определенный на G, и L имеет субнормальную реализацию в пространстве Гильберта H_B, зависящего от оператора B, то также удается доказать теорему разложения по решениям уравнения $(L-\overline{\zeta}B)u=0$. Однако в этом случае собственные функции, вообще говоря, не являются уже обобщенными функциями, а функционалами более общего типа. Поэтому обычные приемы сглаживания для гипоэллиптического оператора L в этом случае не применимы. Автор обещает разобрать этот вопрос в следующей работе. Б. М. Левитан

5847. О задаче на собственные значения и собственные функции уравнения $\Delta u+\lambda u=0$. Хон Им Сик (On an eigenvalue and eigenfunction problem of the equation $\Delta u+\lambda u=0$. Hong Imsik), Kodai Math. Semin. Repts, 1957, **9**, № 4, 179—190 (англ.)

Пусть C — гладкая замкнутая кривая, D' — область, ограниченная кривой C, и C^* — замкнутое множество,

содержащееся целиком внутри D'. Рассмотрим область D, граница которой состоит из C и C^*. Пусть $D_1 \subset D_2 \subset \ldots D_n \subset \ldots$ — последовательность областей, исчерпывающая область D, т. е. $\lim_{n\to\infty} D_n = D$. Пусть граница области D_n состоит из C и C_n, где C_n состоит из конечного числа гладких кривых, стремящихся при $n\to\infty$ к C^*. Рассмотрим задачу на собственные значения: $\Delta u + \lambda u = 0$ в D_n, $u = 0$ на $C + C_n$. Обозначим через λ_n первое собственное значение и через u_n первую собственную функцию этой задачи, нормированную условиями

$$\iint_{D_n} u_n^2 d\sigma = 1, \quad u_n > 0.$$

В работе доказана следующая теорема:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = v \text{ и } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \rho$$

существуют и не зависят от выбора исчерпывающих областей. Функция v и число ρ удовлетворяют уравнению $\Delta v + \rho v = 0$ в D и условию $v = 0$ на границе D, исключая множество емкости 0. Это исключительное множество совпадает с исключительным множеством для функции Грина в той же области D.

Примечание референта. Сходимость всех собственных значений и собственных функций может быть получена из единственности спектральной функции задачи в области D и сходимости спектральных функций задач для областей D_n к спектральной функции задачи в области D (Proc. London Math. Soc., 1951, **1**, 1—27; РЖМат, 1956, 440). Б. М. Левитан

5848. Неравенства для собственных значений закрепленных и свободных пластинок. Пейн (Inequalities for eigenvalues of supported and free plates. Payne L. E.), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 2, 111—120 (англ.)

Пусть D — область x, y-плоскости и C — граница D. Рассматриваются следующие задачи:

I. $\Delta u + \lambda u = 0$ в D, $u = 0$ на C;

II. $\Delta v + \mu v = 0$ в D, $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ на C (ν — внешняя нормаль к C);

III. $\Delta^2 w + \Lambda \Delta w = 0$ в D, $M(w) = 0$ на C;

IV. $\Delta^2 \varphi - \Omega^2 \varphi = 0$ в D, $\varphi = 0$, $M(\varphi) = 0$ на C;

V. $\Delta^2 w + \Gamma \Delta w = 0$ в D, $M(w) = 0$; $V(w) = 0$ на C;

VI. $\Delta^2 \varphi - \gamma^2 \varphi = 0$ в D, $M(\varphi) = 0$; $V(\varphi) = 0$ на C;

где

$$M(\psi) = \sigma \Delta \psi + (1-\sigma)\left[\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \nu} + \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \nu}\right], \quad 0 < \sigma < \frac{1}{2},$$

$$V(\psi) = \frac{\partial}{\partial \nu}(\Delta \psi) - (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial \nu} - \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial \nu}\right]$$

III есть задача на изгибание, а IV — задача на колебание закрепленной пластинки: V и VI — соответствующие задачи для свободной пластинки.

Для выпуклого контура C в работе доказаны неравенства: $\Lambda_n \leqslant \lambda_n$, $\Omega_n \leqslant \lambda_n$, $\Gamma_n \leqslant \mu_n$, $\gamma_n \leqslant \mu_n$, где $\lambda_n, \mu_n, \ldots$ — собственные значения соответствующих задач, расположенные в порядке роста.

Для произвольного контура C доказаны неравенства

$$\Lambda_n \geqslant (1-\sigma)\mu_2 + \sigma\lambda_n,$$

$$\Lambda_n \geqslant \left(\frac{(1+\sigma)}{2}\right)\lambda_n, \quad \Lambda_n \geqslant \Gamma_{n+3} \geqslant (1-\sigma)\mu_{[(n+3)/2]},$$

$$\Omega_n^2 \geqslant \lambda_n \Lambda_1, \quad \gamma_{n+2}^2 \geqslant \mu_n \Gamma_4 \geqslant (1-\sigma)\mu_2 \mu_n.$$

При доказательстве используется вариационный принцип для собственных значений. Б. М. Левитан

5849. О задаче Неймана для уравнения эллиптического типа. Виноградов В. С., Докл. АН СССР, 1956, **109**, № 1, 13—16

В односвязной ограниченной области D с достаточно гладкой границей (круг единичного радиуса) рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка в комплексной записи

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial \bar{z}} + \operatorname{Re}\left[(a - c + 2ib)\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (d + ie)\frac{\partial U}{\partial z} + fU\right] = g(z), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}}, \qquad (1)$$

эквивалентное общему линейному уравнению второго порядка с коэффициентами a, b, c, d, e, f. Предполагается, что a, b, c — ограниченные измеримые функции в D, удовлетворяющие условию эллиптичности $ac - b^2 \geqslant k > 0$. Ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее на Γ условию Неймана

$$\frac{\partial U}{\partial n} = 0 \qquad (n \text{ — внешняя нормаль}).$$

Метод исследования предложен И. Н. Векуа (РЖМат, 1956, 1372). Для того чтобы U было решением задачи, необходимо и достаточно, чтобы она имела вид

$$U(z) = S_0 \rho + c, \text{ где } c = \text{const};$$

$$S_0 \rho = \iint_D G(z, \zeta)\, \rho(\zeta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$G(z, \zeta) = -\frac{2}{\pi}\left[\ln \frac{1}{|z - \zeta|\,|1 - z\bar{\zeta}|} + \frac{1}{2}\left(|z|^2 + |\zeta|^2 - \frac{3}{2}\right)\right],$$

$$z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Пусть $S_1 \rho = \dfrac{\partial S_0 \rho}{\partial z}$, $S_2 \rho = \dfrac{\partial^2 S_0 \rho}{\partial z^2}$. S_0 и S_1 вполне непрерывны в L_p, $S_0\rho$, $S_1\rho$ непрерывны при $p > 2$, S_2 — сингулярный ограниченный оператор (Calderon A. P., Zygmund A., Acta math., 1952, 88, № 1), так что $|S_0 \rho| \leqslant K_0 \|\rho\|_{L_p}$, $|S_1 \rho| \leqslant K_1 \|\rho\|_{L_p}$, $\|S_2 \rho\|_{L_p} \leqslant A_p \|\rho\|_{L_p}$, причем $A_2 = 1$.

При помощи этих соотношений задача приводится к уравнению

$$\rho - P_1 \rho - P_2 \rho = \frac{1}{\pi}\iint_D \rho(\zeta)\, d\xi d\eta - cf + g, \quad P = P_1 + P_2,$$

$$P_1 \rho = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}[(a - c + 2ib) S_2 \rho],$$

$$P_2 \rho = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}[(d + ie) S_1 \rho + f S_0 \rho].$$

Оператор $J - P_1$ всегда имеет обратный, если $\sqrt{1 - 4k}\, A_p < 1$, так что задача эквивалентна уравнению Фредгольма. Если же

$$\sqrt{1 - 4k}\, A_p + \|d + ie\|_{L_p} K_1 + \|f\|_{L_p} K_0 < 1,$$

то возможны два случая: 1) $\iint_D (J - P)^{-1} f d\xi d\eta \neq 0$; задача всегда разрешима, причем

$$U(z) = \iint_D G(z, \zeta)\,[(J - P)^{-1}(g - cf)]\, d\xi\, d\eta + c, \quad c = \text{const},$$

2) $\iint_D (J - P)^{-1} f d\xi d\eta = 0$; для разрешимости задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\iint_D (J - P)^{-1} g d\xi d\eta = 0.$$

И. И. Данилюк

5850. О некоторых краевых задачах для квазилинейных эллиптических систем первого порядка на плоскости. **Виноградов В. С.**, Докл. АН СССР, 1958, **121**, № 4, 579—581

В односвязной области D, граница которой Γ имеет непрерывную кривизну, рассматривается общая квазилинейная эллиптическая система первого порядка, эквивалентная одному комплексному уравнению вида (1) (реф. 5859), относительно которого предполагается, что $\mu_1(z, w)$ и $\mu_2(z, w)$ равномерно относительно w удовлетворяют условию равномерной эллиптичности $|\mu_1(z, w)| + |\mu_2(z, w)| \leqslant \mu_0 < 1$, причем: а) $\mu_i(z, w)$ при фиксированных w измеримы по z, а по w удовлетворяют условию Липшица, равномерно относительно z. б) $d(z, w)$ при фиксированном w принадлежит $L_p(D)$, а относительно w удовлетворяет условию

$$d(z, w) = d_0(z, w) + d_1(z, w)\, w + d_2(z, w)\, \overline{w},$$

причем $\| d_i(z, w) \|_p \leqslant K_1$ равномерно по w и $d_i(z, w)$ непрерывны по w при фиксированном z ($i = 0, 1, 2$, $p > 2$). Рассматриваются задачи 1 и 2 (реф. 5859). Основной результат статьи: в сделанных предположениях обе задачи всегда разрешимы и притом однозначно. В случае $\mu_2(z, w) \equiv 0$ эта задача рассматривалась Ниче (РЖМат, 1957, 8656). И. И. Данилюк

5851. Об одном уравнении в частных производных с двумя линиями особенностей. **Копсон, Эрдейи** (On a partial differential equation with two singular lines. Copson E. T., Erdélyi A.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **2**, № 1, 76—86 (англ.)

Исследуется решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2\beta}{y}\frac{\partial U}{\partial y} \quad (x, y > 0,\ \beta \geqslant \alpha \geqslant 0) \tag{1}$$

при условиях

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0,\ y \geqslant 0;\ U = F(x),\ \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0,\ x \geqslant 0. \tag{2}$$

Эта задача исследована в другой работе Копсона методом Римана (РЖМат, 1959, 4724). В настоящей работе для той же задачи применяются следующие методы:

1) Метод интегрирования дробного порядка. Этим методом решение уравнения (1) приводится к решению того же уравнения с другими параметрами α', β', в частности с параметрами α, α. Но в последнем случае задача решается в явной форме, и тем самым задача решается в явной форме и при $\beta > \alpha$. Используя общее решение уравнения (1) в случае $\alpha = \beta = 0$, авторы получили „общее“ решение уравнения (1) при отброшенном условии $U(x, 0) = F(x)$.

2) Уравнение (1) преобразуется в полярных координатах, причем $\cos^2\varphi = t$, и применяется метод преобразования Меллина по r. Изображение решения выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса. Обратное преобразование не выполняется. При помощи обоих методов выводится интегральное соотношение между функциями $U(x, 0)$ и $U(0, y)$. Э. Я. Риекстыньш

5852. Разрывные решения нелинейных уравнений. **Олейник О. А.**, Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 3, 3—73

Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, u)}{\partial x} + \psi(t, x, u) = 0, \tag{1}$$

где $\varphi''_{uu} \geqslant 0$. Для уравнения (1) ставится задача Коши с ограниченной измеримой начальной функцией $u_0(x)$. Ограниченная измеримая функция $u(t, x)$ называется обобщенным решением этой задачи, если она удовлетворяет следующим условиям.

1. Для всякой непрерывно дифференцируемой в области $G\{-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ функции $f(t, x)$, равной нулю вне некоторой конечной области и при $t = T$, выполняется равенство

$$\iint\limits_G \left[\frac{\partial f}{\partial t}\, u(t, x) + \frac{\partial f}{\partial x}\, \varphi(t, x, u(t, u)) - f\psi(t, x, u)\right] dx dt + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(0, x)\, u_0(x)\, dx = 0.$$

2. Существует непрерывная при $0 < t < T$, $-\infty, < x_1 < \infty$, $-\infty < x_2 < \infty$, функция $K(t, x_1, x_2)$ такая, что для всех точек (t, x_1), (t, x_2) из G

$$\frac{u(t, x_1) - u(t, x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant K(t, x_1, x_2), \tag{2}$$

если $u(t, x)$ изменить, может быть, на множестве меры нуль. Доказаны существование и единственность такого обобщенного решения задачи Коши. Показано, что решений, не удовлетворяющих условию (2), может быть бесконечно много. Существование обобщенного решения доказано с помощью конечных разностей. Далее рассматривается задача Коши для уравнения

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(t, x, u)}{\partial x} + \psi(t, x, u) \tag{3}$$

с ограниченной измеримой начальной функцией $u_0(x)$, и показывается, что обобщенное решение задачи Коши для уравнения (1) с той же начальной функцией может быть получено как предел решений задачи Коши для уравнения (3) при $\varepsilon \to 0$. В статье изучены свойства решения задачи Коши для уравнения (1). Рассматривается характер зависимости решения от начальных условий и изучена структура обобщенных решений при $\psi(t, x, u) \equiv 0$. Рассматривается также вопрос о поведении при $\varepsilon \to 0$ решений $u_\varepsilon(t, x)$ уравнения (3), определенных в прямоугольнике $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяющих условиям

$$u_\varepsilon(0, x) = u_0(x),\quad u_\varepsilon(t, 0) = u_1(t),\quad u_\varepsilon(t, 1) = u_2(t).$$

Существование предела $u_\varepsilon(t, x)$ при $\varepsilon \to 0$ доказывается в двух случаях: 1) при достаточно малых ε для некоторого $\delta > 0$ и сколь угодно малого $\eta > 0$

$$\varphi_u(t, x, u_\varepsilon(t, x)) \leqslant \beta_1(\eta) < 0 \quad \text{при } \eta \leqslant x \leqslant \delta;$$

$$\varphi_u(t, x, u_\varepsilon(t, x)) \geqslant \beta_2(\eta) > 0 \quad \text{при } 1 - \delta \leqslant x \leqslant 1 - \eta;$$

предельная функция в этом случае не зависит от $u_1(t)$ и $u_2(t)$, удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию в смысле выполнения некоторого интегрального тождества; кроме того, для нее справедливо неравенство (2); 2) при достаточно малых ε для некоторого $\delta > 0$

$$\varphi_u(t, x, u_\varepsilon(t, x)) \geqslant \alpha_1 > 0 \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \delta,$$

$$\varphi_u(t, x, u_\varepsilon(t, x)) \leqslant \alpha_2 < 0 \quad \text{при } 1 - \delta \leqslant x \leqslant 1;$$

предельная функция в этом случае удовлетворяет уравнению начальным и граничным условиям в смысле интегрального тождества и удовлетворяет условию (2).

Г. Д. Вентцель

5853. Применение метода потенциалов к решению основных граничных задач для уравнений параболиче-

ского типа. **Зерагия П. К.**, Тбилисис университетис шромеби, Тр. Тбилисск. ун-та, 1955, 56, 81—104 (рез. груз.)

Для оператора

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t},$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ — достаточно гладкие функции переменных $x = (x_1, x_2, x_3)$ и t $(-\infty < x_i < \infty,\ t' < t < t'')$, причем

$$0 < g \leqslant \frac{\sum a_{ij}\xi_i\xi_j}{\sum \xi_i^2} < G,$$

вводится фундаментальное решение $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$, $(\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),\ t' < \tau < t < t'',\ t' < 0)$, рассмотренное ранее другими авторами.

Пусть T — конечная область трехмерного пространства, ограниченная гладкой поверхностью S. Предполагается, что a_{ij} и S таковы, что существует предел

$$\lim_{t\to\tau}\int_T \Gamma(x, t; \xi, t)\,d\xi = E(x, \tau) \quad (x \in S),$$

и доказывается, что для непрерывной функции $\varphi(x)$ имеет место

$$\lim_{t\to\tau}\int_T \Gamma(x, t; \xi, \tau)\varphi(\xi)\,d\xi = p(x, \tau)\varphi(x),$$

где $p(x, \tau) = 1$ для $x \in T$; $p(x, \tau) = E(x, \tau)$ для $x \in S$; $p(x, \tau) = 0$ для $x \overline{\in} T + S$. Доказывается, что для всякого гладкого решения уравнения $Lu = 0$ имеет место формула Грина

$$p(x, t)\,u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \{\delta_\xi u(\xi, \tau)\,\Gamma(x, t; \xi\tau) -$$

$$- u(\xi, \tau)\,\delta_\xi \Gamma(x, t; \xi, \tau)\}\,d\xi + \int_T u(\xi, 0)\,\Gamma(x, t; \xi, 0)\,d\xi,$$

где δ_ξ означает конормальную производную (внешнюю) в точке $\xi \in S$.

В § 2 статьи вводятся обобщенные потенциалы

$$U(x, t) = \int_0^t d\tau \int_T f(\xi, \tau)\,\Gamma(x, t; \xi, \tau)\,d\xi,$$

$$V(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \mu(\xi, \tau)\,\Gamma(x, t; \xi, \tau)\,d\xi,$$

$$W(x, t) = \int_0^t d\tau \int_S \rho(\xi, \tau)\,\delta_\xi \Gamma(x, t; \xi, \tau)\,d\xi$$

и изучаются их свойства. Для $a_{ij} = \delta_{ij}$ такие потенциалы введены и изучены А. Н. Тихоновым (Бюлл. МГУ, 1938, 8 и 9). Смешанная задача для уравнения $Lu = 0$ и начального условия $u(x, 0) = 0$, $(x \in T)$ при граничном условии: а) $u(\xi, t) = \varphi(\xi, t)$, $\xi \in S$ (I задача) решается в § 3, причем решение имеет форму $W(x, t)$. Указывается на возможность решать задачи с граничными условиями: б) $\delta_\xi u = \varphi(\xi, t)$ (II задача), в) $\delta_\xi u + H(\xi_1)\,u = \varphi(\xi, t)$, $H(\xi) > 0$ (III задача).

В § 4 строится функция Грина для второй задачи, посредством которой составляется интегро-дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет решение задачи

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t),$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\quad \delta_\xi u = \psi(\xi, t)\ (x \in T,\ 0 < t).$$

Х. Л. Смолицкий

5854. Единственность решения задачи Коши для одного класса уравнений эллиптического типа. Лопатинский (Єдиність розв'язку задачі Коші для одного класу рівнянь еліптичного типу. Лопатинський Я. Б.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 7, 689—693 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть D — некоторая ограниченная область в действительном $(s+1)$-мерном пространстве точек $x = (x_1, \ldots, x_{s+1})$, ограниченная частью плоскости $x_{s+1} = h$ и множеством τ. Рассматривается система уравнений вида

$$\sum_{k_1+\ldots+k_{s+1}=s} A_{k_1\ldots k_{s+1}} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_{s+1}} u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_{s+1}^{k_{s+1}}} - F(x)\,u = 0 \quad (1)$$

в предположениях: $A_{k_1\ldots k_{s+1}}$ — квадратные матрицы порядка p, элементы которых — комплексные числа, причем если

$$a(\alpha) = \det \sum_{k_1+\ldots+k_{s+1}=s} A_{k_1\ldots k_{s+1}} \alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_{s+1}^{k_{s+1}},$$

то система уравнений $\frac{\partial}{\partial \alpha_k} a(\alpha) = 0,\ k = 1, \ldots, s+1$ имеет только нулевое решение, и $a(\alpha)$ отлично от нуля при любом действительном отличном от нуля α. $F(x)$ — квадратная матрица, элементы которой — комплекснозначные непрерывные в $\overline{D}$ функции. Доказана следующая теорема: Если $u(x)$ есть решение системы (1), обладающее в D производными до порядка s включительно и обращающееся вместе со своими производными до $(s-1)$-го порядка включительно в нуль на множестве τ, то $u(x)$ тождественно равно нулю в D. Аналогичное утверждение в случае $s = 1$ доказано Т. Карлеманом (Carleman T., C. r. Acad. sci., 1933, 197, 471). И. И. Данилюк

5855. Замечания о решении одной обобщенной бигармонической задачи. Пини (Osservazioni sulla soluzione di un problema biarmonico generalizzato. Pini Bruno), Scritti mat. onore Filippo Sibirani. Bologna, 1957, 219—224 (итал.)

Пусть D — односвязная ограниченная область плоскости, ограниченной кривой C

$$x = \bar{x}(s),\quad y = \bar{y}(s),\quad 0 \leqslant s \leqslant l.$$

Через C_t обозначается кривая

$$x = x(s, t) = \bar{x}(s) - t\bar{y}'(s),\quad y = y(s, t) = \bar{y}(s) + t\bar{x}'(s),\quad 0 \leqslant s \leqslant l;$$

дифференциал дуги C_t обозначается через ds_t. В статье дается явная формула для решения $u(x, y)$ задачи $\Delta\Delta u = 0$ в $D - C$

$$\lim_{t\to 0}\int_{C_t} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial s_t} - f_1\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial t} - f_2\right|\right) ds_t = 0. \quad (1)$$

Пусть

$$\left.\begin{aligned} X &= [x-\bar{x}(s)]\,\bar{x}'(s)+[y-\bar{y}(s)]\,\bar{y}(s),\\ Y &= -[x-\bar{x}(s)]\,\bar{y}'(s)+[y-\bar{y}(s)]\,\bar{x}'(s),\\ X^2+Y^2 &= \rho^2, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{X} &= [x(\sigma,t)-\bar{x}(s)]\,\bar{x}'(\sigma)+[y(\sigma,t)-\bar{y}(s)]\,\bar{y}'(\sigma),\\ \bar{Y} &= -[x(\sigma,t)-\bar{x}(s)]\,\bar{y}'(\sigma)+[y(\sigma,t)-\bar{y}'(s)]\bar{x}'(\sigma) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Формула для решения задачи (1) имеет вид

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^l m_1(s)\left(-\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}+\frac{XY}{\rho^2}\right)ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^l m_2(s)\,\frac{Y^2}{\rho^2}\,ds;$$

плотность $m=(m_1, m_2)$ определяется формулой

$$m(\sigma)=\frac{2}{\pi}\int_0^l H(\sigma,s)\,f(s)\,ds+f(\sigma),\quad f=(f_1,f_2).$$

Здесь $H(\sigma, s)$ — резольвентная матрица для матрицы ядер $K(\sigma, s)$:

$$K_{11}=\frac{\bar{Y}Y^2}{\rho^4},\quad K_{12}=\frac{XY\bar{Y}}{\rho^4},\quad K_{21}=\frac{XY^2}{\rho^4},\quad K_{22}=\frac{X\bar{X}Y}{\rho^4},$$

где X, Y получены из (2) при $x=\bar{x}(\sigma)$, $y=\bar{y}(\sigma)$, а $\bar{X}$, $\bar{Y}$ из (3) при $t=0$. Для доказательства основной формулы пишется соответствующая формула для решения классической задачи, приближающей рассматриваемую обобщенную задачу, и производится предельный переход. Т. Д. Вентцель

5856. Свойства полигармонических функций. Бугров Я. С., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 4, 491—514

Рассматривается краевая задача для полигармонического уравнения

$$\Delta^l u(\rho,\theta)=0$$

$(l=1, 2, 3\ldots,\ 0\leqslant\rho<1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ при условии

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial\rho^k}\right|_{\rho=1}=\varphi_k(\theta)\quad (k=0,\ 1,\ \ldots\ l-1),$$

где

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Основная теорема: пусть периода 2π функции $\varphi_k(\theta)\in H_p^{(r+l-k-1)_*}$ $(k=0,\ 1,\ldots l-1;\ r>0;\ 1\leqslant p\leqslant\infty)$; тогда соответствующая полигармоническая функция $u(\rho,\theta)\in H_p^{(r+l+1/p-1)}\left(\sum\right)$, где $\sum$—единичный круг. При $p=2$, $l=1$ это — соответствующий результат С. М. Никольского (РЖМат, 1959, 239); при $p=l=2$ теорема автора усиливает соответствующий результат Т. И. Аманова (РЖМат, 1958, 1213). Класс $H_p^{(r)}(G)$, $r>0$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $r=\bar{r}+\alpha$, где $\bar{r}$ — целое, $0<\alpha\leqslant 1$, — это класс функций (точное определение см. в статье) $f(x, y)$, суммируемых вместе со своими частными производными $\frac{\partial^{\bar{r}}f}{\partial x^{\bar{r}}}$, $\frac{\partial^{\bar{r}}f}{\partial y^{\bar{r}}}$ в степени p по G, причем $\frac{\partial^{\bar{r}}f(x,y)}{\partial x^{\bar{r}}}$ (соответственно $\frac{\partial^{\bar{r}}f(x,y)}{\partial y^{\bar{r}}}$) удовлетворяет по x (соответственно по y) интегральному условию Липшица при $0<\alpha<1$ и обобщенному (со второй разностью) интегральному условию Липшица при $\alpha=1$. Кроме этого, рассматриваются при $l=1$ задача Неймана в единичном круге и задача Дирихле для произвольной области. О. В. Бесов

5857. Решение одной смешанной краевой задачи теории термодиффузии. Прудников А. П., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 2, 249—251

Посредством совместного применения преобразований Фурье и Лапласа решается система уравнений

$$\frac{du_1}{dt}=a_1\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+b_1\frac{du_2}{dt},\quad \frac{du_2}{dt}=a_2\frac{\partial^2u_2}{\partial x^2}+b_2\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2},$$

$$(a_1+b_1b_2+a_2)^2\neq 4a_1a_2$$

с начальными условиями $u_i(x,0)=f_i(x)$, $0<x<l$, с граничными условиями

$$a_{11}u_1(0,t)+a_{12}u_2(0,t)+a_{13}\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}+a_{14}\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}=$$

$$=\chi_1(t),$$

$$a_{21}u_1(0,t)+a_{22}u_2(0,t)+a_{23}\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x}+a_{24}\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}=$$

$$=\chi_2(t),$$

$$a_{31}u_1(l,t)+a_{32}u_2(l,t)+a_{33}\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}+a_{34}\frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}=\chi_3(t),$$

$$a_{41}u_1(l,t)+a_{42}u_2(l,t)+a_{43}\frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x}+a_{44}\frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}=$$

$$=\chi_4(t),$$

где a_i, b_i, a_{kl} — постоянные; $f_i(x)$, $\chi_k(t)$, $i=1,2$; $kl=1, 2, 3, 4$ — произвольные ограниченные интегрируемые функции своих аргументов. Решение представляется в виде суммы интегралов, содержащих произвольные функции параметра интегрирования. Последние определяются из граничных условий посредством решения системы интегральных уравнений Вольтерра. Л. Я. Цлаф

5858. О фундаментальных решениях одной системы дифференциальных уравнений. Бурчуладзе Т. В., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1958, 20, № 4, 391—398 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1958, 20, № 4, 391—398

Рассматривается эллиптическая система двух дифференциальных уравнений

$$\Delta_{11}u_1+\Delta_{12}u_2+\omega^2u_1=0,$$
$$\Delta_{21}u_1+\Delta_{22}u_2+\omega^2u_2=0,$$

где ω — постоянная, u_1, u_2 — неизвестные функции двух переменных x_1, x_2 и Δ_{ll} — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, содержащие производные только 2-го порядка. К такой системе приводится плоская задача об установившихся колебаниях анизотропного или изотропного тела. Автор дает метод эффективного построения фундаментальных решений системы для частного случая, когда коэффициенты операторов связаны одной зависимостью. В этом случае u_1 и u_2 удается выразить через 2 функции φ_1, φ_2, каждая из которых удовлетворяет уравнению 2-го порядка. Найдены в явном виде решения последних уравнений, у которых вторые производные имеют логарифмическую особенность. Рассмотрен также случай $\omega=0$, соответствующий плоской статической задаче для анизотропного тела. С. Г. Лехницкий

5859. Об ограниченности решений краевых задач для линейных эллиптических систем первого порядка на

плоскости. **Виноградов В. С.**, Докл. АН СССР, 1958, 121, № 3, 399—402

В единичном круге $D(|z|\leqslant 1)$ рассматривается дифференциальное уравнение относительно комплексной функции w:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}+\mu_1\frac{\partial w}{\partial z}+\mu_2\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}+d(z,w)=0;\ w=u+iv, \qquad (1)$$

$$|\mu_1|+|\mu_2|\leqslant\mu_0<1,\ \mu_0=\text{const},\ d(z,w)=a_1(z)w+a_2(z)w-g(z).$$

Предполагается, что $\mu_1(z)$, $\mu_2(z)$—измеримые в D функции. Уравнение (1) эквивалентно общей эллиптической системе первого порядка относительно u, v. Если u и v удовлетворяют на Γ условию $\alpha u+\beta v=0$, то (после некоторых преобразований) w удовлетворяет условию:

$$\operatorname{Re}[z^{-n}w]=0, \qquad (2)$$

где n есть приращение $\frac{1}{2\pi}\arg(\alpha+\beta)$ при обходе Γ один раз в положительном направлении; предполагается также, что $a_1, a_2, g\in L_p$, $p>2$, и $\|a_1\|, \|a_2\|, \|g\|\leqslant K$. Рассматриваются две задачи:

Задача 1 ($n\geqslant 0$). Найти $w\in W_p^{(1)}(D)$, $p>2$, которая удовлетворяет уравнению (1), условию (2) и условиям:

$$\int_\Gamma z^{-k}w(z)\,ds=0,\ k=0,1,\ldots,2n.$$

Задача 2 ($n<0$). Найти $w\in W_p^{(1)}(D)$, $p>2$, удовлетворяющую уравнению (1), и одновременно найти $2|n|-1$ постоянную $\lambda_0, \lambda_{\pm1},\ldots,\lambda_{\pm|n|-1}$, так, чтобы на Γ удовлетворялось условие:

$$\operatorname{Re}[z^{-n}w]_\Gamma=\operatorname{Re}\Big[\lambda_0+\sum_{k=1}^{|n|-1}(\lambda_k+i\lambda_{-k})z^k\Big].$$

Основной результат статьи содержится в следующей теореме: решения задач 1 и 2 ограничены по норме в $W_p^{(1)}(D)$, $p>2$, числом, зависящим только от μ_0 и K.

И. И. Данилюк

5860. О смешанной задаче для линейной гиперболической системы на плоскости. Аболиня В. Э., Мышкис А. Д., (Zinātn. raksti. Latv. univ., Уч. зап. Латв. ун-т, 1958, 20, 87—104 (рез. лат.)

Рассматривается система

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x}-\sum_{j=1}^{m}a_{ij}(x,t)u_j=f_i(x,t)\quad(i=1,2,\ldots,m), \qquad (1)$$

где $\lambda_i(x,t)$; $a_{ij}(x,t)$ определены и непрерывно дифференцируемы в прямоугольнике $\bar{\pi}\{0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T\}$, $l, T<\infty$, причем $\lambda_1(x,t)\leqslant\lambda_2(x,t)\leqslant\ldots\leqslant\lambda_m(x,t)$ и $\lambda_i(x,t)<0$ $(i=1,\ldots k)$; $\lambda_j(x,t)>0$ $(j=k+1,\ldots m)$ всюду в π. Для системы (1) в π ставится смешанная задача с начальными

$$u_s(x,0)=g_s(x)\quad(s=1,2,\ldots,m),\quad 0\leqslant x\leqslant l, \qquad (2)$$

и краевыми условиями:

$$u_i(0,t)-\sum_{j=k+1}^{m}\Big[\alpha_{ij}(t)u_j(0,t)+\int_0^t\beta_{ij}(t,\tau)u_j(0,\tau)d\tau\Big]=h_i(t),$$

$$u_j(l,t)-\sum_{i=1}^{k}\Big[\alpha_{ji}(t)u_i(l,t)+\int_0^t\beta_{ji}(t,\tau)u_i(l,\tau)\Big]=h_j(t), \qquad (3)$$

где β_{ij} непрерывны, а dij непрерывно дифференцируемы на $0\leqslant\tau\leqslant t$; $0\leqslant t\leqslant T$. Интегрированием вдоль характеристик система (1) сводится к эквивалентной ей системе интегральных уравнений Вольтерра, решение которой может быть получено методом последовательных приближений. Таким образом устанавливается существование и единственность классического (гладкого) решения системы (1) в π для непрерывно дифференцируемых $g_s(x)$, $h_s(t)$ $(s=1,2,\ldots,m)$ $f_s(x,t)$ непрерывных и непрерывно дифференцируемых по x и при выполнении некоторых условий согласования между входящими в условия (2) и (3) функциями g_s; h_s; a_{ij}; β_{ij} и их производными в точках $(x=0,\ t=0)$ и $(x=l,\ t=0)$. Из метода решения системы интегральных уравнений Вольтерра вытекает ряд оценок для модулей решения системы (1) и его первых производных через функции $g_s(x)$, $h_s(t)$, $f_s(x,t)$ и их производные. Эти оценки обеспечивают непрерывную зависимость решения задачи (1)—(3) от свободных членов системы (1), начальных и краевых условий. Во второй части работы, в полном метрическом пространстве L_n, определенном как совокупность функции $u(x,t)$, заданных почти всюду и измеримых на прямоугольнике $\bar{\Pi}$, причём $u(x,t)$ при каждом $t\in[0,T]$ заданы почти для всех x и измеримы, при каждом $x\in[0,l]$ заданы почти для всех t и измеримы и интегрально непрерывны по x и t, с нормой:

$$\|u\|=\sup_{[0,T]}\int_0^l|u|\,dx+\sup_{[0,l]}\int_0^T|u|\,dt<\infty.$$

Рассматривается обобщенное решение системы (1), удовлетворяющее интегральному тождеству:

$$\int_0^l\Big[\sum_{i=1}^{m}u_i\Psi_i|_{t=T}-\sum_{i=1}^{m}u_i\Psi_i|_{t=0}\Big]dx-\int_0^T\sum_{i=1}^{m}(u_i\lambda_i\Psi_i|_{x=l}-u_i\lambda_i\Psi_i|_{x=0})\,dt+\iint_\Pi\sum_{i=1}^{m}\Big\{u_i\Big[-\frac{\partial\Psi_i}{\partial t}+\frac{\partial(\lambda_i\Psi_i)}{\partial x}-\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\Psi_i\Big]-f_i\Psi_i\Big\}dxdt=0$$

при любых гладких функциях $\Psi_i(x,t)$ и удовлетворяющее условиям (2) и (3) почти всюду. Доказывается существование этого решения для суммируемых $g_s(x)$ на $[0,l]$, $h_s(t)$ — на $[0,T]$ и $f_s(x,t)$ на $\bar{\Pi}$ и единственность его при дополнительном условии непрерывной дифференцируемости $\lambda_s(x,t)$ по x и $\beta_{ij}(t,\tau)$ по τ. Вводится второе определение обобщенного решения задачи (1)—(3), как предела в метрике L_{11} последовательности гладких решений этой задачи и устанавливается эквивалентность обоих определений. Исследуются функциональные свойства обобщенного решения в зависимости от функциональных свойств функций $g_s(x)$, $h_s(t)$ и $f_s(x,t)$. Например, обобщенное решение задачи (1)—(3) непрерывно в $\bar{\Pi}$, если $g_s(x)$ и $h_s(t)$ непрерывны соответственно на $[0,l]$ и $[0,T]$, а $f_s(x,t)$ измеримы на $\bar{\Pi}$ и интегрально непрерывны вдоль s-го семейства характеристик.

И. Л. Кароль

5861. Единственность решения задачи Коши для уравнения Шредингера. Лопатинский (Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння типу Шредінгера. Лопатинський Я. Б.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 2, 119—122 (укр.; рез. русск., англ.)

Пусть D — область в трехмерном пространстве и a — такая граничная точка области D, что существует шар, замыкание которого имеет точку a единственной общей точкой с замыканием области D. Доказывается, что решение задачи Коши для уравнения $\Delta u + f(x_1, x_2, x_3)\, u = 0$ с комплекснозначной, ограниченной и непрерывной в D функцией $f(x_1, x_2, x_3)$ единственно в некоторой достаточно малой окрестности (в работе дается точное описание окрестности) точки a. В. Э. Лянце

5862 К. Математическая физика. Мензел (Mathematical physics. Menzel Donald H. New York, Prentice-Hall, Inc., 1953, VIII, 412 pp., ill.) (англ.)

Книга представляет собой курс математической физики и состоит из пяти частей: 1) Физические размерности и основные единицы; 2) Механика и динамика; 3) Колебания и волны; 4) Классическая электромагнитная теория; 5) Теория относительности. Курс рассчитан на студентов, хорошо знакомых с дифференциальным и интегральным исчислением.

5863 Д. О линейной краевой задаче для системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа. Еникке (Über lineare Randwertprobleme der Systeme von zwei linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus. Jaenicke Joachim.— Diss., Fak. allgem. Ingenieurwiss. Techn. Univ. Berlin, 1957, 56 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, **B**, № 17, 1504 (нем.)

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

5864. Фундаментальное решение линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Боровиков В. А., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 3, 407—410

Исследуется поведение фундаментального решения $K(x_1, \ldots, x_m)$ линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) K(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \delta(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

в окрестности характеристического конуса. Получены разложения фундаментального решения по степеням расстояния от характеристического конуса при условии, что точка характеристического конуса, в окрестности которой дается разложение, не является особой. При разложении используются интегральные представления для функции $K(x_1, \ldots x_m)$. Ю. Н. Днестровский

5865. Проблема матричных граничных условий. Адем, Мошинский (Problemas matriciales de condiciones a la frontera. Adem Julian, Moshinsky Marcos), An. Inst. geofís. Univ. nac. autónoma México, 1955, **1**, 10—23 (исп., рез. англ.)

Краевые задачи математической физики для сложных областей, состоящих из совокупности областей простой формы, предлагается сводить к задачам для вектор-функции, каждая из компонент которых определена в своей частичной подобласти простой формы. Общая идея иллюстрируется на примере трехмерного уравнения теплопроводности внутри крестообразной области. Если толщина сторон креста много меньше их длин, то трехмерная задача может быть сведена к одномерной задаче относительно вектор-функции с четырьмя компонентами, связанными через граничные условия. Для рассматриваемой задачи строится система собственных значений и собственных вектор-функций. Общее решение может быть получено разложением по построенной системе собственных функций. В качестве второго примера рассматривается задача о колебании круглой пластины внутри упругой среды. Компоненты вектор-функций оказываются при этом связанными через уравнения колебаний.

Ю. Н. Днестровский

5866. Простая модель теории потенциала. Гаск, Рос (En enkel potentialteoretisk modell. Gask H., Roos J. E.), Nord. mat. tidskr., 1958, **6**, № 1, 5—20 (шведск.; рез. англ.)

Рассматривается одномерный вариант теории потенциала в предположении, что заряды могут быть расположены в точках $x = n\delta$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) на действительной оси. Пусть сила K, действующая между двумя зарядами e и f, равна $K(r) = -ef\Psi(r)$ ($\Psi(r)$ монотонно стремится к нулю при $r \to \infty$), тогда $\varphi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \delta\Psi(|x| + h\delta)$ есть потенциал в точке x от единичного заряда, расположенного в точке 0. Для системы зарядов e_x потенциал аддитивен. Доказывается, что энергия системы $I(e) = \frac{1}{2}\sum_{xx'} \varphi(x - x')\, e_x e_{x'}$ больше нуля для любых распределений зарядов. Устанавливается справедливость также некоторых других теорем, аналогичных теоремам обычной теории потенциала.

Ю. Н. Днестровский

5867. Уравнения акустики в форме Эйлера и Лагранжа. Караскевич (The equations of acoustics in the form of Euler and of Lagrange. Karaśkiewicz E.), Bull. Soc. amis sci. et lettres Poznań, 1956—1957 (1958), **B14**, 61—71 (англ.)

Проведен подробный вывод уравнений пространственного течения идеального газа в представлении Эйлера и Лагранжа. Новых результатов в статье не содержится.

Н. Н. Кузнецов

5868. Существование и единственность течения позади поверхности ударной волны в случае стационарного и псевдостационарного пространственного течения. Канвал (Existence and uniqueness of flows behind three-dimensional stationary and pseudo-stationary shocks. Kanwal R. P.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 2, 201—207 (англ.)

Считая поверхность ударной волны аналитической поверхностью, на которой заданы аналитические начальные условия, автор с помощью теоремы Коши — Ковалевской доказывает существование и единственность течения позади ударного фронта в стационарном (зависимости от времени нет) и псевдостационарном (величины, характеризующие течение, суть функции от x_i/t) случаях. Используемый метод основан на введении — вместо декартовых — координат y_1, y_2, T, где y_1, y_2 — гауссовы координаты на поверхности ударной волны, T — расстояние вдоль линии тока от данной точки пространства до поверхности ударной волны.

Н. Н. Кузнецов

5869. Распространение искривленных ударных волн в псевдостационарных пространственных газовых потоках. Канвал (Propagation of curved shocks in pseudo-stationary three-dimensional gas flows. Kanwal R. P.), Illinois J. Math., 1958, **2**, № 1, 129—136 (англ.)

Рассматривается пространственное псевдостационарное течение газа с нулевой вязкостью и нулевой теплопроводностью. Под псевдостационарным понимается такое течение, в котором все величины, характеризующие течение, являются функциями x_i/t (x_i — пространственные координаты, t — время). Для такого течения с помощью преобразования координат в окрестности

поверхности ударной волны: $x_i = ta_i(y_1, y_2)$, где y_1 и y_2 — гауссовы координаты на этой поверхности, вычисляются градиенты скорости, давления, плотности и энтропии газа в области позади фронта ударной волны по заданному состоянию течения перед фронтом. Предполагая течение перед фронтом ударной волны постоянным, автор находит явное выражение для вектора вихря позади фронта. Это дает ему возможность выделить все случаи, в которых течение, постоянное перед ударной волной, остается безвихревым позади фронта. Эти случаи таковы: 1) поверхность ударной волны плоская; 2) распространение ударной волны происходит в направлении нормали к ее поверхности в каждой ее точке; 3) одна из главных кривизн поверхности ударной волны равна нулю, и при этом тангенциальная составляющая скорости движения ударной волны относительно жидкости совпадает в каждой точке с главным направлением поверхности ударной волны, соответствующим нулевой кривизне.

Н. Н. Кузнецов

5870. О некоторых вопросах диабатического течения и общей интерпретации основного уравнения волновой механики. Кшивоблоцкий (On some aspects of diabatic flow and general interpretation of the wave mechanics fundamental equation. Krzywoblocki M. Z. v.), Acta phys. austriaca, 1958, **12**, № 1, 60—69 (англ.)

Исследуется диабатическое течение, под которым понимается течение идеального газа, теплопроводность которого равна нулю, при наличии внешнего притока тепла. Ограничиваясь плоским случаем, автор ставит вопрос о существовании полного дифференциала функции $Q(x, y)$, задающей общий приток тепла. Интегрируя уравнение 1-го закона термодинамики

$$dQ = c_v dT + p dv \qquad (1)$$

(v — удельный объем, p — давление, T — температура, c_v — теплоемкость при постоянном объеме) в смысле интеграла Стилтьеса, он показывает, что если $p(x, y)$ непрерывно в рассматриваемой области, а $T(x, y)$ и $v(x, y)$ суть функции с ограниченной вариацией, то существует такая функция $Q(x, y)$, что $dQ(x, y)$, удовлетворяющее соотношению (1), есть ее полный дифференциал в плоскости (x, y). Однако $Q(x, y)$, вообще говоря, не является функцией состояния, и в плоскости переменных (T, v) dQ не есть точный дифференциал. Исключение составляет случай баротропного течения, когда $p = p(v)$. Задание функции $Q(x, y)$ определяет характеристики течения. В заключение автор касается гидродинамической интерпретации уравнения Шрёдингера. Записывая волновую функцию, как обычно, в виде $\Psi = \alpha \exp(i\beta)$ (α,β — вещественные функции), он показывает, что полученные из уравнения Шрёдингера для функций α, β уравнения могут трактоваться как уравнение непрерывности и уравнение движения и некоторого диабатического течения.

Н. Н. Кузнецов

5871. О движении газа в трубе с подвижными поршнями. Болонкин Г. С., Научн. тр. Моск. горн. ин-та, 1957, сб. 19, 21—41

Решается следующая задача: в бесконечной трубе помещены два поршня с массами M_1 и M_2, между которыми находится идеальный газ массы m с начальными параметрами P_0, ρ_0. При $t>0$ процесс считается адиабатическим, трение поршней о стенки трубы отсутствует, внешнее давление равно нулю. Математическая задача заключается в определении решения уравнения

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{\gamma+1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

с начальным и граничным условиями:

$$\left.\begin{aligned}\xi(x, 0) &= x,\\ \dot{\xi}(x, 0) &= 0,\end{aligned}\right\} \quad -a_2 \leqslant x \leqslant a_1,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\mu_1}{e}\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = a_1,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{\mu_2}{e}\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad \text{при} \quad x = -a_2.$$

Решение представляется в виде

$$\xi(x, t) = \xi_1(t)\cdot\xi_2(x) + U(x, t),$$

причем требуется, чтобы

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \ll \xi_1(t)\frac{\partial \xi_2(x)}{\partial x}.$$

Определение функций $\xi_1(t)$, $\xi_2(x)$ и $U(x, t)$ проводится путем разложения искомых функций по степеням малого параметра, за который принимается величина $\mu = \mu_1 + \mu_2 \ll 1$, где $\mu_1 = m/\gamma M_1$; $\mu_2 = m/\gamma M_2$, причем отбрасываются члены порядка μ^2 и выше. При этом функция $\xi_1(t)$ находится из уравнения

$$\int_1^{\xi_1}\frac{d\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^{-(\gamma-1)}}} = \frac{c_0}{l}\sqrt{\frac{2\mu}{\gamma-1}}\cdot t,$$

а

$$\xi_2(x) = x + \frac{\mu}{6l^2}\left[(x+a_2)^3 - 3a_2(x+a_2)^2 - l(l-3a_2)(x+a_2)\right].$$

Величина $U(x, t)$ представляется в виде ряда

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_{1n}(t)\cdot U_{2n}(x),$$

где

$$U_{1n}(t) = \xi_1(t)^{(\gamma+1)/4}\cdot\left[A\sqrt{z}\,j_\nu(z) + B\sqrt{z}\,Y_\nu(z)\right],$$

$$U_{2n}(x) = (-1)^{n+1}\frac{2\mu}{\pi^3 n^3}\left[a_1 + (-1)^n a_2\right]\cdot\sin\frac{\pi n}{l}(x + a_2).$$

Здесь A и B — постоянные коэффициенты, а

$$z = \sqrt{\frac{2}{(\gamma-1)\mu}}\cdot\pi\cdot n\operatorname{arc}\sin\frac{1}{\xi_1^{(\gamma-1)/2}}.$$

Движение поршней при $t \ll \frac{l}{c_0}\sqrt{\frac{2}{\mu}}$ описывается уравнениями

$$\xi_n = x_n\cdot\left(1 + \frac{\mu c_0^2 t^2}{2l^2}\right),$$

$$\dot{\xi}_n = x_n\cdot\frac{\mu c_0^2 t}{l^2}.$$

Аналогичные выражения для ξ_n и $\dot{\xi}_n$ получаются при точном решении задачи для малых t и $x_n = l/2$ (Станюкович К. П., Неустановившиеся движения сплошной среды, М., Гостехиздат, 1955, 638). При $t \to \infty$

$$\dot{\xi}_n = x_n\cdot\sqrt{\frac{4P_0}{(\gamma-1)Ml}},$$

нто соответствует случаю, когда начальная энергия газа полностью перешла в кинетическую энергию поршней. В работе нет сравнения полученного решения с известными решениями этой задачи. Имеются опечатки и ошибки (например, в формулах (52) (59), (79), (87), (113)). Библ. 9 назв. В. Ф. Куропатенко

5872. Поперечные скорости в полностью установившемся течении. Маслен (Transverse velocities in fully developed flows. Maslen Stephen H.), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 2, 173—175 (англ.)

Энергетическим методом доказывается, что поперечные скорости в установившемся осевом потоке несжимаемой вязкой жидкости в прямых трубах отсутствуют. В. И. Меркулов

5873. Сжимаемые жидкости в установившемся плоском течении. Пауэр, Смит (Compressible fluids in steady two- dimensional subsonic flow. Power G., Smith P.), Appl. Scient. Res., 1958, **A7**, № 5, 357—368 (англ.)

Авторы рассматривают дозвуковое безвихревое течение сжимаемой невязкой идеальной жидкости. В статье используются обозначения: q — абсолютная величина скорости потока, ρ — плотность жидкости, Θ — угол между вектором скорости и фиксированным направлением, Φ — потенциал скоростей, Ψ — функция тока, γ — отношение теплоемкости. Вводя переменное

$$\omega(q) = \int \frac{1}{q}\left(1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}q^2\right)^{1/\gamma-1} dq, \qquad (1)$$

авторы сводят уравнения годографа к виду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega} = -f(q)\frac{\partial\Psi}{\partial\Theta}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} = \frac{\partial\Psi}{\partial\omega}, \qquad (2)$$

где

$$f(q) = \left[1 - \frac{\gamma+1}{2\gamma}q^2\right]\left[1 - \frac{\gamma-1}{2\gamma}q^2\right]^{-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

в первом приближении полагается

$$f(q) = 1$$

и уравнения (2) принимают вид условий Коши—Римана

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\Theta}, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} = \frac{\partial\Psi}{\partial\omega}.$$

После этого можно ввести аналитическую функцию

$$w = \Phi + i\Psi = f(\sigma), \qquad \sigma = \omega + i\Theta,$$

определяющую некоторое течение несжимаемой жидкости в вспомогательной ζ-плоскости. Переход к исходной плоскости x, y осуществляется с помощью формул

$$dz = \frac{1}{q}e^{i\Theta}\left(d\Phi + \frac{i}{\rho}d\Psi\right), \qquad z = x + iy.$$

Таким образом, задача сводится к решению задачи об обтекании некоторого профиля несжимаемой идеальной жидкости. Во втором приближении решение $\Phi(\omega\Theta)$, $\Psi(\omega,\Theta)$ уравнения (2) представляется в виде

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \qquad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

где Φ_1, Ψ_1 — первое приближение. Тогда Φ_2, Ψ_2 удовлетворяют системе

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\omega} = -\left[1 - g(q)\right]\frac{\partial\Psi_2}{\partial\Theta} + g(q)\frac{\partial\Psi_1}{\partial\Theta}$$

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\Theta} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial\omega}, \qquad g(q) = 1 - f(q).$$

Отбрасывая член $g(q)\frac{\partial\Psi_2}{\partial\omega}$, обозначая $g(q)$ через $T(\omega)$, получаем уравнения

$$\Phi_{2\omega} = T(\omega)\Psi_{1\Theta} - \Psi_{2\Theta}, \qquad \Phi_{2\Theta} = \Psi_{2\omega}.$$

Условия интегрируемости (9) дают

$$\Psi_{2\omega\omega} + \Psi_{2\Theta\Theta} = T(\omega)\Psi_{1\Theta\Theta},$$
$$\Phi_{2\omega\omega} + \Phi_{2\Theta\Theta} = \frac{dT(\omega)}{d\omega}\Phi_{1\omega} - T\Phi_{1\omega\omega}. \qquad (3)$$

Разлагая $w = \Phi_1 + i\Psi_1$ в ряд по $e^{-\sigma}$ и подставляя разложение в (3), авторы получают частные интегралы уравнений (3) в виде рядов. Н. Н. Яненко

5874. Решение уравнений Навье—Стокса, иллюстрирующее реакцию ламинарного пограничного слоя на заданное изменение скорости внешнего потока. Уотсон (A solution of the Navier-Stokes equations illustrating the response of a laminar boundary layer to a given change in the external stream velocity. Watson J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, **11**, № 3, 302—325 (англ.)

Рассматривается двумерное течение вязкой несжимаемой жидкости в полупространстве с неподвижной пористой стенкой, когда на бесконечности ($y \to \infty$) задана параллельная к стенке скорость жидкости $u = U(t)$. Если считать скорость жидкости не зависящей от x, а проекцию скорости v_w на y — постоянной, то уравнение для функции $u(y, t)$ линеаризируется и имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_w\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости. Решение этого уравнения ищется в виде (указанном Стюартом)

$$u = U_0[\zeta_0(y) + g(y, t)], \quad \zeta_0(y) = 1 - \exp(-y\,|\,v_w\,|/\nu)$$
$$U(t) = U_0[1 + f(t)].$$

Уравнение для функции g автор решает применением преобразования Лапласа. В работе дано несколько примеров; дан также предельный переход в полученном решении при $t \to \infty$. Д. Е. Долидзе

5875. Об одном уравнении, встречающемся в теории взаимодействия двух потоков. Наполитано (Su di un'equazione incontratasi nello studio della interazione di due correnti. Napolitano Luigi G.), Ricerca, 1957, 8, lugl.-dic., 39—59 (итал.)

Рассматривается задача о турбулентном движении, возникающем при взаимодействии двух плоских параллельных потоков, характеризуемых постоянными параметрами: ρ_i u_i, T_i, μ_i $(i = 1, 2)$. Движение, рассматриваемое как квазистационарное, описывается уравнениями:

$$(\bar\rho\cdot\bar u)\bar u_x + \bar\rho\bar v\cdot\bar u_y = \varepsilon_0\cdot\bar\rho\cdot u_{yy}, \qquad (а)$$
$$(\bar\rho\cdot\bar u)_x + (\bar\rho\bar v)_y = 0, \qquad (б) \qquad (1)$$

где $\bar\rho$, $\bar u$ связаны соотношением

$$\frac{\rho_1}{\bar\rho} = A + B\frac{\pi}{u_1} - (A + B - 1)\left(\frac{\pi}{u_1}\right)^2. \qquad (2)$$

A, B — функции от M_1, $\frac{H_2}{H_1}$, $\frac{u_2}{u_1}$, H — энтальпия потока. Скорости встречных потоков направлены по оси x. Функции u, v удовлетворяют начальным условиям:

$$\pi(0, y) = \begin{cases} u_1 = \text{const}, & y > 0, \\ u_2 = \text{const} \neq u_1, & y < 0, \end{cases} \tag{3}$$

и граничным условиям:

$$\begin{aligned} &\lim \ \pi(x, y) = u_1, \quad y \to +\infty \\ &\lim \ \pi(x, y) = u_2, \quad y \to -\infty. \end{aligned} \tag{4}$$

Представляя „функцию тока“ $\psi(x, y)$ в виде

$$\psi(x, y) = \text{const} \cdot f(\sigma), \qquad \sigma = \varepsilon_0^{-1/3} \frac{y}{x}, \tag{5}$$

получаем из ((1а) (2) ((1б) удовлетворяется тождественно)

$$\begin{aligned} &gf(gf')' + (gf')'' = 0, && \text{а)} \\ &g = A_1 + B_1(gf') - (A_1 + B_1 - 1)(gf')^2, && \text{б)} \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{u_2\rho_2}{u_1\rho_1}\right), \tag{7}$$

$\bar{\rho}$, $\bar{\pi}$, $\bar{v}$ выражаются из равенств

$$\begin{aligned} &\frac{2\bar{\rho}\,\bar{\pi}}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} = f'(\sigma), \\ &-\frac{2\overline{\rho v}}{\rho_1 u_1 + \rho_2 u_2} = \varepsilon_0^{1/3}(f - \sigma f'), \\ &\frac{\pi}{u_1} = gf'. \end{aligned} \tag{8}$$

Условия (3), (4) переходят в

$$\begin{aligned} &\lim f'(\sigma) = 1 + \lambda, \quad \sigma \to \infty, \\ &f(0) = 0, \quad \lim f'(\sigma) = 1 - \lambda, \quad \sigma \to -\infty. \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\lambda = \frac{1 - \frac{u_2\rho_2}{u_1\rho_1}}{1 + \frac{u_2\rho_2}{u_1\rho_1}}. \tag{10}$$

Решение уравнения (6а) ищется в виде ряда

$$f = f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2. \tag{11}$$

Автор дает явное выражение для f_0, f_1, f_2 в терминах повторных интегралов от интеграла ошибки. Сравнения приближенного решения (11) с численным решением (6а) уже при трех членах в (11) дает удовлетворительные результаты (ошибка достигает нескольких процентов). Исключение составляют малые значения λ ($\leqslant 0{,}1$), так как предельное решение при $\lambda = 0$ дает зависимость

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \frac{\pi}{u_1},$$

противоречащую предположению (2). Н. Н. Яненко

5876. О колебаниях тела, плавающего в ограниченном объеме жидкости. Моисеев Н. Н., Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1958, вып. 1, 145—166

Твердое тело, ограниченное поверхностью произвольного вида, плавает на поверхности жидкости содержащейся в сосуде. Изучаются малые свободные колебания этого тела около положения равновесия—при учете образующихся при этом волн. Задача решается в рамках линейной теории волн. Для определения шести параметров, характеризующих движение тела, и определения вида поверхности жидкости составлена система интегро-дифференциальных уравнений. Подробное изучение свойств этих уравнений позволило определить частоты собственных колебаний системы и установить, что колебание тела, возникшее от начального возмущения, имеет вид почти периодических движений. В конце работы приводится обобщение рассмотренной задачи на случай многих тел, плавающих на поверхности жидкости, и даются соображения о действительном определении частот колебаний и о движении тел в условиях плоской задачи.

Л. Н. Сретенский

5877. Дифференциальные и интегральные уравнения упругих и упруго-пластических колебаний балок. Кабулов В. К., УзССР Фанлар Акад. ахборoти. Техн. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. техн. н., 1958, № 4, 47—57 (рез. узб.)

Для совместных продольных, поперечных и крутильных колебаний балок автор пользуется выражениями для перемещений точек поперечного сечения балки, предложенными Г. Ю. Джанелидзе (Тезисы докладов на Всесоюзном совещании по теории упругости, строительной механике и теории пластичности 7—10 декабря 1950 г., АН СССР, М.—Л., 1950), и, кроме того, учитывает влияние на прогиб изгибающих моментов и перерезывающих сил. При выводе уравнений упруго-пластических колебаний используются соотношения между напряжениями и деформациями в форме Генки. Следует заметить, что в процессе продольных, поперечных и крутильных колебаний элементы балок будут подвергаться сложному нагружению, для которого законность применения соотношений Генки является сомнительной. Г. С. Шапиро

5878. Крутильные колебания валов конической формы. Фельдман (Крутильні коливання валів конічної форми. Фельдман М. Р.), Прикл. механіка, 1958, 4, № 1, 105—111 (укр.; рез. русск.)

В первом параграфе исследуются крутильные колебания вала, представляющего собой усеченный конус длины l с радиусами оснований R_1 и R_2 и углом наклона α. Решение уравнения колебаний

$$a^2\left[r\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 4\operatorname{tg}\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] = r\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2},$$

где $r = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{l}x$, $a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, ищется в форме $\psi(x, t) = \Theta(x)\sin(pt + \varphi)$, где

$$\Theta = \frac{1}{r}\left[C_1\left(\sin kr + \frac{\cos kr}{kr}\right) + C_2\left(\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr\right)\right].$$

Трансцендентное уравнение для собственных частот приводится к виду:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2\frac{R_1R_2}{(R_2 - R_1)^2}}.$$

В работе даются таблицы первых двух собственных частот для различных значений отношения R_1/R_2. Во втором параграфе применяется метод начальных параметров для нахождения собственных частот крутильных колебаний вала, составленного из двух симметрично расположенных одинаковых усеченных конусов, соединенных основаниями большего радиуса R_2. Я. С. Уфлянд

5879. Поперечные колебания круглого стержня в переходном режиме вращения. Мосеенков (Поперечні коливання круглого стержня в перехідному режимі обертання. Мосеєнков Б. І.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 203—210 (укр.; рез. русск.)

Уравнение колебаний статически неуравновешенного круглого стержня в переходном режиме имеет вид:

$$\frac{EI}{m}\frac{\partial^4\xi}{\partial x^4}+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+2i\omega\frac{\partial\xi}{\partial t}-\omega^2\xi+i\frac{d\omega}{dt}\xi+$$

$$+\rho(x)\left(i\frac{d\omega}{dt}-\omega^2\right)=0,$$

где E — модуль Юнга, I — экваториальный момент инерции поперечного сечения, m — линейная плотность, $\xi(x,\ t)$ — смещение геометрического центра сечения, ω — частота колебаний, $\rho(x)$ — заданный закон изменения статической неуравновешенности. В работе приняты следующие граничные условия:

$$\xi\Big|_{x=0}=\xi\Big|_{x=l}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\Big|_{x=l}=0.$$

Построено приближенное решение задачи с помощью асимптотических методов Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. Я. С. Уфлянд

5880. О колебаниях прямоугольных плит. Кильчевский (Про коливання прямокутних платівок. Кільчевський М. О.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 16, 79—92 (укр.; рез. русск.)

Исследуются поперечные колебания прямоугольной плиты ($0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$) под действием произвольной нагрузки. Подвергая уравнение колебаний преобразованию Лапласа по времени, автор удовлетворяет обоим начальным условиям задачи. Применение к преобразованному таким образом уравнению второго преобразования Лапласа — по координате y приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка (по переменной x), причем одновременно удовлетворяются два заданных граничных условия на кромке $y=0$, а в правую часть упомянутого уравнения, кроме двойного преобразования внешней нагрузки, входят еще две неизвестные функции x (в частности, для случая закрепленного края $y=0$ это будут значения при $y=0$ второй и третьей производной по y от преобразованного по Лапласу прогиба плиты). Находя из граничных условий при $x=0$ и $x=a$ произвольные постоянные, входящие в общий интеграл уравнения четвертого порядка, автор приходит, таким образом, к решению поставленной задачи, точно удовлетворяющему граничным условиям на трех сторонах плиты. Попытка удовлетворить условиям на четвертой стороне ($y=b$) приводит к функциональным уравнениям относительно входящих в решение двух произвольных функций. В работе изложены соображения, касающиеся методов приближенного нахождения этих функций.

Я. С. Уфлянд

5881. О возмущениях, производимых при периодическом по времени закручивании, на поверхности сфероидальной полости. Чакраборти (On disturbances produced by a time—periodic twist on the surface of a spheroidal cavity. Chakraborty S. K.), Geofis. pura e appl., 1958, **40**, № 2, 15—18 (англ.)

Рассматривается задача о концентрации напряжений у малой удлиненной вдоль оси скручиваемого вала эллипсоидальной полости при задании тангенциальных перемещений (ω), единственно отличных от нуля, в форме

$$\omega=R(\alpha)S(\beta)e^{ipt},$$

где α и β — эллиптические координаты, взятые в плоскости меридиального сечения; $R^{(\alpha)}$ и $S^{(\beta)}$ — функции, определяемые подстановкой в дифференциальное уравнение движения теории упругости. На поверхности полости предполагается наличие касательных напряжений, обусловливающих кручение. В окончательной форме перемещения ω представлены разложением в бесконечный ряд по присоединенным полиномам Лежандра. Опечатки затрудняют ознакомление с работой.

К. В. Соляник-Красса

5882. О вариации постоянной Пуассона в решении задач теории упругости. Нопс (On the variation of Poisson's ratio in the solution of elastic problems. Knops R. J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1958, **11**, № 3, 326—350 (англ.)

Предлагается общий прием решения задач теории упругости: допустим, что данная задача просто решается при некотором конкретном значении постоянной Пуассона ν (это значение может и не лежать в физически допустимых пределах $-1<\nu<1/2$), тогда решение общей задачи сводится к определению соответствующей поправки. Никаких методов ее определения в сколько-нибудь общем случае не указывается, но некоторые конкретные задачи автор решает своим приемом; из них следует отметить задачу о напряжениях в теле, ограниченном двумя круглыми конусами с общей осью и общей вершиной и находящемся под действием сосредоточенной силы, приложенной к вершине.

С. Г. Михлин

5883. Об одной граничной задаче для бигармонического уравнения, встречающейся в теории упругости. Хрусталев А. Ф., Коган Б. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 241—247

Бигармоническое уравнение $\Delta^2\varkappa(r,z)=0$ интегрируется при граничных условиях

$$\sigma_r=\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\Delta\varkappa-\frac{\partial^2\varkappa}{\partial r^2}\right)=0,\ r=R,\ 0<z<+\infty, \tag{1}$$

$$\tau_{rz}=\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\Delta\varkappa-\frac{\partial^2\varkappa}{\partial z^2}\right]=0,\ r=R,\ -\infty<z<+\infty, \tag{2}$$

$$\alpha\sigma_r+\beta u=0,\ r=R,\ -\infty<z<0, \tag{3}$$

где $u=-\dfrac{1+\nu}{E}\dfrac{\partial^2\varkappa}{\partial r\partial z}$, α, β — положительные постоянные. В начале ищется формальное решение $\varkappa_0=e^{mz}\varphi(r)$, где m — комплексный параметр, а φ выражается линейно через $I_0(mr)$ и $I_1(mr)$. Затем удовлетворяется граничное условие (2) и строится решение

$$\varkappa(r,z)=\int\limits_{-i\infty}^{0-;\,+i\infty}\varkappa_0(r,z,m)\,dm.$$

Наконец, удовлетворяются и условия (1) и (3). Значение подынтегральной функции найдено в явном виде через мероморфную функцию И. Г. Альперина и линейную комбинацию функций Бесселя. Вычислены напряжения σ_r и τ_{rz}. Получена формула для σ_r при малых z и $r=R$. Отмечаются три случая выбора постоянных, соответствующих различным задачам о деформации цилиндра. И. С. Аржаных

5884. Пространственная задача теории упругости для неограниченного тела с плоским разрезом. Уфлянд Я. С., Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 192, 60—70

Рассматривается упругое равновесие неограниченного тела, ослабленного разрезом в виде полуплоскости. Нагрузки приняты в виде сосредоточенных сил, приложенных к границам разреза (отдельно рассмотрены симметричные и антисимметричные по отношению к плоскости разреза случаи приложения нормальных и касательных усилий). Задача решалась путем представления трех функций Папковича-Нейбера в виде двойных интегральных разложений, где ядрами служат функции Макдональда. В конечном итоге автору уда-

лось получить решение искомой задачи в элементарных функциях. В частности, если по краям разреза приложены симметрично две нормальные силы N на расстоянии a от ребра, то в полуплоскости, продолжающей разрез, возникают напряжения

$$\sigma = \frac{N}{\pi^2}\sqrt{\frac{a}{x}}\cdot\frac{1}{(x+a)^2+z^2}$$

(координата z направлена вдоль границы разреза).

В. И. Моссаковский

5885. **Решение осесимметричной задачи в эллиптических координатах. Соляник-Красса К. В.,** Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1958, № 196, 5—25

Хорошо разработанный аппарат плоской задачи теории упругости позволяет без труда решать задачи о концентрации напряжений вблизи отверстий различного очертания (в том числе эллиптического). Если требовать удовлетворение краевым условиям только на контуре отверстия и на бесконечности, то удается получить простые решения для отверстий, помещенных в балках при различных условиях нагружения и опирания. В ином положении находятся аналогичные задачи для осесимметричных деформаций тел вращения, при решении которых обычно используются функции напряжений Лява-Галеркина или Папковича-Нёйбера. Напряжения довольно сложным образом выражаются через третьи или вторые производные этих функций, в связи с чем функции напряжений приходится обычно определять подбором. Простейшие задачи о концентрации напряжений вблизи эллипсоидальной полости решены Нёйбером (Нёйбер Г., Концентрация напряжений, ОНТИ, 1947), референтом (Докл. АН СССР, 1947, 8, № 7, 1309—1312) и др. Автором было опубликовано представление интеграла осесимметричных уравнений теории упругости (Докл. АН СССР, 1952, 36, № 3, 481—484), в котором напряжения выражаются через первые производные от введенных им функций напряжений. Это дало возможность указать два простых условия на оси вращения и два простых условия на контуре осевого сечения тела, позволяющие определять все коэффициенты, входящие в задаваемые функции, до определения напряжений. В реферируемой работе решение автора используется для рассмотрения частных задач в эллипсоидальных координатах. Вначале получены известные решения об осевом сжатии продолговатого эллипсоида вращения и однополостного гиперболоида вращения. Далее найдены новые решения о концентрации напряжений у эллипсоидальной полости в равномерно сжатой радиальными силами плите, в плите, изгибаемой моментами, и в плите, изгибаемой равномерно-распределенной нагрузкой. Числовые результаты проиллюстрированы графиками. Отметим, что результаты автора могут быть использованы для решения задач о включениях, а также задач о полостях и включениях в сфере, конусе и т. п.

Г. С. Шапиро

5886. **Об одной динамичной задаче определения напряжений вблизи отверстия. Сидляр** (Про одну динамічну задачу визначення напруг поблизу отвору Сідляр. М. М.), Наук. зап. Київськ. ун-т, 1957, **16**, № 10, 103—116 (укр.; рез. русск.)

Рассмотрена задача определения напряжений вблизи круглого отверстия в пластинке достаточно больших размеров, находящейся под воздействием продольных переменных по времени усилий. Контур отверстия принимается свободным от внешних усилий. С помощью интеграла Мелина строится приближенное решение при условии, что размеры отверстия достаточно малы по сравнению с размерами пластинки. При этом концентрация напряжений на контуре отверстия для этой задачи оказывается в два раза больше концентрации статических напряжений.

В. И. Моссаковский

5887. **Очерки по проблемам краевых значений. Ч. III. Косые плиты в косых координатах. Эдман** (Studies of boundary value problems. Part III. Oblique plate in oblique co-ordinates. Ödman Sven T. A. Handl. Svenska forskningsinst. cement och betong, 1955, № 25, 27 pp.) (англ.)

См. РЖМех, 1959, 1721.

5888. **К задаче упруго-пластического изгиба балок. Амбарцумян С. А., Задоян М. А.,** Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, № 10, 130—132

Техническая теория изгиба балок основана на гипотезе плоских сечений и не учитывает влияния касательных напряжений на прогибы. Авторы, отказавшись от гипотезы плоских сечений, но исходя из линейного закона распределения нормальных напряжений в упругой зоне, ставят целью оценить влияние касательных напряжений на прогибы при упруго-пластическом изгибе балки прямоугольного сечения. Предполагается, что существуют лишь осевые нормальные напряжения $\sigma_x = \sigma(x, z)$ и касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau(x, z)$, а все остальные компоненты напряжений равны нулю; прогибы $W(x, z) = w(x)$. В пластической области, как известно, касательные напряжения $\tau = 0$, а нормальные напряжения $\sigma = \sigma_s$, где σ_s — предел текучести при растяжении. В чисто упругой области предполагается, что

$$\tau(x, z) = -f_e(x)\ (1 - z^2/h^2),$$

где $f_e(x)$ — неизвестная функция x. Отсюда, из условия равновесия для сил и выражения для продольного смещения произвольной точки балки

$$U(x, z) = \frac{1}{G}\int_0^z \tau(x, z)\,dz - z\frac{dw}{dx}$$

следует, что

$$\sigma(x, z) = -Ez\left(\frac{d^2w_e}{dx^2} + \frac{1}{G}\frac{df_e}{dx}\right) \text{ и } f_e(x) = -\frac{3}{2}\frac{N(x)}{F},$$

причем F—площадь поперечного сечения балки, $N(x)$—перерезывающая сила. Условия равновесия для моментов дает дифференциальное уравнение прогибов

$$\frac{d^2w_e}{dx^2} + \frac{1}{G}\frac{df_e}{dx} = -\frac{3}{4}\frac{M(x)}{Ebh^3}\ \left(\begin{matrix}2h\text{—высота, } 2b\text{—ширина}\\ \text{поперечного сечения}\end{matrix}\right). \quad (1)$$

В упруго-пластической зоне предполагается, что

$$\tau(x, z) = -f_p(x)(1 - z^2/\eta^2),$$

где $f_p(x)$ — неизвестная функция, а η — расстояние от нейтральной плоскости до упруго-пластической границы. Аналогичным образом получается дифференциальное уравнение прогибов

$$\frac{d^2w_p}{dx^2} + \frac{1}{G}\frac{df_p}{dx} = -\frac{\sigma_s}{\eta(x)}, \quad (2)$$

где $f_p(x) = -\frac{3}{2}\frac{N(x)}{F^*}$, F^* — площадь пластической зоны поперечного сечения. Интегрирование уравнений (1) и (2) дает решение задачи. На границе между чисто упругой и упруго-пластической зонами балки должны выполняться условия непрерывности для $w(x)$ и $dw(x)/dx$.

Г. С. Шапиро

5889. **О регулярных смещениях трубчатых твердых тел. Феррарезе** (Sugli spostamenti regolari dei solidi tubolari. Ferrarese Giorgio), Rend. mat. e applic., 1957, **16**, № 3-4, 352—362 (итал.)

При допущениях, аналогичных допущениям теории Кирхгофа для тонких стержней, выводятся с точностью до величин второго порядка малости (включительно) выражения составляющих тензора конечных деформаций тонкого стержня, искривленного в начальном состоянии.

Н. А. Ростовцев

5890. О равновесии упругих плоских пластинок. Боджо (Sull'equilibrio delle membrane elastiche piane. Boggio Tommaso), Ann. mat. pura ed appl., 1957, 44, 173—184 (итал.)

Дается метод решения второй основной задачи плоской теории упругости для случая, когда область конформно отображается на круг посредством рациональной функции. Как известно, задача в этом случае имеет решение в замкнутой форме (Мусхелишвили Н. И., „Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4-е, АН СССР, 1954, 490—492; РЖМат, 1956, 5277К). Решение автора опирается на результаты его работ периода 1900—1911 гг. (см. библиографию в названной книге, стр. 638, а также ссылку на стр. 238). По этому методу решение данной задачи приводится к двукратному решению задачи Дирихле относительно промежуточных гармонических функций, через которые выражается искомая бигармоническая функция.

Н. А. Ростовцев

5891. Квадратная пластина, опертая в центре. Маццарелла (La piastra quadrata appoggiata al centro. Mazzarella Franco), Giorn. mat. Battaglini, 1957, 85, № 2, 188—196 (итал.)

Рассматривается упругая тонкая плита, имеющая форму квадрата со стороной $2a$, подпертая в центре ($x = y = 0$) и нагруженная равномерно распределенными усилиями заданной интенсивности p. Решение уравнения изгиба $\Delta^4 w = q/N$ ищется в виде суммы $w = w^0 + w_1$, где w_0 — частное решение, соответствующее заданной нагрузке и сосредоточенной реакции опоры:

$$w_0 = \frac{pr^4}{64N} - \frac{pa^2}{2\pi N} r^2 \ln r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а w_1 выбирается в виде бесконечного ряда гармонических полиномов, умноженных на линейную функцию. Разлагая величину w_0 в степенной ряд и удовлетворяя граничным условиям на контуре плиты, свободном от усилий и моментов, автор приходит к бесконечной системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов полиномов. Приведены результаты приближенного численного расчета для случая четырех неизвестных коэффициентов.

Я. С. Уфлянд

5892. Некоторые вопросы устойчивости оболочек в большом. Ворович И. И., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 1, 37—40

Методами нелинейного функционального анализа изучается задача об устойчивости заделанной оболочки для случая, когда внешние силы, воздействующие на оболочку, пропорциональны некоторому числовому параметру λ. Предполагается, что оболочка задана уравнением $r = r(\alpha, \beta)$, где $(\alpha, \beta) \in \bar{\Omega}$, $r(\alpha, \beta)$ дважды непрерывно дифференцируема в Ω, граница области Ω, являющейся ограниченной областью плоскости α, β, состоит из конечного числа гладких дуг. Задача об устойчивости в нелинейной (упрощенной по способу Х. М. Муштари) постановке приводится к определению числа $n(\lambda)$ решений следующей нелинейной краевой задачи (н.к.з.):

$$B\left\{\frac{1}{AB}\left[(Bu)_\alpha + (Av)_\beta\right]\right\}_\alpha + \frac{1-\sigma}{2} A\left\{\frac{1}{AB}\left[(Au)_\beta - (Bv)_\alpha\right]\right\}_\beta + \frac{1-\sigma}{R_1 R_2} ABu = -\left(\frac{Bw}{R_1} + \frac{Bw_\alpha^2}{2A^2}\right)_\alpha - \sigma\left(-\frac{Bw}{R_2} + \frac{w_\beta^2}{2B}\right)_\alpha - \left[\frac{A(1-\sigma)}{2}\left(\frac{2w}{R_{12}} + \frac{w_\alpha w_\beta}{AB}\right)\right]_\beta - \frac{A_\beta}{2}(1-\sigma)\left(\frac{2w}{R_{12}} + \frac{w_\alpha w_\beta}{AB}\right) + B_\alpha\left[-\frac{w}{R_2} + \frac{w_\beta^2}{2B^2} + \sigma\left(-\frac{w}{R_1} + \frac{w_\alpha^2}{2A^2}\right)\right]; \quad (1)$$

$$A\left\{\frac{1}{AB}\left[(Av)_\beta + (Bu)_\alpha\right]\right\}_\beta + \frac{1-\sigma}{2} B\left\{\frac{1}{AB}\left[(Bv)_\alpha - (Au)_\beta\right]\right\}_\alpha + \frac{1-\sigma}{R_1 R_2} ABv = -\left(-\frac{Aw}{R_2} + \frac{Aw_\beta^2}{2B^2}\right)_\beta - \sigma\left(-\frac{Aw}{R_1} + \frac{w_\alpha^2}{2A}\right)_\beta - \left[\frac{B(1-\sigma)}{2}\left(\frac{2w}{R_{12}} + \frac{w_\alpha w_\beta}{AB}\right)\right] - \frac{B_\alpha}{2} \times (1-\sigma)\left(\frac{2w}{R_{12}} + \frac{w_\alpha w_\beta}{AB}\right) + A_\beta\left[-\frac{w}{R_1} + \frac{w_\alpha^2}{2A^2} + \sigma\left(-\frac{w}{R_2} + \frac{w_\beta^2}{2B^2}\right)\right]; \quad (2)$$

$$AB\nabla^4 w - \frac{1}{E_2}\left\{T_1\left[\frac{AB}{R_1} + \frac{A_\beta w_\beta}{B} + B\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\alpha\right] + T_2\left[\frac{AB}{R_2} + \frac{B_\alpha w_\alpha}{A} + A\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\beta\right] - 2S\left(\frac{AB}{R_{12}} + \frac{A_\beta w_\alpha}{A} + \frac{B_\alpha w_\beta}{B} - w_{\alpha\beta}\right)\right\} = -\frac{\lambda}{E_2}\left\{T_1'\left[\frac{A_\beta w_\beta}{B^2} + B\left(\frac{w_\alpha}{A}\right)_\alpha\right] + T_2'\left[\frac{B_\alpha w_\alpha}{A^2} + A\left(\frac{w_\beta}{B}\right)_\beta\right] - 2S'\left(\frac{A_\beta w_\alpha}{A} + \frac{B_\alpha w_\beta}{B} - w_{\alpha\beta}\right) - w_\alpha BX - w_\beta AY\right\}; \quad (3)$$

$$u \mid \Gamma_\Omega = v \mid \Gamma_\Omega = 0; \quad (4)$$

$$w\Big|_{\Gamma_\Omega} = \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_\Omega} = 0, \quad (5)$$

здесь u, v, w — перемещения точек срединной поверхности оболочки, A, B — коэффициенты ее первой формы; $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R_{12}}$ — кривизны оболочки; T_1', T_2', S' — тангенциальные усилия в безмоментном напряженном состоянии при $\lambda = 1$. Предполагается, что при любых w, удовлетворяющих граничным условиям (5), имеет место соотношение

$$I' = \int_\Omega \left(T_1'\frac{w_\alpha^2}{A^2} + T_2'\frac{w_\beta^2}{B_2} + 2S'\frac{w_\alpha w_\beta}{AB}\right) AB\, d\alpha d\beta \geqslant 0$$

и из $I' = 0$ вытекает $w \equiv 0$. Линейная краевая задача, которая получается из (1) — (5), если ее линеаризовать относительно w, обозначается через л.к.з. Через $\lambda_н$ обозначен infimum тех λ, при которых $n(\lambda) > 1$, через $\lambda_э$ — наименьшее собственное число л.к.з. Через λ_y обозначено наименьшее число, обладающее тем свойством, что при всех $\lambda > \lambda_y$ наряду с безмоментной формой равновесия оболочка обладает по меньшей мере одной моментной с более низким уровнем потенциальной энергии системы. Детально изучаются спектры л.к.з. и н.к.з. Приведем некоторые результаты. Всегда $\lambda_н \leqslant \lambda_y \leqslant \lambda_э$. Для случая пластины $\lambda_н = \lambda_y = \lambda_э$, это является обоснованием метода линеаризации при решении задач устойчивости для пластин. Каждому уровню потенциальной энергии пластины после потери устойчивости соответствует счетное число собственных функций н.к.з. (соответствующие собственные числа неограниченно возрастают и все они больше $\lambda_э$). Указаны достаточные условия, при которых $\lambda_y < \lambda_э$. Изучаются точки бифуркации н.к.з. В конце статьи обсуждается вопрос о степени реальности каждой формы равновесия. Автор указывает общую схему привлечения вероятностных соображений для решения этого вопроса.

М. А. Красносельский

5893. Погрешность прямых методов в нелинейной теории оболочек. Воровичи И. И., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 2, 196—199

Методами нелинейного функционального анализа обосновывается применимость методов типа Бубнова-Галеркина (в вариантах, предложенных П. Ф. Папковичем и Х. М. Муштари) приближенного решения нелинейной краевой задачи, описывающей при некоторых условиях большие деформации оболочки (см. статью автора, РЖМат 1958, 7790). Доказана разрешимость уравнений. из которых определяются приближенные решения. Множество приближенных решений компактно в соответствующем функциональном пространстве; каждый предел последовательных приближений является решением основной нелинейной краевой задачи. Указаны достаточные условия, при которых некоторое фиксированное решение нелинейной краевой задачи (теорема единственности в общем случае заведомо не имеет места!) может быть получено как предел последовательно отыскиваемых по методу Бубнова-Галеркина приближений. Указаны оценки быстроты сходимости, основанные на общей теореме референта о равносходимости метода Бубнова-Галеркина и ряда Фурье решения нелинейного операторного уравнения, на устанавливаемых автором теоремах о гладкости решений нелинейной краевой задачи и на теоремах И. Ю. Харик о быстроте сходимости рядов Фурье гладких функций. Отмечено, что аналогичные результаты справедливы и для варианта П. Ф. Папковича-В. З. Власова приближенного решения нелинейных уравнений теории оболочек. М. А. Красносельский

5894. Математическое обоснование невозможности расчета тороидальной оболочки по безмоментной теории. Морозова Е. А., Вестн. Моск. ун-та, 1957, № 5, 7—12

Известно, что безмоментная теория, вообще говоря к расчету торообразных оболочек неприменима, так как в окрестности регулярных особых точек коэффициентов дифференциального уравнения, описывающего безмоментное напряженное состояние тора, решения для усилий и перемещений могут не иметь физического смысла. Однако для частных видов внешней и краевой нагрузки можно установить необходимые и достаточные условия реализации безмоментного напряженного состояния в торообразной оболочке, что было выполнено Ш. С. Мецховришвили (см. РЖМех., 1958, 13017). В реферируемой работе построен весьма частный вид внешней нагрузки, для которой расчет тора по безмоментной теории в функциях класса C^1 неосуществим. В. Я. Павилайнен

5895. Тепловые напряжения при охлаждении шара. Мелан (Wärmespannungen bei der Abkühlung einer Kugel. Melan Ernst), Acta phys. austriaca, 1956, 10, № 1-2, 81—86 (нем.)

Решается задача о распределении напряжений в однородном шаре радиуса c, нагретого до температуры T_0, боковая поверхность которого затем поддерживается при нулевой температуре. Предполагается, что тепловые и упругие характеристики шара не зависят от температуры. Л. Н. Слободецкий

5896. Аналогия между математической теорией электромагнетизма и теорией упругости. Малиновский, Мак-Маллен (Analogies in the mathematics of electromagnetic theory and elasticity theory. Malinowski Stanley, McMullen Charles W.), Proc. Nat. Electronics Conf. Vol. 13. Chicago, Nat. electronics Conf., Inc., 1958, 280—286 (англ.)

Динамические уравнения теории упругости изотропного тела записаны с помощью трех новых векторов

$$\mathbf{P} = \operatorname{grad} f + \operatorname{rot} u,$$

$$\mathbf{Q} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u,$$

$$\mathbf{R} = \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Сопоставление полученных уравнений с уравнениями Максвелла приводит к выводу о следующем соответствии:

Электродинамика	Теория упругости
B	**P**
H	μ**P**
D	ρ**R**
E	**R**
I	**Q**
ε_0	ρ
μ_0	$1/\mu$

Отмечается также аналогия и в граничных условиях. И. С. Аржаных

5897. О теоремах взаимности в теории электромагнетизма. Лугарези (Su alcuni teoremi di reciprocità dell'elettromagnetismo. Lugaresi Erminia), Boll. Unione mat. ital., 1957, 12, № 3, 443—445 (итал.; рез. англ.)

Автор показывает, что в случае полей, гармонически зависящих от времени, теоремы взаимности Николау (Nicolau E., Bul. ştiinţ. Acad. R. P. R. Sec. mat. şi fiz., 1952, 4, 739—749):

$$\operatorname{div}([E_1 H_2] + [E_2 H_1]) + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon (E_1 E_2) + \mu (H_1 H_2)) = 0,$$

$$\operatorname{div}([\varepsilon E_1 E_2] + [\mu_1 H_1 H_2]) + \mu\varepsilon \frac{\partial}{\partial t}((E_2 H_1) - (H_2 E_1)) = 0$$

переходят в лемму Лоренца:

$$\operatorname{div}([E_1 H_2^*] + [E_2^* H_1]) = 0, \quad \operatorname{div}([\varepsilon E_1 E_2^*] + [\mu H_1 H_2^*]) = 0.$$

М. А. Гинцбург

5898. Распространение электромагнитных волн в периодической структуре из проводящих пластин. Колпаков В. В., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 2, 3—7

Исследуется распространение электромагнитных волн в бесконечной периодической структуре, состоящей из слоев диэлектрика, разделенных тонкими проводящими пластинами. Задача решается с помощью приближенных граничных условий, полученных в работе. Пусть τ — толщина пластин; ε_1, μ_1, σ_1; ε_2, μ_2, $\sigma_2 = 0$ — электромагнитные параметры материала пластин и диэлектрика; k и $\varkappa$ — волновые числа, $k^2 = \omega^2 \varepsilon_2 \mu_2$, $\varkappa^2 = \omega^2 \varepsilon_1 \mu_1 - i\mu_1\sigma_1\omega$. Разлагая поля по степеням малого параметра $\beta = k/\varkappa$ и предполагая, что $\tau\varkappa \ll 1$, автор устанавливает приближенные граничные условия для тангенциальных составляющих электромагнитного поля на поверхности пластины. Для пластины, ограниченной плоскостями $x = 0$ и $x = \tau$, эти условия запишутся в виде

$$E_y(o, y, z) = E_y(\tau, y, z) = -\frac{1}{R}\left[H_z(\tau, y, z) - H_z(o, y, z)\right],$$

$$E_z(o, y, z) = E_z(\tau, y, z) = \frac{1}{R}\left[H_y(\tau, y, z) - H_y(o, y, z)\right]. \quad (1)$$

Далее автор исследует распространение электромагнитных волн в данной структуре с пластинами, параллельными плоскости YOZ. Пусть толщина пластин τ много меньше периода структуры b, электрическое поле имеет лишь одну компоненту $E_y = E(x, z)$, а направление распространения волны перпендикулярно оси OY и составляет угол θ с осью OZ, тогда согласно теореме Блоха функция $E(x, z)$ должна иметь вид

$$E(x, z) = u(x)\, e^{i\gamma(x \sin\theta + z\cos\theta)},$$

где $u(x)$ — периодическая функция x с периодом b, а γ — постоянная распространения волны в данном направлении. Используя граничные условия на поверхности пластин, автор получает дисперсионное уравнение относительно γ

$$\cos \alpha b - \cos \gamma b \sin \theta - \frac{ikwy}{2} \frac{\sin \alpha b}{\alpha} = 0, \qquad (2)$$

где

$$\alpha = \sqrt{k^2 - \gamma^2 \cos^2 \theta}, \quad w = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}.$$

Для волн, распространяющихся вдоль оси z ($\theta = 0$) уравнение (2), принимает вид

$$\cos b\sqrt{k^2 - \gamma^2} - 1 - i \frac{kwy}{2} \frac{\sin b\sqrt{k^2 - \gamma^2}}{\sqrt{k^2 - \gamma^2}} = 0. \qquad (3)$$

Исследуются некоторые решения уравнений (2) и (3).

Д. П. Костомаров

5899. Отражение плоской электромагнитной волны от периодической структуры из проводящих пластин. Колпаков В. В., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 2, 8—12

С помощью метода функциональных уравнений решается задача об отражении плоской электромагнитной волны от периодической структуры, состоящей из плоских слоев диэлектрика без потерь, разделенных тонкими проводящими пластинами. Пусть слои диэлектрика и пластины параллельны плоскости YOZ, причем одна из пластин совмещена с плоскостью $x = 0$. Система предполагается неограниченной в направлении осей x и y, в направлении оси z она ограничена плоскостями $z = 0$ и $z = e$, причем плоскость $z = e$ является идеально проводящей. Предположим, наконец, что период структуры b много больше толщины пластин τ. На эту структуру из полупространства $z < 0$ падает плоская электромагнитная волна, направление распространения которой перпендикулярно оси y и составляет угол θ_0 с осью z. Волна поляризована так, что электрический вектор имеет лишь одну компоненту $E_y = E(x, z)$. В силу периодичности структуры будем иметь

$$E(x + nb, z) = e^{ink_0 \sin\theta_0} E(x, z)$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, -\infty < z < l),$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$. Потому $E(x, z)$ можно представить в виде

$$E(x, z) = \int_C e^{iwz} \frac{e^{ibk_0 \sin\theta_0} \sin \alpha_0 x + \sin \alpha_0 (b - x)}{\sin \alpha_0 b} G(w)\, dw,$$
$$z < 0,$$

$$E(x, z) = \int_C e^{iwz} \frac{e^{ibk_0 \sin\theta_0} \sin \alpha x + \sin \alpha (b - x)}{\sin \alpha b} G(w)\, dw,$$
$$z > 0,$$

здесь

$$\alpha_0 = (k_0^2 - \omega^2)^{1/2}, \quad \alpha = (k^2 - w^2)^{1/2}, \quad k = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} = 2\pi/\lambda$$
$$E(0, z) = g(z) = \int_C e^{i\omega z} G(w)\, dw,$$

C — некоторый контур на плоскости комплексного переменного w. Функция $G(w)$ и вид контура интегрирования определяются с помощью метода функциональных уравнений, развитого в работах Фока и Вайнштейна из условий:

$$E(x, l) = 0, \qquad (1)$$
$$H_z(nb + 0, z) - H_z(nb - 0, z) = 0, \quad z < 0, \qquad (2)$$
$$\frac{1}{R}\left[H_z(nb + 0, z) - H_z(nb - 0, z)\right] = E_y(nb + 0, z) =$$
$$= E_y(nb - 0, z), \quad z > 0, \qquad (3)$$

где $R = (\sigma_1 - i\omega\varepsilon_1)\tau$.

Условие (3) есть приближенное граничное условие для тонких пластин, полученное автором реф. 5898).

Д. П. Костомаров

5900. К теории лампы бегущей волны с учетом радиальных колебаний электронов. Блиох П. В., Каганов М. И., Радиотехн. и электроника, 1958, 3, № 9, 1172—1181

Исследуется влияние радиальных колебаний электронов в лампе бегущей волны на ее основные характеристики. Пусть вдоль оси волновода, нагруженного анизотропным диэлектриком, проходит электронный пучок, полностью заполняющий волновод. Система уравнений, описывающая взаимодействие релятивистского электронного пучка с электромагнитным полем, имеет вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\check{\varepsilon}\mathbf{E}) + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v},$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0, \qquad (1)$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\check{m}\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\,\mathbf{H}]\right).$$

Здесь $\check{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической постоянной с главными значениями $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_z$, $\varepsilon_{rr} = \varepsilon_r$, $\check{m}$ — условный тензор массы с главными значениями $m_{zz} = m_z$, $m_{rr} = m_r$. Введение тензора массы позволяет во всех формулах осуществить предельный переход от случая, когда радиальные колебания присутствуют наравне с осевыми ($m_r = m_z = m$), к обычно рассматриваемому случаю, когда радиальные колебания отсутствуют ($m_r = \infty$, $m_z = m$). Полагая $\rho = \rho_0 + \rho_1$, $v = v_0 + v_1$, где ρ_0 и v_0 — стационарные значения плотности и скорости, а ρ_1 и v_1 — малые возмущения, авторы линеаризуют систему (1) и ищут аксиально симметричные решения типа TM с зависимостью от t и z в виде $e^{i(\omega t - \gamma z)}$. При этом величины ω и γ оказываются связанными следующим дисперсионным уравнением

$$(u_r^2\gamma^2 - \omega^2 + \Omega_r^2)\left[\Omega_z^2 - (\omega - \gamma v_0)^2\right] - \gamma_r^2 u_z^2\left[(\omega - \gamma v_0)^2 - \right.$$
$$\left. - \Omega_r^2\left(1 - \frac{v_0^2}{u_r^2}\right)\right] = 0. \qquad (2)$$

Здесь

$$u_r^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_r}, \quad u_z^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_z},$$
$$\Omega_r^2 = \frac{4\pi\rho_0 e}{m_r\varepsilon_r}\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad \Omega_z^2 = \frac{4\pi\rho_0 e}{m_z\varepsilon_z}\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{3/2},$$

γ_r — радиальное волновое число, определяемое из граничнгоо условия на стенках волновода. Графический

анализ уравнения (2) позволяет установить ряд физических характеристик явлений. Д. П. Костомаров

5901. Об уравнениях движения электромагнитного диполя. Аржаных И. С., УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1958, № 5, 5—8 (рез. узб.)

Функция Лагранжа электрического диполя может быть записана в виде

$$L = Mc^2\left[1-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\right] + p\left\{\frac{1}{c}\left[\left(v, \frac{dA}{d\xi}\right) + (\dot{3}, A)\right] - \frac{d\varphi}{d\xi}\right\}, \quad (1)$$

где M — масса, p — момент диполя, ξ — единичный вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному, $\frac{d}{d\xi} = \left(\xi, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. Учитывая наличие связи $\xi^2 = 1$, автор составляет уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{3}} - \frac{\partial L}{\partial \xi} = p\xi,$$

из которых получает уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\frac{Mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \varepsilon\left(E + \frac{1}{c}[v, H]\right) + \frac{p}{c}[\dot{3}, H], \quad (2)$$

где $\varepsilon = p\left(\xi, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — операторный заряд, и уравнение, определяющее реакцию связи

$$-p\left(E + \frac{1}{c}[v, H]\right) = P\xi. \quad (3)$$

Из уравнений (2) и (3) вытекает соотношение

$$\frac{du}{dt} = -p\left(\xi, \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{1}{c}\left[v, \frac{\partial H}{\partial t}\right]\right),$$

характеризующее излучение или поглощение энергии диполем,

$$u = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - p(E, \xi).$$

Аналогичные рассмотрения проводятся для магнитного диполя и для системы электрических и магнитных диполей. При этом получено выражение, характеризующее излучение или поглощение энергии системой диполей. Д. П. Костомаров

5902. Краевые задачи в курсе теоретических основ электротехники. Алехин В. М., Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1958, № 4, 109—121

Сообщение об опыте изложения теории электромагнитного поля в Новочеркасском политехническом институте. Новых результатов не содержит.

М. И. Клиот-Дашинский

5903. О магнитных полях, свободных от сил. Чандрасекхар, Вольтьер (On force-free magnetic fields. Chandrasekhar S., Woltjer L.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1958, **44**, № 4, 285—289 (англ.)

Магнитным полем, свободным от сил (force-free), называется поле H, для которого сила Лоренца $L = [j, H] = 0$, где j—токи в области поля. В силу уравнений Максвелла, в этом случае $\mathrm{rot}H = \alpha H$, где α — некоторая функция, удовлетворяющая лишь условию $(\mathrm{grad}\,\alpha, H) = 0$. Обычно принимают, что $\alpha = \mathrm{const}$. Доказываются утверждения: 1. В области высокоионизованной материи (плазмы) состояние максимума магнитной энергии для заданной плотности тока может существовать в стационарном состоянии только, если магнитное поле свободно от сил с $\alpha = \mathrm{const}$. 2. В области плазмы с заданным количеством магнитной энергии состояния минимума диссипации описываются уравнением $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,H = \alpha^2 H$ ($\alpha = \mathrm{const}$). Магнитные поля свободные от сил, удовлетворяют этому условию.

Ю. Н. Днестровский

5904. Замечание об одном классе точных решений в магнитной гидродинамике. Линь (Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. Lin C. C.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1958, **1**, № 5, 391—395 (англ.)

Рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики для проводящей несжимаемой вязкой жидкости:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\mu}{4\pi\rho}H_j\frac{\partial H_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \nu\Delta v_i, \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0;$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial H_i}{\partial x_j} - H_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \eta\Delta H_i, \quad \frac{\partial H_k}{\partial x_k} = 0;$$

$$\eta = (4\pi\mu\sigma)^{-1}; \quad \rho\Pi = p + \mu H^2/8\pi.$$

Здесь $i = 0, 1, 2$; μ, ν, σ — соответственно магнитная проницаемость, кинематическая вязкость и электропроводность жидкости. Ищется класс решений, для которого скорость, магнитное поле и градиент давлений произвольно зависят от x_0 и времени, но линейно зависят от двух других координат x_α ($\alpha = 1, 2$):

$$v_0 = u_0(x_0, t); \quad v_\alpha = u_\alpha(x_0, t) + u_{\alpha\beta}(x_0, t)\,x_\beta;$$

$$H_0 = h_0(x_0, t); \quad H_\alpha = h_\alpha(x_0, t) + h_{\alpha\beta}(x_0, t)\,x_\beta;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_0} = \tilde{\omega}_0(x_0, t); \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} = \tilde{\omega}_\alpha(x_0, t) + \tilde{\omega}_{\alpha\beta}(x_0, t)x_\beta.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_0}\right) = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha}\right),$$

то

$$\Pi = \frac{1}{2}\tilde{\omega}_{\alpha\beta}(t)\,x_\alpha x_\beta + \tilde{\omega}_\beta(t)\,x_\beta + \tilde{\omega}(x_0, t).$$

При этом основная система сводится к системе уравнений для 15 неизвестных функций u_0, h_0, $\tilde{\omega}_0$, u_α, $u_{\alpha\beta}$, h_α, $h_{\alpha\beta}$, зависящих от двух переменных. Эта система и есть основной результат заметки. Указывается, что с помощью этой системы Петером Готтлибом в пока еще не опубликованной работе решена задача о течении проводящей вязкой жидкости вблизи критической точки (точки остановки потока) в двумерном и аксиально симметричном случаях с магнитным полем, параллельным границе обтекаемого тела. Этот пример интересен для рассмотрения магнитного поля конвекционных токов земного ядра. Затем указывается ряд других проблем, которые могут быть рассмотрены с помощью полученных уравнений. Г. С. Голицын

5905. О скорости волн во вращающихся диэлектрических телах. Крупи (Sui fronti d'onda nei corpi girevoli intorno ad un asse fisso. Crupi Giovanni), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 1, 100—104 (итал. рез. англ.)

С помощью уравнений Максвелла во вращающейся системе координат показано, что скорость распространения электромагнитных волн в такой системе равна

$$a = n\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} + \left(1 - \frac{1}{\mu\varepsilon}\right)\omega r\cos\vartheta,$$

где c — скорость света в вакууме в инерциальной системе, n — нормаль к фронту волны в инерциальной системе, ε и μ — диэлектрическая постоянная и магнитная проницаемость вращающегося тела, ω — угловая частота вращения, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор от центра вращения в точку наблюдения, ϑ — угол между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$.

Ю. Н. Днестровский

5906. О принципе максимума для дифференциального уравнения теплопроводности. I. Адлер, Фрёйд (A hővezetés differenciálegyenletének maximum elvéről. I. I. Adler György, Freud Géza), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 157—165 (венг.; рез. русск., франц.)

Доказываются следующие две теоремы:

Теорема I. Пусть при $0 \leqslant t \leqslant T$ функция $V(x, y, t)$ удовлетворяет в области R плоскости (x, y), ограниченной кривой Жордана S, уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = a^2(x, y, t)\,\frac{\partial V}{\partial t} \quad (a(x, y, t) > 0), \qquad (1)$$

а на открытом подмножестве S^* границы S — граничному условию $\partial V/\partial n = 0$, где n — обозначает внутреннюю нормаль. Связные компоненты множества S^* состоят из аналитических дуг. Пусть далее $V(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению (1) на S^* и непрерывна на всей S. Тогда $V(x, y, t)$ может достигать своего максимума лишь на подмножестве $S - S^*$ границы S или в момент времени $t = 0$.

Теорема II. Пусть при $0 < t \leqslant T$ функция $V(x, y, z, t)$ удовлетворяет в ограниченной области R пространства (x, y, z) уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = a^2\,\frac{\partial V}{\partial t}, \quad a^2 > 0, \text{ const}, \qquad (2)$$

а на открытом подмножестве S^* границы S области R — граничному условию $\partial V/\partial n = 0$. Пусть S^* состоит из конечного числа поверхностей Ляпунова. Предположим, что V непрерывна на всей S, а $\operatorname{grad} V$ непрерывен и ограничен на S^*. Тогда $V(x, y, z, t)$ может достигать своего максимума (минимума) лишь на подмножестве $S - S^*$ границы S или в момент времени $t = 0$. Доказательство теоремы I основано на теореме Римана о конформном отображении и на продолжении функции температуры через теплоизолированную границу. Доказательство теоремы II основано на одной идее Леви (Levi E. E., Ann. Math., 1908, **14**, 187—264) и может быть распространено на какое угодно число измерений.

Из резюме автора

5907. Смешанные краевые задачи для уравнений теплопроводности и диффузии. 2. Адлер (Hővezetési és diffúziós feladatok összetett peremfeltételekkel. II. Adler György), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 167—183 (венг.; рез. русск., франц.)

Рассматриваются две задачи для уравнения теплопроводности, возникающие при исследовании систем, состоящих из тепловых резервуаров и теплопроводных стержней. Математическая задача заключается в определении функций $U(t)$, $V_1(x, t)$ и $V_2(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \varkappa_1^2\,\dfrac{\partial V_1}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \varkappa_2^2\,\dfrac{\partial V_2}{\partial t} \end{cases} \qquad (1)$$

$$A\frac{dV}{dt} + B_1[U(t) - V_1(0, t)] + B_2[U(t) - V_2(0, t)] = Q(t) \qquad (2)$$

и условиям

$$\left.\frac{\partial V_1}{\partial x}\right|_{x=0} = -C_1[U(t) - V_1(0, t)],$$

$$\left.\frac{\partial V_2}{\partial x}\right|_{x=0} = -C_2[U(t) - V_2(0, t)], \qquad (3)$$

$$U(0) = U_0; \quad V_1(x, 0) = 0, \quad V_2(x, 0) = 0.$$

Решения для V_1 и V_2 ищутся в виде интегралов:

$$\begin{cases} V_1(x, t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{\varkappa_1^2 x^2}{4(t-\tau)}}\, W_1(\tau)\,d\tau, \\ V_2(x, t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\, e^{-\frac{\varkappa_2^2 x^2}{4(t-\tau)}}\, W_2(\tau)\,d\tau. \end{cases}$$

После подстановки этих выражений в уравнения (2) и (3) и применения к последним преобразования Лапласа получаем систему трех линейных уравнений для определения изображений. С помощью обратного преобразования были получены конечные выражения для U, V_1 и V_2. Проводится доказательство законности действий, произведенных при решении задач.

В. И. Беляев

5908. Некоторые задачи теплопроводности в твердых телах с переменными теплофизическими характеристиками. Страхович К. И., Инж.-физ. ж., 1958, **1**, № 3, 3—23

В случае, если процесс теплопроводности протекает изобарически (т. е. без изменения внутренних напряжений), уравнение теплопроводности можно записать в виде

$$\gamma\frac{di}{d\tau} = \lambda\Delta t, \qquad (1)$$

где i — удельная энтальпия, t — температура, γ — плотность, λ — коэффициент теплопроводности, а τ — время. В работе показано, что если i, λ и γ зависят только от температуры, подстановка

$$U = U_0 + \int_{t_0}^{t} \lambda\,dt$$

приводит уравнение (1) к виду

$$\varphi(U)\,\frac{\partial U}{\partial \tau} = \Delta U,$$

где $\varphi(U)$ определяется равенством

$$\varphi(U) = \gamma\frac{di}{dU},$$

причем предполагается, что i — известная функция температуры и $\dfrac{dU}{d\tau} \approx \dfrac{\partial U}{\partial \tau}$. Используя указанную подстановку, автор решает ряд частных задач для уравнения (1).

С. С. Дымков

5909. Тепловой поток в цилиндре. Рид (Heat flow in a cylinder. Reid Walter P.), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 2, 147—153 (англ.)

Ищется решение плоской задачи теории теплопроводности с центральной симметрией и граничными условиями вида

$$\sigma_1 u + \sigma_2\frac{\partial u}{\partial r} + \sigma_3\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma_4\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial r} = \sigma_5 g(t) \quad (t \neq 0),$$

где σ_l — постоянные. Решение представляется в виде ряда по специально выбранным функциям, для которых выводятся обобщенные условия ортогональности, а также соотношения, аналогичные интегралу Дюамеля. В качестве примера полученных соотношений дается фор-

мальное решение задачи о распределении температуры $u(r, t)$ в среде, заключенной в тонкую, хорошо проводящую тепло цилиндрическую трубку радиуса L, причем считается, что температура стенки трубки $w(t)$ постоянна по всему ее сечению в любой момент времени, а температура среды, окружающей трубку, изменяется по заданному закону $g(t)$. Эта задача сводится к решению уравнения

$$\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}$$

с условиями

$$u(r, 0)=f(r),$$

$$w(0)=W,$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial u(L, t)}{\partial r}=a[w(t)-u(L, t)],$$

$$h\frac{dw}{dt}=a[u(L, t)-w(t)]+b[g(t)-w(t)].$$

С. С. Дымков

5910. Теплопроводность в бесконечном стержне. II. **Ципсер** (Hővezetés vegtelen rúdban. II. Czipszer János), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1956, **1**, № 1-2, 185—192 (венг.; рез. русск., франц.)

Часть I см. РЖМат 1519.

В настоящей работе обобщаются теории А. Н. Тихонова (Матем. сб., 1935, **42**, № 199, 216) и Виддера (Widder D. V., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **55**, 85—95), относящиеся к следующей проблеме: при каких условиях в полосе $-\infty<x<+\infty$, $0\leqslant t<c$ однозначно определяется решение задачи с начальными условиями для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}=\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}. \qquad (1)$$

Эти обобщения могут быть сформулированы в виде трех теорем:

Теорема 1. Пусть функция $\alpha(x)$ имеет ограниченное изменение на каждом конечном интервале, а функция $u(x, t)$ определяется формулой

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\,d\alpha(y). \qquad (2)$$

Предполагается, что стоящий в правой части формулы (2) несобственный интеграл Стилтьеса существует при всяких x и $0<t<c$ ($u(x, t)$ — непрерывное решение). Предположим еще, что при всех x $\lim\limits_{t\to+0}u(x, t)=0$. Тогда $u(x, t)\equiv 0$.

Теорема 2. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два непрерывных неотрицательных решения уравнения (1) в полосе $0<t<c$. Если для всех „x“ пределы $\lim\limits_{t\to+0}u_1(x, t)$ и $\lim\limits_{t\to+0}u_2(x, t)$ существуют и равны, то $u_1(x, t)\equiv u_2(x, t)$.

Теорема 3. Предположим, что определенное в полосе $0<t<c$ непрерывное решение $u(x, t)$ уравнения (1) при некоторых постоянных m и M удовлетворяет условию

$$\left|\int_0^x|u(y, t)\,dy\right|\leqslant me^{Mx^2}\quad(0<t<c,\ -\infty<x<+\infty)$$

Если при всех x $\lim\limits_{t\to+0}u(x, t)=0$, то $u(x, t)\equiv 0$.

Резюме автора.

5911. Теплообмен между плоской пластинкой и жидкостью, содержащей источники тепла. Уайтман (Heat transfer between a flat plate and a fluid containing heat sources. Whiteman I. R.), Trans. ASME, 1958, **80**, № 2, 360—362 (англ.)

При предположении, что скорость жидкости вдоль пластинки $u=by$, задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial X}=\frac{1}{y}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{W}{Ky}\qquad\left(X=\frac{K}{b\rho C_p}x\right)$$

с граничными условиями

$$T(X, 0)=T_p(X),\qquad\lim_{y\to\infty}T(X, y)=0,$$

где x и y — расстояния соответственно вдоль и по нормали к поверхности пластинки, T — температура, W — интенсивность тепловых источников в жидкости, ρ — плотность жидкости, K — ее теплопроводность и C_p — теплоемкость при постоянном давлении. Методами операционного исчисления выводятся приближенные формулы, связывающие поток тепла q через поверхность пластинки с температурой на ней

$$q(X)=0{,}539\,K\int_0^X\frac{dT_p}{d\eta}(X-\eta)^{-1/3}\,d\eta-1{,}29\,X^{1/3}W,$$

$$T_p(X)=\frac{0{,}511}{K}\int_0^X(X-\eta)^{-2/3}\,q(\eta)\,d\eta+1{,}75X^{2/3}\frac{W}{K}.$$

С. С. Дымков

5912. Решение дифференциального уравнения теплообмена при ламинарном режиме движения жидкости в трубе. Масловский М. Ф., Тр. Моск. ин-та хим. машиностр., 1958, **15**, 3—23

Рассматривается решение стационарной задачи. Математическая задача заключается в определении решения $t(r, z)$ стационарного уравнения теплопроводности с учетом вынужденной конвенции

$$v(r)\frac{\partial t}{\partial z}=a^2\left(\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial t}{\partial r}\right)$$

с дополнительным условием $t(r, 0)=0$, условиями теплообмена на границе жидкость — стенка трубы и условием ограниченности решения при $r=0$ и $z\to\pm\infty$. Здесь $v=w\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$, w — средняя скорость потока, R — внутренний радиус трубы. Рассматриваются следующие условия теплообмена: а) когда на границе поддерживается постоянная температура $t_{ст}$ равная температуре стенки трубы, т. е.

$$t(z, r)|_{r=R}=t_{ст};$$

б) когда на границе тепловой поток q поддерживается постоянным, т. е.

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial r}\bigg|_{r=R}=q=\text{const},$$

где λ — коэффициент теплопроводности;

в) когда на границе имеет место теплообмен по закону

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial r}+\alpha(t-t_{ст.})=0\quad\text{при } r=R,$$

где λ — коэффициент теплопроводности, α — коэффициент теплоотдачи.

Решение поставленных задач в работе выполняется с помощью операционных методов. Температурные функции находятся приближенно и выражаются в критериальной форме. Оценки степени точности найденных решений в работе не приводятся. М. С. Ага

5913. Стационарное температурное поле в бесконечной доске, состоящей из многих слоев, с произвольным распределением температуры на краевых стенках. Клатил (Ustálené teplotní pole v nekonečné rovinné desce z více vrstev s obecným rozložením teploty na okrajových stěnách. Klátil Jiří), Aplikace mat., 1957, **2**, № 4, 258—278 (чешск.; рез. русск., франц.)

Исследуется распределение температуры в бесконечной доске, состоящей из любого числа слоев. Предполагается, что функции $f(x, j)$ и $f(x, y)$, выражающие распределение температуры на нижней и верхней сторонах доски, можно представить в виде интеграла Фурье по x для любого значения j. Работа является в некотором смысле обобщением более ранней работы автора (Klátil J., Českol. casop. fys, 1956, **6**, № 4), в которой он решает ту же задачу для двух слоев. M. Švec

5914. Односторонний контактный нагрев склеиваемой древесины. Бердинских И. П., Научн. тр. Укр. с.-х. акад., 1957, **9**, 359—374

Изучается распределение температуры $u = u(x, t)$ в склеиваемом пакете древесины, расположенном между двумя плитами горячего пресса. При этом предполагается, что нагревается только одна из плит. Другая плита имеет комнатную температуру. Математическая задача сводится к одномерному уравнению теплопроводности с начальным и краевым условиями

$$u|_{t=0} = u_0, \quad u|_{x=0} = \tau_1, \quad u|_{x=b} = \tau_2,$$

которое решается методом Фурье. В дальнейшем производится исследование полученного решения.

Л. Н. Слободецкий

5915. Масштабное рассмотрение планетарных движений в атмосфере. Бергер (Scale consideration of planetary motions of the atmosphere. Burger Alewyn P.), Tellus, 1958, **10**, № 2, 195—205 (англ.)

Все атмосферные процессы можно классифицировать по масштабам и скоростям движений, с которыми эти процессы связаны, и для каждого класса сделать определенные упрощения уравнений. Вводятся обозначения S и H, V и W соответственно для характерных горизонтальных и вертикальных масштабов и скоростей. Используя квазистатическое и геострофические соотношения и условия, что число Росби меньше единицы, а характерные масштабы меньше радиуса Земли a, из уравнения вихря скорости находится основное соотношение

$$\frac{W}{H} \sim \frac{V}{S}\left(\frac{V}{fS} + \frac{S}{a}\right),$$

где f — компонента параметра Кориолиса.

Полученное соотношение используется для анализа различных упрощений общего уравнения вихря, применяющихся при численных методах составления прогноза.

Б. Н. Трубников

5916. К проблеме Вика. Масленников М. В., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 59—62

Рассматривается стационарная задача о замедлении и диффузии нейтронов в бесконечной однородной изотропной среде, параметры которой не зависят от энергии нейтронов. Рассеяние предполагается упругим и изотропным в системе центра масс нейтрона и ядра, тепловое движение ядер и химические связи — пренебрежимо малыми, источники плоскопараллельной структуры сосредоточены в слое $0 \leqslant z \leqslant z_0$, спектр их заключен в пределах $0 \leqslant u \leqslant u_0$. Вполне строго решена задача определения асимптотики по u и z плотности столкновений $\psi(z, u, \mu)$, что дает возможность обосновать асимптотическую формулу для $\psi_0(z, u)$ (нулевого момента $\psi(z, u, \mu)$), полученную Виком. Получена оценка решения сверху. Исходным пунктом является преобразование Фурье-Лапласа основного уравнения для $\psi(z, u, \mu)$. Проведен тщательный анализ преобразованного уравнения и соответствующего однородного уравнения. Используются методы теории аналитических функций и функционального анализа.

Т. А. Гермогенова

5917. К теории диффузии излучения в полубесконечной среде. Минин И. Н., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 63—65

Найдена удобная для вычислений интегральная формула для функции $\Phi(\tau)$, определенной уравнением

$$\Phi(\tau) = K(\tau) + \int_0^\tau K(\tau - \tau')\,\Phi(\tau')\,d\tau',$$

где

$$K(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^1 e^{-\tau/\eta}\,\varphi(\eta)\frac{d\eta}{\eta},$$

а $\varphi(\eta)$ — решение уравнения

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\,\eta\varphi(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}\,d\zeta.$$

К отысканию $\Phi(\tau)$ сводится задача о свечении плоского слоя бесконечно большой оптической толщины при изотропном рассеянии и мощности источников, зависящей только от оптической глубины τ. Получена простая аналитическая формула для $\Phi(\tau)$ при $\tau \gg 1$. Приведена таблица значений $\Phi(\tau)$ для случая чисто рассеивающей среды ($\lambda = 1$).

Т. А. Гермогенова

5918. Диффузия излучения в плоском слое. Соболев В. В., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 69—72

Предлагается метод расчета резольвенты $\Gamma(\tau', \tau, \tau_0)$ интегрального уравнения

$$B(\tau, \tau_0) = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\tau_0} B(\tau', \tau_0)\,E_i(|\tau - \tau'|)\,d\tau' + g(\tau), \quad (1)$$

решение которого описывает поле излучения в плоском слое конечной оптической толщины τ_0 и связано с $\Gamma(\tau', \tau, \tau_0)$ соотношением

$$B(\tau, \tau_0) = g(\tau) + \int_0^{\tau_0} \Gamma(\tau', \tau, \tau_0)\,g(\tau')\,d\tau'.$$

Для функции $\Gamma(\tau', \tau, \tau_0)$ от двух переменных (τ_0 — параметр задачи) получено выражение через функцию $\Phi(\tau, \tau_0) \equiv \Gamma(0, \tau, \tau_0)$ — от одной переменной, которая определяется интегральным уравнением (1) при $g(\tau) = \frac{\lambda}{2}E_i(\tau)$. Получено также интегральное уравнение типа (1) для $p(\tau, \tau_0, \eta_i)$ — вероятности выхода кванта, рожденного на глубине τ, из среды под углом $\arccos \eta_i$ к нормали. Знание $\Phi(\tau, \tau_0)$ позволяет найти также и эту функцию.

Т. А. Гермогенова

5919. Об инвариантных и причинных решениях уравнений $(\Box \mp \varkappa^2)\,\Psi(r, t) = \delta^4(r, t)$. **Шмидт** (Über die invarianten und kausalen Lösungen der Differentialgleichungen $(\Box \mp \varkappa^2)\ \Psi\ (r, t) = \delta^4(r, t)$. Schmidt Helmut), Z. Phys., 1958, **151**, № 3, 365—374 (нем.)

Сравниваются решения уравнений

$$(\Box - \varkappa^2)\,\psi(r, t) = \delta^4(r, t) \quad (1)$$

и

$$(\Box + \varkappa^2)\,\psi(r, t) = \delta^4(r, t). \quad (2)$$

Показано, что среди инвариантных решений уравнения (1) есть решение, удовлетворяющее принципу причинности

$$\Delta_R(r, t) = \Delta_R(x) =$$

$$= \frac{-1-\varepsilon(t)}{2}\frac{-i}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty} d^4k e^{ikx}\delta(x^2+k^2)\,\varepsilon(k_0),$$

где $\varepsilon(t) \equiv t/|t|$, $d^4k = d^3f \cdot dk_0$,

в то время как для уравнения (2) это не имеет места. Под решением, удовлетворяющим принципу причинности, при этом понимается решение, равное нулю или быстро убывающее при $t<0$. Для уравнения (2) такое решение неинвариантно и имеет вид:

$$G_R = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(r\sqrt{x^2-u^2})}{r} e^{-|t|u} du & \text{для } t<0, \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(x\sqrt{x^2-u^2})}{r} e^{-|t|u} du - & \\ -\dfrac{2}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(r\sqrt{x^2+u^2})}{r}\sin tu\,du & \text{для } t>0. \end{cases}$$

Ю. Н. Днестровский

См. также: 5398, 5920, 5921, 5937К, 6005, 6298, 6299, 6300, 6302, 6203, 6204, 6306—6309

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

5920. Фундаментальная матрица системы вариационного типа для неограниченного пространства. Мельник (Фундаментальна матриця систем варіаційного типу для необмеженого простору. Мельник Д. П.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 6, 602—605 (укр.; рез. русск., англ.)

В n-мерном пространстве E_n точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ рассматривается самосопряженная система

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \qquad (1)$$

являющаяся системой Эйлера для функционала

$$\int_{E_n}\Phi(u, u)\,dx =$$

$$= \int_{E_n}\sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n\le s \\ l_1+\ldots+l_n\le s}} \frac{\partial^l u'}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}} A_{l_1,\ldots,l_n;k_1,\ldots,k_n}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}dx.$$

Здесь $A_{l_1,\ldots,l_n;k_1,\ldots,k_n}(x)$ — вещественные квадратные матрицы порядка p, $u' = u'(x)$ и $u=u(x)$ соответственно одностроčные и одноколонные матрицы порядка p.

Дается схема доказательства существования фундаментальной матрицы системы (1) при следующих условиях: пусть $F(x)$ — положительная функция, для которой $\int_{E_n}\frac{dx}{F(x)} < +\infty$, и $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — главная часть оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Тогда

$$|\det(A_0(x, i\alpha) + (-1)^s\lambda^{2s}E)| \ge$$
$$\ge \mu F(x)^p[|\alpha|^{2sp} + \lambda^{2sp}] \quad (\mu>0)$$

для каждого действительного $\alpha'(\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с достаточно большим λ, коэффициенты оператора $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывно дифференцируемы $2s+1$ раз, коэффициенты при производных порядка j $(0 \le j \le 2s-1)$ непрерывно дифференцируемы j раз, коэффициенты оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и производные до порядка $2s$ коэффициентов оператора $A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ имеют порядок $0(F(x))$ при $|x| \to +\infty$ и

$$\int_{E_n}\Phi(u, u)dx \ge$$
$$\ge C\int_{E_n}\sum_{k_1+\ldots+k_n=s}\frac{\partial^s u'(x)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\frac{\partial^s u(x)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}dx \quad (c>0).$$

Построение фундаментальной матрицы производится методом Е. Леви. С помощью фундаментальной матрицы показывается, что всякое $2s$ непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1), имеющее порядок $0(|x|^k)$ при $|x| \to +\infty$ тождественно равно нулю.

Л. Н. Слободецкий

5921. Приближенное решение дифференциальных уравнений вариационным методом. Даффин, Сербин (Approximate solution of differential equations by a variational method. Duffin R. J., Serbyn W. D.), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 2, 162—168 (англ.)

Рассматривается уравнение Штурма-Лиувилля

$$(py')' - qy = 0,$$
$$x \in [a, b],\ b < \infty,\ y(a) = y_1 \ge 0,\ y(b) = y_2 \ge 0. \qquad (1)$$

Соответствующий квадратичный функционал предполагается положительно определенным.

Доказывается теорема: Если $y(x)$ — решение (1), $v(x)$ и $w(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируемы, $v(b)=0$, $v>0$ для $x \in [a, b)$, $w(a)=0$, $w>0$ для $x \in (a, b]$, то для любого $x \in [a, b]$ справедлива оценка

$$y(x) \ge y^*(x) = y_1\exp\left(-\int_a^x p^{-1}v^{-2}\int_t^b [p(v')^2 + qv^2]\,dzdt\right) +$$
$$+ y_2\exp\left(-\int_x^b p^{-1}v^{-2}\int_a^t [p(w')^2 + qw^2]\,dzdt\right). \qquad (2)$$

Как следствие, доказываются оценки

$$I(x) = \int_x^b e^{g(z)}dz \ge J(x) =$$
$$= e^{g(x)}\left(v^{-2}\int_x^b\left[(v')^2 + \frac{(g'v)^2}{4} - \frac{g''v^2}{2}\right]dz - \frac{g'}{2}\right)^{-1}, \qquad (3)$$

и $$I'(x) < J'(x), \qquad (4)$$

где для $x \in [a, b)$ $v>0$, $v(b)=0$.

При надлежащем выборе функций v и w, входящих в оценки (2) — (4), функции y^* и j могут быть использованы для приближенного вычисления $y(x)$ и $I(x)$ соответственно.

В качестве примера рассматривается аппроксимация интеграла $\int_x^\infty e^{-z^2}\,dz$. Авторы полагают $v(x) = e^{kx}$, где константа k выбирается оптимальной для каждого фиксированного x. Е. Д. Гарбер

5922. Расчет дозвукового обтекания профиля Жуковского вариационным методом. Гисперт (Berechnung der Unterschallströmung um ein symmetrisches Joukowski — Profil mit Hilfe eines Variationsproblems. Gispert Hans-Günter), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle — Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe, 1957, **6**, № 5, 803—805 (нем.)

Бейтман (Bateman H., Proc. Roy. Soc., 1929, **A125**) показал, что двумерная задача дозвукового обтекания профиля баротропной жидкостью сводится к вариационной задаче. В применении к рассматриваемой автором задаче соответствующий функционал имеет вид

$$\iint\limits_B \left\{\left[1 - \frac{k-1}{2} M^2(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 - 1)\right]^{\frac{k}{k-1}} - 1\right\} dxdy,$$

где φ — потенциал скорости. Автор конформно отображает внешность профиля Жуковского на внутренность круга и представляет потенциал в виде $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1 — потенциал обтекания цилиндра несжимаемой жидкостью, а φ_2 — поправка, которая ищется в виде

$$f_1(\rho)\cos\upsilon + f_2(\rho)\cos 3\upsilon.$$

В результате подстановки двукратный интеграл обращается в однократный с неизвестными функциями $f_i(\rho)$ (при вычислениях возникают несобственные интегралы). Затем записываются уравнения Эйлера возникшей вариационной задачи. Полученные уравнения интегрируются методом конечных разностей. Рассмотрен числовой пример. И. С. Аржаных

5923. К вопросу о максимальной дальности полета летательного аппарата с СПВРД. Тарасов Е. В., Изв. высш. учебн. заведений. Авиац. техн., 1958, № 1, 53—60

Ракета с сверхзвуковым прямоточным воздушно-реактивным двигателем рассматривается как точка переменной массы, на которую действуют силы сопротивления ($C_y = 0$), веса и реактивная сила. Ставится задача о вычислении максимальной дальности полета, состоящей из отрезков активной и пассивной части. Записываются дифференциальные уравнения движения в проекциях на касательную и нормаль к траектории, причем за независимую переменную принимается высота полета. Составляется функционал, выражающий дальность полета, и ищется его максимум при условиях, выраженных уравнениями движения, и при интегральной связи, выражающей расход горючего. После ряда преобразований функционал варьируется при двух условиях, из которых одно представляет неголономную связь, а другое изопериметрическую связь. Полученные уравнения Эйлера приводятся к простому виду. Затем выясняются граничные условия из требования экстремальности дальности полета в предположении, что уравнения Эйлера проинтегрированы. А. С. Аржаных

5924 К. Инженерный подход к вариационному исчислению. Методы решения вариационных задач типа задач Майера. Чикала (An engineering approach to the calculus of variations. The techniques for the solution of voriational problemes in Mayer form. Cicala Placido. Torino, Ed. Levrotto e Bella, 1957, 104 p.— Litogr.) Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 677, 540 (англ.)

См. также: 5685

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

Редактор *В. В. Немыцкий*

5925. Периодические кривые с симметрическими свойствами. Андерссон (Periodiska kurvor med symmetriegenskaper. Andersson Josef), Elementa, 1958, **41**, № 3, 178—182 (шведск.)

5926. Об одном простом доказательстве теоремы Дерри. Приложение к поверке неравенства Коши для арифметического, геометрического и гармонического среднего. Хейман (Über einen einfachen Beweis eines Satzes von Dörrie. Anwendung zur Verifikation der Cauchyschen Ungleichung für das aritlimetische, geometrische und harmonische Mittel. Heymann O.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 2, 65-66 (нем.)

Методом индукции приводится доказательство следующего предложения: Если произведение n положительных чисел a_i, которые не все равны между собой, равно 1, то их сумма больше n. А. Г. Школьник

5927. Введение логарифмов. Монна (Die Einführung des Logarithmus. Monna A. F.), Euclides (Nederl.), 1955, **30**, 88—96 (нем.)

$\log x$ для $x > 1$ определяется как мера Хаара интервала $(1, x)$ в мультипликативной группе положительных действительных чисел. H. D. Kloosterman.

Перевод из Zbl. Math., 1956, **64**, № 1-5, 64

5928. О многомерных симметричных дельта-функциях. Гандин Л. С., Соловейчик Р. Э., Зап. Ленингр. горн. ин-та, 1958, **36**, № 3, 13—15

Авторы вводят функцию $\delta_n(\rho)$, описывающую действие точечной особенности в n-мерном пространстве R как функцию радиуса ρ. Сравнивая равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_1(x)dx = 1 \qquad \text{и} \qquad \int\limits_{R_n} \delta_n(\rho)dv = \int\limits_{\Omega_n}\int\limits_0^\infty \delta_n(\rho)\rho^{n-1}d\rho d\omega = 1$$

они выводят, что $\delta_n(\rho) = 2\Omega_n^{-1}\rho^{1-n}\delta_1(\rho)$.

В качестве примера использования функции $\delta_n(\rho)$ авторы приводят фундаментальное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности в n-мерном пространстве.

Примечание референта. Авторы, видимо, незнакомы с теорией обобщенных функций, одним из простейших примеров в которой является функция $\delta_n(\rho)$. Роль этой функции в построении фундаментальных решений давно известна. Г. Е. Шилов

5929. Об одном обобщении теоремы Пулена и Эрмита о нулях вещественных полиномов. Обрешков (Sur une généralisation du théorème de Poulain et Hermite pour les zéros des polynomes réels. Obrechkoff Nikola), Докл. Болг. АН, 1958, **11**, № 1, 5—8 (франц.; рез. русск.)

Доказывается теорема: Если все корни уравнения

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (1)$$

действительны и если аргументы φ мнимых корней уравнения с действительными коэффициентами

$$\varphi(x) \equiv b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m = 0, \quad b_m \neq 0, \tag{2}$$

удовлетворяют условию

$$|\sin\varphi| \leqslant 1/\sqrt{n}, \tag{3}$$

то уравнение

$$b_0f^{(m)}(x) + b_1f^{(m-1)}(x) + \ldots + b_mf(x) = 0 \tag{4}$$

имеет только лишь действительные корни, а при наличии знака неравенства в (3) каждый кратный корень уравнения (4) является кратным корнем уравнения (1).

Таким образом, обобщается теорема Пулен-Эрмита, в которой все корни уравнения (2) предполагаются действительными. В основе доказательства лежит следующее предложение: Если уравнение (1) имеет лишь действительные корни и если φ — угол, удовлетворяющий условию (3), то уравнение

$$f(x) - 2\rho\cos\varphi f'(x) + \rho^2f''(x) = 0, \quad \rho > 0, \tag{5}$$

имеет лишь действительные корни, а при наличии знака неравенства в (3) каждый кратный корень уравнения (5) является кратным корнем уравнения (1).

Наконец, формулируется одно следствие основной теоремы: Если уравнение $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ имеет лишь корни, аргументы которых удовлетворяют условию (3), то все корни уравнения $a_0 + a_1x + \frac{a_2}{2!}x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}x^n = 0$ действительны. А. К. Харадзе

5930. К проблеме отыскания функций, переместимых с данной. Ханров А. А., Тр. Фрунзенск. политехн. ин-та, 1957, вып. 1, 89—94

Две функции F и G называются переместимыми (перемутабельными), если

$$\int_{x_1}^{y_1}\ldots\int_{x_n}^{y_n} F(x_1,\ldots,x_n;\xi_1,\ldots,\xi_n)\,G(\xi_1,\ldots,\xi_n,y_1,\ldots,y_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1}\ldots\int_{x_n}^{y_n} G(x_1,\ldots,x_n;\xi_1,\ldots,\xi_n)\,F(\xi_1,\ldots,\xi_n,y_1,\ldots,y_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n.$$

Отыскание всех функций, переместимых с данной функцией $F(x, y)$ канонической формы, т. е. удовлетворяющей условиям $F(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n) = 1$,

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x_i}\right|_{\substack{y_1=x_1\\ \ldots\\ y_{i-1}=x_{i-1}\\ y_{i+1}=x_{i+1}\\ \ldots\\ y_n=x_n}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2F}{\partial x_i\partial y_j}\right|_{\substack{y_1=x_1\\ \ldots\\ y_{i-1}=x_{i-1}\\ y_{i+1}=x_{i+1}\\ \ldots\\ y_n=x_n}} = 0, \ldots,$$

$$\left.\frac{\partial^{n-1}F}{\partial x_1\ldots\partial x_{i-1}\,\partial x_{i+1}\ldots\partial x_n}\right|_{y_i=x_i} = 0,$$

автор приводит к решению интегро-дифференциально го уравнения вида

$$\frac{\partial^n\Phi}{\partial y_1\ldots\partial y_n} + (-1)^{n-1}\frac{\partial^n\Phi}{\partial x_1\ldots\partial x_n} =$$

$$= \int_{x_1}^{y_1}\ldots\int_{x_n}^{y_n}\left[\frac{\partial^n\Phi(x_1,\ldots,x_n;\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_n}\times\right.$$

$$\left.\times f_2(\xi_1,\ldots,\xi_n,y_1,\ldots,y)_n + (-1)^n f_1(x_1,\ldots,x_n;\xi_1,\ldots,\xi_n)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial^n\Phi(\xi_1,\ldots,\xi_n,y_1,\ldots,y_n)}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_n}\right]d\xi_1\ldots d\xi_n$$

с дополнительными условиями

$$\left.\Phi(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_n)\right|_{y_i=x_i} \equiv 0 \quad (i = 1,\ldots,n).$$

Я. В. Быков

5931. Оценки производных гармонических многочленов нескольких переменных. Гольштейн Е. Г., Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1958, 26, № 4, 193—200 (рез. арм.)

Даются оценки производных гармонических многочленов для различных классов областей, подобные оценкам В. А. Маркова и С. Н. Бернштейна. На этой основе формулируются обратные теоремы теории наилучших приближений гармоническими многочленами.

Вводятся следующие обозначения и определения: $K_\alpha^{(p)}$ — область p-мерного пространства, определяемая неравенствами

$$0 < \alpha < \pi/2, \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{p-1}^2 \leqslant \operatorname{tg}^2\alpha\,(1 - x_p)^2,$$
$$1/2 \leqslant x_p \leqslant 1.$$

Область D p-мерного пространства принадлежит классу $H_p(\alpha, \nu)$, если до любой граничной точки q области можно так дотронуться вершиной p-мерного конуса раствора 2α, что часть этого конуса, попадающая в ν-окрестность точки q, содержится в D. Если D — жорданова область p-мерного пространства с гладкой границей и q — точка этой границы, то $\mathbf{e}(q)$ обозначает единичный вектор внешней нормали в этой точке. $\omega_D(\delta) = \sup|\mathbf{e}(q_1) - \mathbf{e}(q_2)|$ по всем точкам q_1, q_2 границы, отстоящим друг от друга на расстоянии $\leqslant\delta$. Область D принадлежит классу $H_p(\varphi)$, если $\omega_D(\delta) \leqslant \varphi(\delta)$ $(\delta \leqslant \delta_0)$.

Предварительно доказывается лемма: Если $P_n(x, y)$ — гармонический многочлен степени n и $\max_{(x,y)\in K_\alpha^{(\frac{1}{2})}}|P_n(x, y)| \leqslant M$, то для сопряженного многочлена $Q_n(x, y)$, удовлетворяющего условию $Q_n(0, {}^3/_4) = 0$, справедлива оценка

$$\max_{(x,\,y)\in K_\alpha^{(\frac{1}{2})}}|Q_n(x, y)| \leqslant c_2\lg n\cdot M,$$

где c_2 не зависит от n.

Далее методом индукции доказывается теорема: Если $P_n(q)$ — гармонический многочлен p переменных степени n и $\max_{q\in K_\alpha^{(p)}}|P_n(q)| \leqslant M$, то для любого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\max_{x_1^2+\ldots+x_{p-1}^2+(x_p-1)^2\leqslant\rho^2}|P_n(q)| = c(\varepsilon)\lg n\,[1 + c_1\rho^\mu]^n\cdot M, \quad (\rho < 1/4),$$

где $c(\varepsilon)$, c_1 не зависят от n и ρ, а $\mu = \frac{1}{2(1-\alpha/\pi)} - \varepsilon$.

На этой основе формулируется ряд теорем, из которых упомянем, например, следующие две: а) Если $\max_{q\in D}|P_n(q)| \leqslant M$, $D \in H_p(\varphi)$ и $\varphi(\delta) = c_{12}\delta$, то $\max_{q\in D}\left|\frac{\partial^k P_n(q)}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_p^{k_p}}\right| \leqslant c_{11}n^kM$, где c_{11} не зависит от n. Отмечается, что эта оценка иным методом ранее была установлена Шагиняном для случая $p = 2,3$ (РЖМат, 1954, 2081); б) Пусть наилучшие приближения $E_n(f, \bar{D} - D)$ функции $f(q)$, определенной на границе

D, удовлетворяют условию $E_n(f, \overline{D}-D) \leqslant \frac{c_0}{n^{k+\lambda}}$ (k—целое, $0<\lambda<1$). Если $D \in H_p(\alpha, \nu)$, то гармоническая функция $u(q)$, совпадающая с $f(q)$ на границе D, обладает в $\overline{D}$ всеми частными производными включительно до порядка r, равного целой части от выражения $\frac{k+\lambda}{2(1-\alpha/\pi)}-\varepsilon$, причем все производные порядка r удовлетворяют условию Липшица порядка $\left(\frac{k+\lambda}{2(1-\alpha/\pi)}-\right.$ $-\varepsilon-r$); ε — произвольное число >0.

Имеются опечатки, и даже в текстах теорем.

А. К. Харадзе

5932. Применение принципа сжатых отображений к доказательству существования неявных функций. Еськов В. Г., Изв. Крымск. пед. ин-та, 1957 (1958), 29, 200—206

5933. Решите уравнение. Баркуист (Solev an equation? Barquist B. L.), Electr. Engng, 1956, 75, № 4, 402 (англ.)

Ставится вопрос о вычислении интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{J_0(S\sin\varphi)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\varphi\right)}{\sin\varphi}\,d\varphi,$$

где J_0 — функция Бесселя. Этот интеграл встречается в теории антенн.

В. В. Немыцкий

5934. Вычисление интеграла. Чжэн (Solution of an integral. Cheng David K.), Electr. Engng, 1956, 75, № 7, 673 (англ.)

Баркуистом (реф. 5933) был поставлен вопрос о вычислении интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \frac{J_0(u\sin\varphi)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\varphi\right)}{\sin\varphi}\,d\varphi.$$

В заметке приводится метод вычисления этого интеграла.

В. В. Немыцкий

5935. Метод оценки взаимодействия интегралов. Марадудин, Уэйсс (Method for evaluating interaction integrals. Maradudin A., Weiss G.), Amer. J. Phys., 1958, 26, № 7, 499—500 (англ.)

С помощью преобразований Фурье вычисление шестикратных интегралов, возникающих в электростатике и квантовой механике, сводится к вычислению трехкратных интегралов.

В. К. Захаров

5936 К. Введение в математический анализ. Ивс, Вильсон (Introductory mathematical analysis. Eaves Edgar D., Wilson Robert L. Boston. Allyn and Bacon, 1958, 439 pp., ill., 5.00 doll.), Publishers' Weekly, 1958, 174, № 3, 88 (англ.)

5937 К. Введение в высшую математику. Учебник для студентов и самостоятельно изучающих. Т. 3. Интегральное исчисление и его применение, теория функций и дифференциальные уравнения. 10-е полностью переработанное издание. Мангольдт, Кнопп (Einführung in die höhere Mathematik. Für Studierende und zum Selbststudium. Bd. 3. Integralrechnung und ihre Anwendungen, Funktionentheorie, Differentialgleichungen. Mangoldt H. 10. vollst. neubearb. Aufl. Neu hrsgg. Knopp Konrad, Leipzig, Hirzel. 1957, XV, 640 S., 22.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 3, 173 (нем.)

5938 К. Курс математического анализа. [Для втузов]. Ч. 2. Изд. 8-е, стереотипн. Бермант А. Ф. М., Физматгиз, 1958, 358 стр., илл., 7 р. 85 к.

5939 К. Анализ. Т. 1, 2. Диккинсон (Calculus. Dickinson David Ronald. London, Harrap, 1958. Vol. 1. 431 pp., 17 sh. 6 d. Vol. 2. 228 pp., 13 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 444, 9 (англ.)

5940 К. Математический анализ. 2-е изд. Смит, Салковер, Джастис (Calculus. 2nd ed. Smith Edward Staples, Salkover Meyer, Justice Howard K. New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, xiii, 520 pp., ill., 52 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 448, 8 (англ.)

5941 К. Элементы дифференциального и интегрального исчисления. Леконт, Дельтей (Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral. T. 1. 11-e éd. Leconte Théodore, Deltheil Robert. Paris, A. Colin, 1958, 220 p., ill., 360 fr.), Bibliogr. France, 1958, 147, № 45, 1091 (франц.)

5942 К. Дифференциальное исчисление. Кюлейн (Differentialrechnung. Kühlein Theo. Berlin, Mentor-Verl., 1958, 1. Leitfaden, 152 S., ill. 3.—DM. 2. Anwendungen, 142 S., ill., 3.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 27, 1912 (нем.)

5943 К. Дифференциальное исчисление. Хилтон (Differential calculus. Hilton Peter John. London, Routledge and K. Paul, 1958, vii, 56 pp., ill., 5 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 447, 10 (англ.)

5944 К. Введение в теорию разностных уравнений с примерами из экономики, психологии и социологии. Голдберг (Introduction to difference equations; with illustrative examples from economics, psychology, and sociology. Goldberg Samuel. New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, Ltd, 1958, xii, 260 pp., ill., 54 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 448, 8 (англ.)

5945 К. Исчисление конечных разностей. Гельфонд (Differenzenrechnung. Gelfond A. O. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1958, VI, 336 S.) (нем.)

Перевод с русского (М.-Л., Гостехиздат, 1952).

5946. К. Теория функций. Кнезер (Funktionentheorie. Kneser Hellmuth. Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht, 1958, 422 S., ill., 34.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1958, A, № 35, 2539 (нем.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

5947. Суммы степеней целых чисел. Паркер (Sums of powers of the integers. Parker R. V.), Math. Gaz., 1958, 42, № 340, 91—95 (англ.)

Из рассмотрения конечной разности $\Delta[x^n(x+1)]^n$ выводится формула

$$\sum\left\{nx^{2n-1}+\binom{n}{3}x^{2n-3}+\binom{n}{5}x^{2n-5}+\ldots\right\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[x(x+1)\right]^n,$$

позволяющая последовательно находить суммы нечетных степеней натуральных чисел. Так,

$$\sum x=\frac{1}{2}x(x+1),\qquad \sum x^3=\frac{1}{4}\left[x(x+1)\right]^2=\left(\sum x\right)^2,$$
$$\sum x^5=\frac{1}{6}\left[x(x+1)\right]^3-\frac{1}{12}\left[x(x+1)\right]^2;$$

при $n\geqslant 3$ степени $x(x+1)$ убывают от $\frac{1}{2}(n+1)$ до 2;

коэффициент при старшем члене равен $\frac{1}{n+1}$. Далее выводится формула

$$\sum\left\{\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}\right\}x^{2n}+\left[\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}\right]x^{2n-2}+\ldots\Big\}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[x(x+1)\right]^n(2x+1),$$

позволяющая получать выражения для сумм четных степеней. Например,

$$\sum x^2=\frac{1}{6}x(x+1)(2x+1),\quad \sum x^4=\left\{\frac{1}{10}\left[x(x+1)\right]^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{30}x(x+1)\right\}(2x+1);$$

здесь степени $x(x+1)$ убывают от $n/2$ до 1; коэффициент при старшем члене равен $\frac{1}{2(n+1)}$. Автор указывает, что эти результаты другим методом были получены Пиза (Piza P. A., Math. Mag., 1952, 137 — 142).

А. Г. Школьник

5948. Свойства сходимости бесконечных экспонент. Эванс (Convergence properties of infinite exponentials. Evans W. B.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 47 (англ.)

Если $a_1, a_2, \ldots$ — последовательность комплексных чисел, символ X^n индуктивно определяется через $X^1(a_1, a_2, \ldots)=a_1$, $X^{n+1}(a_1, a_2, \ldots)=a_1Y$, где $Y=X^n(a_2, a_3, \ldots)$, а бесконечная экспонента X^∞ есть $\lim X^n$. Символы X_{-n} и $X_{-\infty}$ определяются аналогично. Если $a_i=\exp(\theta\sqrt{-1})$ для $i=1, 2, \ldots$, и рассматриваются лишь главные значения, то $|X^n(\theta_i, \ldots)|$ есть вида $X_{-m}b_l$.

Рассматриваются некоторые свойства сходимости.

5949. Теорема о непрерывности предела последовательности. **Ян Ю-чунь**, Дунбэй жэньминь дасюэ цзыжань-кэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., **1955, № 1**, 343—346 (кит.)

5950. К теории сходимости знакоположительных числовых рядов. **Зморович** (До теорії збіжності знакододатних числових рядів. Зморович В. А.), Доповіді АН УРСР, 1958, № 8, 805—809 (укр.; рез. англ.)

Приводятся некоторые теоремы, относящиеся к признакам сходимости и расходимости знакоположительных числовых рядов Н. И. Лобачевского, В. П. Ермакова, Коши, Шлёмильха и Н. В. Бугаева. Эти теоремы, по мнению автора, представляют интерес с точки зрения общей теории сходимости и расходимости числовых рядов благодаря известной завершенности содержащихся в них результатов. Резюме автора

5951. Частично ограниченные матричные преобразования; сильная суммируемость. **Виланский, Целлер** (Abschnittsbeschränkte Matrixtransformationen; starke Limitierbarkeit. Wilansky Albert, Zeller Karl), Math. Z., 1956, **64**, № 3, 258—269 (нем.)

Это, в основном, обзорная работа о нормальных (т. е. имеющих свойство $a_{nk}=0$ для $k>n$, $a_{nn}\neq 0$) методах $\lim_n \sum a_{nk}x_k$, которые обладают свойством частичной ограниченности (abschnittsbeschränkt, section—bounded)

$$\sup_{m,n}\left|\sum_{k=0}^{m}a_{nk}x_k\right|<\infty \qquad (1)$$

для каждой A-суммируемой последовательности x_k.

Методы этого типа рассматривались Юркатом и Пейеримхофом (Jurkat, Peyerimhoff, Math. Z., 1951, 55, 92—108; Peyerimhoff, Math. Z., 1951, 55, 23—54) и особенно Целлером (Zeller, Math. Z., 1951, 55, 55—70); последний связал это свойство со слабой частичной сходимостью (section convergence). Авторы рассматривают достаточные условия; необходимые условия для (1); доказывают существование базиса в полях суммируемости методов, удовлетворяющих (1); дают приложения к теоремам сравнения и множителям сходимости. Наконец, они показывают, что ε_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$ являются множителями сходимости сильной C_1-суммируемости (т. е. $\sum \varepsilon_n x_n$ сходится для всех последовательностей x_n с $|x_0-a|+|x_1-a|+\ldots+|x_n-a|=o(n)$) тогда и только тогда, если $\varepsilon_n\to 0$ и $\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_{n_k}|(n_k-n_{k-1})<+\infty$, где $n_{-1}=-1$ и n_k — наименьшее число большее, чем n_{k-1}, такое, что $|\varepsilon_{n_k}|>|\varepsilon_n|$ для всех $n>n_k$. G. G. Lorentz.

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, 1199.

5952. Шкала методов суммирования абелева типа. **Боруэйн** (On a scale of Abel-type summability methods. Borwein D.), Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1957, **53**, № 2, 318—322 (англ.)

Пусть s_n — произвольная числовая последовательность. Если

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\alpha+1}\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{\alpha}s_nx^n=s,$$

$$A_n^{\alpha}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(n+1)},\qquad \alpha>-1,$$

где выражение, стоящее под знаком предела, предполагается сходящимся для $0\leqslant x<1$, то будем говорить, что последовательность s_n (A, α)-суммируема к s. В работе показано, что (A, α) транслятивно и регулярно при $\alpha>-1$, метод (A, μ) сильнее метода (A, λ), если $\mu>\lambda>-1$, $(C, \alpha)\subset(A, \lambda)$, для $\alpha>-1$, $\lambda>-1$. Если $H_\varkappa$ — метод суммирования Хаусдорфа, соответствующий моментной функции $\chi(t)$, где $\chi(t)$ абсолютно непрерывна в $[0,1]$, $\chi(1)-\chi(0)=1$, $\alpha>-1$, то $(A, \alpha)\subset(A, \alpha)\cdot(H_\chi)$, где $(A, \alpha)\cdot(H_\chi)$ обозначает метод суммирования, соответствующий произведению матриц методов суммирования (A, α) и (H_χ). И. И. Огиевецкий

5953. К сравнимости методов Чезаро и Абеля. Мейер-Кёниг, Целлер (Zum Vergleich der Verfahren von Cesàro und Abel. Meyer-König W., Zeller K.), Arch. Math., 1958, **9**, № 3, 191—196 (нем.)

Для любой пары чисел α, β $(0<\alpha<\beta)$ и для всякой монотонно возрастающей к бесконечности последовательности чисел W_k $(k=0, 1, 2, 3, \ldots)$ можно указать последовательность чисел $s_k=o(W_k)$, которая суммируема методом Чезаро порядка β и не суммируема методом Чезаро порядка α.

Если последовательность s_k обладает тем свойством, что

$$\sup_m\sup_{0<r<1}\left|(1-r)\sum_{k=0}^{m}s_kr^k\right|<\infty,$$

то при любом $\alpha>1$ она суммируема методом Чезаро порядка α.

Если же

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{0<r<1} |(1-r)\sum_{k=m}^{\infty} s_k r^k| = 0,$$

то она суммируема также методом $(C, 1)$. А. Ф. Тиман

5954. О границах неопределенности при суммировании ряда методами Чезаро и Пуассона—Абеля. Давыдов Н. А., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 167—174

Пусть E_1, E_2 и E_3 обозначают соответственно множества предельных точек (в расширенной плоскости) комплексной последовательности $z_0, z_1, z_2, \ldots$, ее C_1-преобразования $\sigma_n = (n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n} z_k$, и ее абелева преобразования $\sigma(x) = (1-x)\sum_{k=0}^{\infty} x^k z_k$.

Устанавливаются семь теорем, связанных с этими множествами. Приводим типичную. Пусть $\alpha \geqslant 0$ и пусть $(z_0, z_1, z_2, \ldots$ — такая, что для некоторой постоянной C $|s_n| \leqslant Cn^{\alpha}$, если $n > 1$. Пусть $\bar{G}$ — выпуклое замкнутое множество в расширенной комплексной плоскости. В случае $\bar{G}$, содержащего конечные точки, пусть G_p $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ обозначает множество точек, расстояние которых от G_p не превышает $1/p$. В случае $\bar{G}$, содержащем лишь бесконечно удаленную точку, пусть $G_1, G_2, \ldots$ обозначает последовательность выпуклых замкнутых множеств, пересечение которых — $\bar{G}$. Предположим, что каждому положительному целому p соответствуют последовательности m_k и n_k целых чисел такие, что: 1) $n_k \leqslant m_k < n_{k+1}$, 2) $m_k/n_k^{1+\alpha} \to \infty$ и 3) z_n принадлежит G_p, если $n_k \leqslant n \leqslant m_k$. Тогда $\bar{G}$ содержит по крайней мере одну точку, конечную или бесконечную, принадлежащую E_2. R. P. Agnew

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, 646

5955. Об одновременной сходимости чезаровских и риссовских преобразований рядов. Агнью (Equiconvergence of Cesàro and Riesz transforms of series. Agnew Ralph Palmer), Duke Math. J., 1955, **22**, № 3, 451—460 (англ.)

Положим $\sigma(n) = \sum_{k=0}^{n} b_{nk}u_k$. Если $b_{nk} = A_{n-k}^{\alpha}/A_n^{\alpha}$, то $\sigma(n)$ — чезаровское преобразование ряда $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ порядка α, если $b_{nk} = (1-k/n)^{\alpha}$, то $\sigma(n)$ — риссовское преобразование ряда $\sum u_k$. Если $b_{nk} = (1-k/\omega)^{\alpha}$, $k < \omega$, то $\sigma(\omega)$ — риссовское преобразование ряда $\sum u_k$ с непрерывным параметром ω. Полагаем в этом случае $\sigma(\omega) = R(\omega)$. Если для данного ряда $\sum u_k$, $\lim_{n\to\infty} |\sigma_{\alpha}(n) - R_{\alpha}(n)| = 0$, то будем говорить, что чезаровские и риссовские средние этого ряда одновременно сходятся (equiconvergence).

Теорема 1. Если $\alpha > 0$ и для $\sum u_n$, $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, то чезаровские и риссовские средние этого ряда одновременно сходятся.

Теорема 2. Если $\alpha > 0$ и если для ряда $\sum u_n$,

$$\left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} k u_k\right| \leqslant M,$$

то чезаровские и риссовские средние этого ряда одновременно сходятся. Пусть $\omega_1(\alpha)$ и $\omega_2(\alpha)$ положительные функции α, определенные для $\alpha > 0$, такие, что при $\alpha \to \infty$, $\omega_1(\alpha) \to \infty$, $\omega_2(\alpha) \to \infty$.

Теорема 3. Пусть $r \geqslant 0$, $R_r(\omega)$ — риссовское преобразование ряда $\sum u_n$, для которого $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Тогда для того чтобы

$$\lim_{\alpha\to\infty} |R_r(\omega_2) - R_r(\omega_1)| = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\alpha\to\infty} \sup |\omega_2(\alpha) - \omega_1(\alpha)| < \infty.$$

Замечается, что возможно использование теорем 1 и 3 в теории рядов Фурье. И. И. Огиевецкий

5956. Об абсолютном суммировании типическими средними рядов с лакунами. Обрешков (Sur la sommabilité absolue par les moyennes typiques des séries lacunaires. Obrechkoff N.), Докл. Болг. АН, 1958, **11**, № 1, 1—4 (франц.; рез. русск.)

Доказывается теорема, относящаяся к числовым рядам, которые абсолютно суммируемы по Риссу. Именно, справедлива

Теорема. Пусть $\lambda_n \uparrow \infty$ и последовательности целых чисел $\{n_k\}$, $\{m_k\}$ таковы, что $n_k < m_k \leqslant n_{k+1}$ и $\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{n_k}} > q > 1$. Тогда, если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i \tag{1}$$

абсолютно суммируем $|R, \lambda, 1|$ и $u_i = 0$ при $n_k < i < m_k$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{i=m_k}^{n_{k+1}} u_i\right| < \infty. \tag{2}$$

В конце работы отмечается, что неравенство (2) остается справедливым и при некотором более слабом предположении, чем $|R, \lambda, 1|$-суммируемость ряда (1). П. Л. Ульянов

5957. Преобразования тауберовых рядов методами Рисса различных порядков. Тененбаум (Transforms of Tauberian series by Riesz methods of different orders. Tenenbaum Morris), Duke Math. J., 1958, **25**, № 1, 181—191 (англ.)

Рассматриваются средние Рисса

$$R_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} (1-k/n)^r u_k$$

порядка r для рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, удовлетворяющих условию $\limsup_{n\to\infty} n|u_n| < \infty$. Исследуется вопрос о наименьшем возможном значении B_0 константы B в неравенстве

$$\limsup_{\alpha\to\infty} |R_{n(\alpha)}^{(q)} - R_{m(\alpha)}^{(p)}| \leqslant B \limsup_{n\to\infty} n|u_n|,$$

где p и q — любые неотрицательные числа $(0 \leqslant p \leqslant q)$, а $m = m(\alpha)$ и $n = n(\alpha)$ — некоторые функции от параметра α, принимающие значения из натурального ряда, причем $\lim_{\alpha\to\infty} m(\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty} n(\alpha) = \infty$.

Если $\liminf_{\alpha\to\infty} \frac{m(\alpha)}{n(\alpha)} = 0$ или $\limsup_{\alpha\to\infty} \frac{m(\alpha)}{n(\alpha)} = \infty$, то $B_0 = \infty$.

В том случае, когда $0 < \lambda_1 = \liminf_{\alpha\to\infty} \frac{m(\alpha)}{n(\alpha)} \leqslant \lambda_2 = \limsup_{\alpha\to\infty} \frac{m(\alpha)}{n(\alpha)} < \infty$, справедливо неравенство

$$B_0 \geqslant \max_{\nu=1,2} |\ln\lambda_\nu + [\psi(q) - \psi(p)]|, \qquad (1)$$

где $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)}$. Если $\lambda_2 < p/q$ или если $1 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 < \infty$, неравенство (1) обращается в равенство, а в тех случаях, когда $p/q < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 < 1$, левая часть строго больше правой.

Некоторые задачи, относящиеся к рассматриваемому здесь вопросу, при $p = 0$ были ранее решены в работах Агнью (Agnew R. P., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 501—518; РЖМат, 1955, 5894) и Гартеном (Garten V., Comment. math. helv., 1951, 25, 311—335), который рассматривал средние Чезаро. А. Ф. Тиман

5958. Некоторые матрицы суммирования типа Хаусдорфа. Брауэр (Some summation matrices of Hausdorff type. Brauer George), Math. Z., 1957, 67, № 5, 397—403 (англ.)

Норма $\|A\|$ матрицы $A = \{a_{nk}\}$ определяется как

$$\|A\| = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nk}|.$$

Если $a_{nk} = 0$, $n \neq k$, $a_{nk} = \mu_{nn}$, $n = k$, то $A = \{\mu_n\}$ — диагональная матрица. Автор называет матрицу вида $A \cdot \mu A^{-1}$, где A — нормальная матрица ($a_{nk} = 0$ при $k > n$, $a_{nn} \neq 0$), матрицей типа Хаусдорфа. Для матриц $A = E_\alpha = \{e_{nk}\}$, где $e_{nk} = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$ (матрица Эйлера-Кноппа) и $A = C_m = \left\{\frac{A_{n-k}^{m-1}}{A_n^m}\right\}$ (матрица Чезаро порядка m), устанавливается:

1) если $\|E_\alpha \cdot \mu \cdot E_\alpha^{-1}\| < \infty$, то $\Delta^r \mu_n = O(n^{-r})$, $r = 0, 1, 2, \ldots$;

2) если $\alpha > 0$ и $E_\alpha \cdot \mu \cdot E_\alpha^{-1} = b_{nk}$ регулярно, то $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 1$;

3) если $|1 - \alpha| > 1$ и $E_\alpha \cdot \mu \cdot E_\alpha^{-1}$ регулярно, то $E_\alpha \cdot \mu \cdot E_\alpha^{-1}$ — единичная матрица;

4) если $m \geqslant 1$ и $\|C_m \cdot \mu \cdot C_m^{-1}\| < \infty$, то $\|C_{m-1} \cdot \mu \cdot C_{m-1}^{-1}\| < \infty$.

Приводятся также некоторые другие результаты того же рода. И. И. Огиевецкий

5959. Замечание к работе Рамануджана о квазихаусдорфовых преобразованиях. Катнер (Note on a paper by M. S. Ramanujan on quasi-Hausdorff transformations. Kuttner B.), J. Indian Math. Soc., 1957, 21, № 3-4, 97—104 (англ.)

В связи с работой Рамануджана (РЖМат, 1954, 2204 показывается: I) эквивалентность утверждений

$$\sup_n \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} |(\Delta^{m-n}\mu_{n+1})| < \infty \quad \text{и}$$

$$\sup_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} |\Delta^{n-m}\mu_m| < \infty,$$

$\Delta^0\mu_n = \mu_n$, $\Delta\mu_n = \mu_n - \mu_{n+1}$, $\Delta^k\mu_n = \Delta(\Delta^{k-1}\mu_n)$;

II) если T^*—квазихаусдорфово преобразование ряда в ряд, а T — хаусдорфово преобразование, то T^* сохраняет сходимость тогда и только тогда, если T сохраняет сходимость. В этом случае T^* мультипликативно. T мультипликативно тогда и только тогда, если выполняется условие $\lim_{n\to\infty} \Delta^n\mu_0 = 0$. Если одно из преобразований T или T^* мультипликативно, то оно регулярно тогда и только тогда, если $\mu_0 = 1$. Относительно используемой терминологии см. Харди, Расходящиеся ряды, М., Изд-во ин. лит., 1951. И. И. Огиевецкий

5960. О хаусдорфовом и квазихаусдорфовом методах суммирования. Рамануджан (On Hausdorff and quasi-Hausdorff methods of summability. Ramanujan M. S.), Quart. J. Math., 1957, 8, № 31, 197—213 (англ.)

В работе продолжаются исследования, проводившиеся в предыдущих работах того же автора (РЖМат, 1954, 2204; РЖМат, 1957, 7980), а также Катнера (реф. 5959). Приведем некоторые результаты. Пусть $t_n = As_n$. Матрица A абсолютно консервативна, если из сходимости $\sum |\Delta s_n|$ вытекает сходимость $\sum |\Delta t_n|$, если, кроме того, $\lim t_n = \lim s_n$, то матрица A абсолютно регулярна.

Теорема 2. Квазихаусдорфова матрица (H^*, μ_n) определяет абсолютно консервативное (абсолютно регулярное) преобразование последовательности в последовательность тогда и только тогда, если она определяет консервативное (регулярное) преобразование.

Теорема 4. Хаусдорфова матрица (H, μ_n) определяет абсолютно консервативное (абсолютно регулярное) преобразование ряда в ряд тогда и только тогда, если она определяет консервативное (регулярное) преобразование.

Теорема 5. Пусть $s_n = O(1)$ и суммируется экспоненциальным методом Бореля к l. Тогда всякая регулярная матрица (H, μ_n) суммирует s_n к l, если χ — функция, порожденная моментными постоянными μ_n (т. е. $\mu_n = \int_0^1 t^n d\chi(t)$) непрерывна при $t = 1$.

Ограниченная последовательность s_n почти сходится к l, если всякий банахов предел этой последовательности равен l. (О пределе последовательности в смысле Банаха см. Банах С. С., Курс функціонального аналізу, Изд-во Радянська школа, 1948, 28). Если метод суммирования суммирует все почти сходящиеся последовательности, то его называют сильно регулярным.

Теорема 9. Квазихаусдорфова регулярная матрица (H^*, μ_{n+1}) сильно регулярна тогда и только тогда, если $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ или, что эквивалентно, если моментная функция $\chi(t)$, ассоциированная с методом, непрерывна при $t = 1$. Матрица метода $S^* = (S^*, \mu_n)$ определяется следующим образом

$$a_{nk} = \binom{n+k}{k} \Delta^k \mu_{n+1}.$$

Теорема 12. Матрица (S^*, μ_n) является матрицей, сохраняющей сходимость, тогда и только тогда, если μ_n является моментной последовательностью; она является регулярной матрицей тогда и только тогда, если

1) μ_n — моментная последовательность, 2) $\int_{+0}^{1} d\chi(t) =$

3) функция $\chi(t)$, порожденная моментной последовательностью μ_n, непрерывна при $t = 1$. И. И. Огиевецкий

5961. Абсолютная суммируемость (A) ряда Лапласа. Бхатт (The absolute summability (A) of Laplace series. Bhatt S. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, 49, № 3, 129—132 (англ.)

Ряд $\sum a_n$ называют абсолютно суммируемым (A), если $F(x)=\sum a_n x^n$ ($|x|<1$) представляет функцию с ограниченным изменением в интервале (0, 1); тогда обобщенная сумма определяется как предел $\lim_{x\to 1-0} F(x)$.

В статье дается критерий абсолютной суммируемости (A) на сфере единичного радиуса ряда Лапласа

$$\frac{1}{4\pi}\sum_0^\infty (2m+1)\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\theta,\psi)\,P_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\psi,$$

соответствующего функции $f(\theta,\psi)$, интегрируемой (L) на сфере ($P_n(t)$ — полином Лежандра).

Вводятся обозначения: $F(\theta)=\int_0^{2\pi} f(\theta,\psi)\,d\psi$, $F(\theta)-F(0)=\varphi(\theta)$, $\theta>0$, $\Phi_\alpha(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\theta(\theta-u)^{\alpha-1}\varphi(u)du$, если $\alpha>0$; $\Phi_0(\theta)=\varphi(\theta)$, $\Phi_{\alpha+\beta}(\theta)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\theta(\theta-u)^{\beta-1}\Phi_\alpha(u)\,du$, если $\beta>0$; $\Phi_\alpha(\theta)=\frac{d}{d\theta}\Phi_{\alpha+1}(\theta)$, если $-1<\alpha<0$; $\varphi_\alpha(\theta)=\Gamma(\alpha+1)\theta^{-\alpha}\Phi_\alpha(\theta)$.

Доказывается теорема: Если для некоторого $\alpha\geqslant 0$ $\varphi_\alpha(\theta)$ является функцией с ограниченным изменением в $(0,\delta)$ и $\varphi_\alpha(\theta)\to 0$ при $\theta\to 0$, то ряд Лапласа для функции $f(\theta,\psi)$ абсолютно суммируем (A) в точке P единичной сферы к сумме $f(P)$.

Дается другая формулировка той же теоремы: Если для $\alpha\geqslant 0$ и $\delta>0$

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi_\alpha(\theta)|}{\theta}d\theta<\infty,$$

то ряд Лапласа абсолютно суммируем (A) в точке P к сумме $f(P)$. А. К. Харадзе

5962. О преобразовании ядер последовательностей регулярными матрицами. Катнер (On cores of sequences and of their transforms by regular matrices. Kuttner B.), Proc. London Math. Soc., 1956, **6**, № 24, 561—580 (англ.)

Ядром последовательности комплексных чисел s_n называется множество точек z комплексной плоскости таких, что при любом действительном φ будет выполняться соотношение

$$\mathrm{R}\{ze^{i\varphi}\}\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}\,\mathrm{R}\{s_m e^{i\varphi}\}. \qquad (1)$$

Для матрицы $A=(a_{n,m})$ положим $\sigma_{n,m}=\sum_{\nu=0}^m a_{n,\nu}\,s_\nu$.

Назовем ядром преобразования последовательности s_n матрицей A множество точек комплексной плоскости z, удовлетворяющих при всех действительных φ неравенству

$$\mathrm{R}\{ze^{i\varphi}\}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\;\overline{\lim_{m\to\infty}}\{\sigma_{n,m}e^{i\varphi}\}.$$

(В случае, если A—тёплицева матрица, то последнее неравенство переходит в (1) с заменой s_n на σ_n). Ядро тёплицевой матрицы регулярно, если для любой последовательности s_n ядро преобразования этой последовательности содержится в ядре последовательности $\{s_n\}$.

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия, чтобы тёплицева матрица обладала регулярным ядром. Приведем одно из них. Пусть A — тёплицева матрица. Положим $A=B+iC$, $B=(b_{n,m})$; $C=(c_{n,m})$ $a_{n,m}=b_{n,m}+ic_{n,m}$; $b_{n,m}$, $c_{n,m}$—действительны.

Теорема 1. Для того чтобы тёплицева матрица A обладала регулярным ядром, необходимо и достаточно, чтобы 1) B обладало регулярным ядром, 2) существовали целые N, M такие, что из одновременного выполнения неравенств $n>N$, $m>N$ вытекало $c_{n,m}=0$. Устанавливаются еще три теоремы такого же рода.

И. И. Огиевецкий

5963. Вклад в теорию тёплицевых матриц. Гренандер (A contribution to the theory of Toeplitz matrices. Grenander Ulf), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 1, 124—140 (англ.)

Пусть X — абстрактное пространство, множество его подмножеств, образующих σ-алгебру (РжМат, 1954, 3653 К), обозначим через $\mathfrak{X}$, меру, определенную на $\mathfrak{X}$, обозначим через m. Пусть x — элемент пространства X. Пусть $\varphi_\nu(x)$, $\nu=0,1,2,\ldots$,— последовательность функций определенных на X, ортонормальных относительно m $\left(\int_X \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu^*(x)dm=\delta_{\nu\mu}\right)$, полная в $L_2(x)$. Пусть $f(x)$ — действительная ограниченная функция, определенная на X, $\mathfrak{X}$-измеримая; введем бесконечную эрмитову матрицу

$$M(f)=\{m_{\nu\mu}(f);\ \nu,\ \mu=0,\ 1,\ 2,\ldots\},$$

где $m_{\nu\mu}(f)=\int_X \varphi_\nu(x)\,\varphi_\mu^*(x)f(x)dx$.

Матрицу $M(f)$ автор называет бесконечной тёплицевой матрицей. В работе изучаются эрмитовы матрицы $M_n(f)$ (конечные тёплицевы матрицы), определяемые как

$$M_n(f)=\{m_{\nu\mu}(f)\},\ \nu,\ \mu=0,\ 1,\ 2,\ldots,(n-1).$$

Пусть $\lambda_k^{(n)}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ldots,(n-1)$, — собственные значения этой матрицы. Положим $D_n(t;f)=\frac{(\text{число }\lambda_\nu^{(n)}\leqslant t)}{n}$.

В случае, если существует функция распределения $D(t;f)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} D_n(t;f)=D(t;f)$$

для каждого значения t, для которого $D(t;f)$ непрерывно, то будем говорить, что тёплицева матрица обладает асимптотическим распределением собственных значений описываемых функцией $D(t;f)$.

В работе устанавливаются несколько предложений, формулирующих достаточные условия, при выполнении которых тёплицева матрица $M_n(f)$ обладает асимптотическим распределением собственных значений, описываемых соответствующей функцией $D(t;f)$. Устанавливаются также некоторые другие результаты того же рода. И. И. Огиевецкий

5964. Нормы методов суммирования. Питерсен (Norms of summation methods. Petersen G. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, **54**, № 3, 354—357 (англ.)

Тёплицевы матрицы A и A' o-эквивалентны, если 1) они суммируют одни и те же ограниченные последовательности s_n; 2) если s_n ограничено, то $A(\lim s_n)=A'(\lim s_n)$. Нормой $h(A)$ тёплицевой матрицы $A\{a_{nk}\}$ называют $h(A)=\limsup_{n\to\infty}\sum|a_{nk}|$. Множество тёплицевых матриц, o-эквивалентных данной тёплицевой матрице A, назовем множеством матриц, соответствующих

методу суммирования A. Нормой $\|A\|$ метода суммирования A называют число $\|A\| = \inf h(A')$, где A' пробегает совокупность всех тёплицевых матриц, o-эквивалентных матрице A.

Определим матрицу $A = (a_{mn})$ следующим образом:

$$a_{2n-1,3n-2} = 1,\ a_{2n-1,m} = 0,\ m \neq 3n-2,$$

$$a_{2n,3n-1} = 2,\ a_{2n,3n} = -1,\ a_{2n,m} = 0,\ m \neq 3n-1,\ 3n.$$

Теорема 1. Не существует матрицы $A^* = (a^*_{mn})$ такой, что A^* o-эквивалентна матрице A и что $h(A^*) = \|A\|$.

Теорема 2. Каждому методу суммирования B соответствует метод суммирования B^Δ такой, что 1) $\|B^\Delta\| = \|B\|$; 2) норма метода B^Δ не достигается ни на одной из матриц, принадлежащих множеству, соответствующему методу B^Δ. Матрица A o-сильнее матрицы B, если она 1) суммирует все ограниченные последовательности, суммируемые матрицей B; 2) существует по крайней мере одна ограниченная последовательность, суммируемая матрицей A, но не суммируемая матрицей B. Тёплицева матрица A сильно регулярна, если она удовлетворяет условию $\lim\limits_{m\to\infty} \sum |a_{mn} - a_{m,n+1}| = 0$.

Теорема 3. Если $A = |a_{mn}|$ сильно регулярна, то существует матрица $B = (b_{mn})$ такая, что 1) A o-сильнее чем B; 2) $\|B\| = \|A\|$. И. И. Огиевецкий

5965. Нормы матриц. Питерсен (Matrix norms. Petersen G. M.), Quart. J. Math., 1958, **9**, № 35, 161—168 (англ.)

Говорят, что матрица B a-сильнее (b-сильнее) матрицы A, если любая A-суммируемая (ограниченная A-суммируемая) последовательность также B-суммируема. Если каждая из матриц A и B a-сильнее (b-сильнее) другой, то A и B считаются a-эквивалентными (b-эквивалентными). Лоренц (Lorentz G. G., Acta math., 1948, 80, 167—190) систематически изучал класс $\mathfrak{S}$ регулярных матриц $A = (a_{mn})$, удовлетворяющих условию $\lim_{m\to\infty} \max_n |a_{mn}| = 0$. В первой части реферируемой статьи устанавливается следующий результат, относящийся к последовательности матриц $A^k = (a^k_{mn})$ класса $\mathfrak{S}$.

Если $\sum_n \left|a^k_{mn}\right| \leqslant M$ независимо от m, k и для каждого k, A^{k+1} b-сильнее, чем A^k, то существует последовательность матриц $B^k = (b^k_{mn})$, удовлетворяющая условию $\sum_n \left|b^k_{mn}\right| \leqslant M$ независимо от m, k и такая, что для каждого k, B^k b-эквивалентна A^k и B^{k+1} a-сильнее чем B^k.

Брудно (РЖМат, 1953, 1242) определяет норму $\|A\|$ метода суммирования A формулой $\|A\| = \inf h(A)$, где $h(A) = \sup_m \sum_n |a_{mn}|$, а inf берется по всем матрицам, b-эквивалентным матрице A. Во второй части реферируемой статьи показывается, что в определении нормы $\|A\|$ можно $h(A)$ заменить выражением $h'(A) = \overline{\lim}_{m\to\infty} \sum_n |a_{mn}|$, и устанавливается существование последовательности матриц B_k со следующими свойствами для каждого k: 1) $h'(B_k) = 1$; 2) B_{k+1} a-сильнее, чем B_k; 3) никакая регулярная матрица не a-сильнее всех B_k. Г. Ф. Кангро

5966. Тауберовы условия. Замечание к заметке Раджагопала. Бутцер (Tauberian conditions. A remark on a paper by C. T. Rajagopal. Butzer P. L.), Arch. Math., 1958, 8, № 6, 405—408 (англ.)

Рассматривая некоторый метод суммирования P и другой более сильный метод суммирования Q, автор делает несколько замечаний об условиях, являющихся тауберовыми для P, но не являющихся тауберовыми для Q. А. Ф. Тиман

5967. Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстрорастущих функций. Коренблюм Б. И., Тр. Моск. матем. об-ва, 1958, 7, 121—148

Подробное изложение результатов, аннонсированных в предыдущих сообщениях автора (РЖМат, 1957, 7141 и 7964, 1958, 4853). Г. Е. Шилов

5968. Оценка остатка ряда Фурье функции по многочленам Лежандра. Шарупич Е. М., Уч. зап. Минск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 9, 87—90

Доказана теорема: Если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[-1,1]$ производную второго порядка с ограниченным изменением, то для остатка $R_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x)$ по многочленам Лежандра имеет место неравенство

$$|R_n(x)| < V_2/n \qquad (n \geqslant 2)$$

для всех $x \in [-1,1]$, где V_2 — полное изменение производной $f''(x)$ на $[-1,1]$. В. К. Захаров

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

5969. О некоторых неопределенных интегралах, содержащих бесселевы функции. Форд (On certain indefinite integrals involving Bessel functions. Ford F. A. J.), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 2, 157—161 (англ.)

Рассматриваются интегралы от произведения показательной функции и модифицированных бесселевых функций I_0, I_1:

$$f(\lambda, X, T) = \int_X^T e^{-\lambda w} \frac{I_1[(w^2 - X^2)^{1/2}]}{(w^2 - X^2)^{1/2}}\, dw,$$

$$g(\lambda, X, T) = \int_X^T e^{-\lambda w} I_0[(w^2 - X^2)^{1/2}]\, dw,$$

$$h(\lambda, X, T) = \int_X^T w e^{-\lambda w} I_0[(w^2 - X^2)^{1/2}]\, dw,$$

$$p(x, y) = \int_0^x 2ue^{-(u^2 + y^2)} I_0(2uy)\, du.$$

Показывается, что между ними имеет место ряд соотношений, как например:

$$(1 - \lambda^2)\, h(\lambda, X, T) = \lambda T e^{-\lambda T} I_0(Z) + e^{-\lambda T} Z I_1(Z) -$$

$$- \lambda X e^{-\lambda X} - \lambda g(\lambda, X, T) - \lambda X^2 f(\lambda, X, T),$$

где $Z^2 = T^2 - X^2$. Указываются и некоторые специальные случаи, из которых здесь упомянем следующие два:

$$f(1, 0, T) = \int_0^T e^{-w} \frac{I_1(w)}{w}\, dw = 1 - e^{-T}[I_0(T) + I_1(T)],$$

$$g(\lambda, X, \infty) = (\lambda^2 - 1)^{-1/2} \exp\{-(\lambda^2 - 1)^{1/2} X\},\ \lambda > 1.$$

А. К. Харадзе

5970. Новое асимптотическое представление полиномов Лежандра посредством функций Бесселя. Гатески (Una nuova rappresentazione asintotica dei polinomi di Legendre mediante funzioni di Bessel Gatteschi Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1956, **11**, № 2, 203—209 (итал.)

Известны асимптотические формулы типа Хильба для классических ортогональных полиномов. В частности, для полиномов Лежандра имеет место следующее представление:

$$\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{1/2} P_n(\cos\theta) = J_0\{(n + 1/2)\theta\} + \delta(\theta), \qquad (1$$

причем $\delta(\theta) = O(\theta^2)$, если $0 < n\theta < 1$, и $\delta(\theta) = O(\theta^{1/2} n^{-3/2})$, если $n\theta \geqslant 1$, $\theta \leqslant \pi - \varepsilon$.

В статье дано новое асимптотическое представление, в котором, кроме первого члена правой части форму

лы (1), выделяется второе слагаемое и вместе с тем дается оценка соответствующего дополнительного члена. Это представление имеет вид:

$$\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{1/2} P_n(\cos\theta) = J_0\{(n+1/2)\theta\} - \frac{\theta}{24(n+1/2)} J_1\{(n+1/2)\theta\} + \varepsilon(\theta), \qquad (2)$$

где $J_0(t)$, $J_1(t)$ — функции Бесселя, а оценка дополнительного члена дается следующими равенствами:

$\varepsilon(\theta) = \theta^4 O(1)$, если $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2n}$; $\varepsilon(\theta) = \theta^{5/2} O(n^{-3/2})$, если $\frac{\pi}{2n} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Дано применение формулы (2) к вычислению корней полинома Лежандра. Если $j_{0,k}$ ($k = 1,2,\ldots$) обозначают положительные корни функции Бесселя $J_0(t)$, расположенные в возрастающем порядке

$$0 = j_{0,0} < j_{0,1} < j_{0,2} < \ldots,$$

то корни θ_{nk} ($k = 1,2,\ldots,n$) функции $P_n(\cos\theta)$ при фиксированном k выражаются равенством

$$\theta_{nk} = \frac{j_{0,k}}{n+1/2}\left\{1 - \frac{1}{24(n+1/2)^2}\right\} + O(n^{-5}),$$

а в соответствии с этим корни $x_{n,k} = \cos\theta_{n,k}$ полинома Лежандра $P_n(x)$ получают выражение

$$x_{n,k} = 1 - \frac{j_{0,k}}{2(n+1/2)^2} + \frac{j_{0,k}^2 + j_{0,k}^4}{24(n+1/2)^4} + O(n^{-6}).$$

Имеются опечатки. Среди них укажем здесь на неравенства из второй формулы (4) (стр. 204); следует писать: $\frac{\pi}{2n} < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

А. К. Харадзе

5971. Обобщенные присоединенные функции Лежандра. Кёйперс (Generalized Legendre's associated functions. Kuipers L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 55—56 (англ.)

Дифференциальное уравнение

$$(1-z^2)\frac{d^2w}{dz^2} - 2z\frac{dw}{dz} + \left\{k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right\} w = 0$$

имеет два линейно независимых решения $P_k^{m,n}(z)$ и $Q_k^{m,n}(z)$, которые и являются обобщенными присоединенными функциями Лежандра. Эти функции удовлетворяют нескольким рекуррентным формулам, в том числе, например, соотношению между $P_{k-1}^{m,n}$, $P_k^{m,n}$ и $P_{k+1}^{m,n}$, которое хорошо известно в случае $m = n$. Имеется также интегральная формула

$$\int_{-1}^{1} \{P_k^{m,n}(z)\}^2 dz = \frac{1}{2^{m-n-1}} \frac{1}{2k+1} \frac{\Gamma\left(k+\frac{m-n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(k-\frac{m-n}{2}+1\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(k+\frac{m+n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(k-\frac{m+n}{2}+1\right)},$$

5972. Свойства обобщенных присоединенных функций Лежандра. Мёленбелд (Properties of the generalized Legendre's associated functions. Meulenbeld B.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 60 (англ.)

5973. Некоторые соотношения для функций Гегенбауэра. Виленкин Н. Я., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 3, 167—172

Как известно, реализация операторов неприводимого представления группы вращений трехмерного пространства, как преобразований функций, естественным образом приводит к различным классам специальных функций. На такого рода теоретико-групповой основе возникают, например, системы сферических функций — инвариантные относительно вращений (Гельфанд И. М., Шапиро З. Я., Успехи матем. наук, 1952, 7, № 1, 3—117).

В реферируемой работе устанавливается ряд соотношений для функций Гегенбауэра $C_n^p(\cos\lambda)$, допускающих теоретико-групповое истолкование, поскольку они связаны с представлениями группы вращений евклидовых пространств. Приведем здесь два из этих соотношений, исходными для которых являются обобщенная формула Лапласа, с одной стороны, и аналог формулы Родрига с другой:

$$C_n^p(\cos\lambda) = \frac{2\Gamma(2p+n)\,\Gamma(p+1/2)\,\Gamma(2t)}{\Gamma(2p)\,\Gamma(p-t)\,\Gamma(n+2t)\,\Gamma(t+1/2)} \times \times \int_0^{\pi/2} C_n^t\left(\frac{\cos\lambda}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\lambda\cos^2\theta}}\right) \times \times (\sin^2\theta + \cos^2\lambda\cos^2\theta)^{n/2} \sin^{2t}\theta \cos^{2p-2t-1}\theta\, d\theta,$$

$$\mathrm{Re}(p) > \mathrm{Re}(t) > -1/2.$$

$$C_{n-k}^{p+k}(\cos\lambda)\sin^k\lambda = \frac{(-2i)^k\,\Gamma(2p-1)\,\Gamma(2p+n+k)\,\Gamma(p+k+1/2)\,k!}{\sqrt{\pi}\,n!\;\Gamma(2p+2k)\,\Gamma(2p+k-1)\,\Gamma(p)} \times \times \int_0^{\pi} C_k^{p-1/2}(\cos\theta)(\cos\lambda + i\sin\lambda\cos\theta)^n \sin^{2p-1}\theta\, d\theta,$$

$$\mathrm{Re}(p) > 1.$$

С этой же точки зрения рассматриваются и другие соотношения, в частности соотношение, связанное с теоремой сложения для функций Гегенбауэра.

А. К. Харадзе

5974. Ряды E-функций. Рагаб (An E-function series. Ragab F. M.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 65 (англ.)

5975. Некоторые многочлены, связанные с тэта-функциями. Карлиц (Some polynomials related to theta functions. Carlitz L.), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **41**, 359—373 (англ.)

Автор исследует многочлены

$$H_n(x,q) = \sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} x^r,$$

где

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(1-q^{n-r+1})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)}, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 1,$$

и многочлены $G_n(x,q) = H_n(x,q^{-1})$.

Полученные соотношения иногда напоминают подобные соотношения для многочленов Эрмита (например, производящая функция, разложение H_{m+n} по произведениям $H_{m-r}H_{n-r}$, формула Кристоффеля-Дарбу, рекуррентные формулы и т. п.).

Рассматривая рекуррентное соотношение

$$H_{n+1} = (1+x)H_n - (1-q^n)xH_{n-1} \quad (n \geqslant 1)$$

как разностное уравнение, автор ищет другое решение u_n этого уравнения при условиях $u_0 = 0$, $u_1 = 1$. Дается явная формула для многочлена u_n и исследуются свойства этого многочлена. Э. Я. Риекстыньш

5976 Д. Приложение теории гипергеометрических функций к задаче о колебаниях стержней переменного сечения. Карамышкин В. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1958

5977 Д. Введение в теорию гиперсферических гармоник. Хофсоммер (Introduction to the theory of hyperspherical harmonics. Hofsommer Dirk Johannes.— Dis. ilmu pasti dan ilmu alam pada, Univ. Djakarta, 1955, 79 pp.) (англ.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

5978. Обобщение теоремы А. М. Эфроса. Темкин А. Г., Инж.-физ. ж., 1958, 1, № 4, 90—92

Рассматриваются два интегральных преобразования некоторой функции $f(\theta)$ по конечным промежуткам (α_1, α_2), (β_1, β_2) с ядрами $a(t, \theta)$ и $b(t, \theta)$:

$$[a^*f] = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} a(t, \theta) f(\theta)\, d\theta, \quad [b^*f] = \int_{\beta_1}^{\beta_2} b(t, \theta) f(\theta)\, d\theta$$

и путем перестановки порядка интегрирования выводится равенство $[b^*[a^*f]] = [[b^*a]^*f]$.

Однако нельзя, как это делает автор, получать из этого равенства в качестве частного случая теорему А. М. Эфроса, ибо в случае бесконечных пределов возможность перестановки порядка интегрирования не обоснована. Я. С. Уфлянд

5979. О некоторых интегральных представлениях действительных функций на реальной полуоси. Обрешков (Върху някои интегрални представяния на реални функции по реалната полуос. Обрешков Н.), Изв. Матем. ин-т.Ълг. АН, 1958, 3, № 1, 3—28 (болг.; рез. русск., франц.)

Рассматривается представление действительных функций интегралами вида

$$f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt)\varphi(t)\, dt, \qquad (1)$$

$$f(x) = \int_0^\infty \Phi(xt)\, d\omega(t). \qquad (2)$$

В прежних работах автора рассмотрены случаи, когда $\Phi(x) = \int_0^\infty t^\delta e^{-x|t-t}\, dt$ (Годишник Софийск. ун-т, 1950/51, 1951/52, 47, 109—134 и РЖМат, 1954, 3757) и $\Phi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty t^\delta u^\alpha e^{-t-u-x|tu} dtdu$ (РЖМат, 1956, 6671).

В настоящей работе

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_p^{\alpha_p} \exp\left(-u_1 - u_2 - \dots - u_p - \frac{x}{u_1 u_2 \dots u_p}\right) du_1 du_2 \dots du_p.$$

Доказывается, что $\Phi(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\Phi(x) = (-1)^{p-1}\Phi(x),$$

где оператор L определен следующим образом:

$$\Phi_1(x) = x^{\alpha_1+1}[x^{-\alpha_1}\Phi'(x)]',$$

$$\Phi_2(x) = x^{\alpha_2+1}[x^{-\alpha_2}\Phi_1(x)]',$$

. . . . . .

$$\Phi_p(x) = x^{\alpha_p+1}[x^{-\alpha_p}\Phi_{p-1}(x)]' = LF(x).$$

Дается решение интегральных уравнений (1) и (2) относительно функций $\varphi(x)$ и $\omega(x)$.

Пусть интеграл (1) сходится при $x = c > 0$ и $f_0(x) = f(x)$, $f_1(x) = Lf(x)$, $f_2(x) = Lf_1(x)$, ... Тогда в каждой точке непрерывности $x = \alpha$ функции $\varphi(x)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n(p-1)}e^{(p+1)\alpha}}{\alpha^{n+1}(\sqrt{2\pi})^{p+1} n^{\delta_1}} f_n\left(\frac{n^{p+1}}{\alpha}\right) = \varphi(\alpha),$$

$$\delta_1 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \frac{p-1}{2}.$$

Условие непрерывности $\varphi(x)$ в точке $x = \alpha$ можно заменить условием

$$\int_\alpha^{\alpha+\tau} |\varphi(t) - \varphi(\alpha)|\, dt = o(1), \quad \tau \to 0.$$

Необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение (2) имело монотонно возрастающее при $t \geqslant 0$, ограниченное решение $\omega(t)$ состоит в следующем: $f(x)$ стремится к определенному пределу, когда $x \to \infty$, имеет производные произвольного порядка при $x > 0$, $f(0) = f(+0)$.

Функции $f_n(x) = Lf_{n-1}(x)$ $[f_0(x) = f(x)]$ удовлетворяют при $x > 0$ условию

$$(-1)^{n(p-1)} f_n(x) \geqslant 0.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ предполагаются различными и находятся между -1 и 0. Преобразования (1) и (2) являются обобщением преобразований Лапласа и Бесселя.

Автор указывает во французском резюме, что его результаты относительно уравнений (1) и (2) могут быть получены из результатов книги Хершмана и Уиддера (РЖМат, 1956, 8125К). Б. М. Гагаев

5980 К. Операционная математика. Черчилл (Operational mathematics. 2nd ed. Churchill Ruel Vance. New. York, McGraw-Hill Book Co., 1958, 346 pp., ill., 7.00 doll.), Publishers' Weekly, 1958, 174, № 3, 87 (англ.)

5981 К. Операционное исчисление. Специальные функции. Фазекаш, Фрей (Műszaki matematikai gyakorlatok. C. 1. Operátorszámítás. Speciális függvények. Fazekas Ferenc, Frey Tamás. Budapest, Tankönyvkiadó, 1957, 288 l., ill., 27 Ft.) (венг.)

Первая часть книги (автор-Фазекаш) содержит основы операционного исчисления в форме справочника. Автор занимается почти исключительно преобразованием Лапласа. Асимптотические теоремы не упоминаются. Таблицы преобразований Лапласа не приложены. Даются 135 хорошо выбранных и разработанных примеров, большинство примеров из области электротехники и физики.

Во второй части (автор—Фрей) § 1 содержит сжатое изложение различных глав теории функций (упоминаются: аналитическое продолжение, мероморфные и целые функции, асимптотическое разложение, метод перевала). На этой основе излагается теория некоторых специальных функций: гамма- и бэта-функций, эллиптических функций и интегралов, потом элементы теории линейных дифференциальных уравнений в комплексной области. Часть материала дается в форме 325 разработанных задач (только среди последних встречаемся с

функциями Бесселя, Лежандра, Эрмита и т. д. как решениями некоторых дифференциальных уравнений). Трактовка в основном построена на книгах Уиттекера—Ватсона и Гурвица—Куранта. Число практических задач мало.

Примечание референта. Из библиографии к первой части отсутствовали известные книги Дёча. По мнению референта, расчленение книги слишком сложно.

P. Medgyessy

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

5982. **Вычисление интегралов, появляющихся в задачах замедления частиц. Мецгер** (Evaluation of integrals arising in particle attenuation problems. Mezger Fritz W.), J. Math. and Phys., 1958, **37**, № 1, 79—88 (англ.)

Требуется найти число нейтронов, проходящих в единицу времени через единицу площади поверхности замедлителя, имеющего форму кругового цилиндра радиуса a и высоты l. Введя цилиндрические координаты r, φ, z и обозначив через

$$j(z', \cos\theta)\, a dz' d\varphi$$

рассчитанное на единицу телесного угла количество нейтронов, выходящих из элемента поверхности $dS' = a dz' d\varphi$ и пересекающих поверхность цилиндра в точке $M(a, 0, z)$ в направлении, образующем угол θ с нормалью к цилиндру, мы разлагаем функцию $j(z', \cos\theta)$ в ряд

$$j(z', \cos\theta) = \sum_{i,k} C_{i,k} (z' - z)^i \cos^k\theta,$$

считая, что j не зависит от φ. Полное количество нейтронов, пересекающих поверхность цилиндра в точке $M(a, 0, z)$, рассчитанное на единицу площади поверхности, выражается интегралом

$$J(z) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{l} \frac{j(z', \cos\theta) \cos\theta\, e^{-\sqrt{(z'-z)^2+a^2}}}{(z'-z)^2 + a^2} dz' d\varphi,$$

где

$$\alpha = \alpha(\varphi) = \sqrt{2a^2(1 - \cos\varphi)}.$$

При этом

$$\cos\theta = \frac{a^2}{2a\sqrt{(z'-z)^2 + a^2}}$$ и

Положив $z' - z = y$

$$J_{n,m} = J_{n,m}(\alpha, \delta) = \int_\delta^\infty \frac{y^m e^{-\sqrt{y^2+\alpha^2}}}{(y^2+\alpha^2)^{n/2}} dy,$$

мы находим:

$$J(z) = \frac{a}{4\pi} \sum_{i,n} \frac{C_{i,n-3}}{(2a)^{n-2}} \int_0^{2\pi} \alpha^{2n-4} [J_{n,i}(\alpha - z) - J_{n,i}(\alpha, l - z)] d\varphi.$$

Для интегралов $J_{n,m}(\alpha, \delta)$ и их производных по α выводятся некоторые рекуррентные соотношения.

Функции $J_{1,0}$, $J_{0,0}$, $J_{-1,0}$, $J_{2,0}$ выражаются через функции Макдональда $K_0(\alpha)$, $K_1(\alpha)$ и табулированные функции

$$E(\alpha, \delta) \text{ и } F(\varphi, b).$$

Для $J_{n,m}(\alpha, 0)$ в случае четного $m = 2i$ имеет место соотношение

$$-n\alpha^2 J_{n+2,2i}(\alpha, 0) - \alpha^2 J_{n+1,2i}(\alpha, 0) + [n - (2i+1)] J_{n,2i}(\alpha, 0) + J_{n-1,2i}(\alpha, 0) = 0,$$

причем

$$J_{1,2i}(\alpha, 0) = \frac{\Gamma(i + 1/2)}{\sqrt{\pi}} (2\alpha)^i K_i(\alpha);$$

$$J_{0,2i}(\alpha, 0) = \frac{\Gamma(i + 1/2)}{\sqrt{\pi}} (2\alpha)^i [2iK_i(\alpha) + \alpha K_{i-1}(\alpha)];$$

$$J_{-1,2i}(\alpha, 0) = \frac{\Gamma(i + 1/2)\,(2\alpha)^i}{\sqrt{\pi}} \{2i(2i+1) K_i(\alpha) + (4i-1)\alpha K_{i-1}(\alpha) + \alpha^2 K_{i-2}(\alpha)\};$$

$$J_{2,2i}(\alpha, 0) = (-\alpha^2)^i \left\{\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha K_0(u)\, du\right\} + \sum_{h=1}^{i} \frac{(-\alpha^2)^{h-1}\Gamma(i - h + 1/2)\,(2\alpha)^{i-h}}{\sqrt{\pi}} \{2(i-h) K_{i-h}(\alpha) + \alpha K_{i-h-1}(\alpha)\}.$$

Ю. Л. Рабинович

5983. **Применение ортогональных степенных полиномов для анализа переходных процессов в многокаскадных усилителях. Самсоненко С. В.**, Радиотехн. и электроника, 1956, 1, № 3, 269—273

5984 К. **Анализ переходных процессов в линейных цепях. Т. I. Двухполюсники с сосредоточенными параметрами. Уибер** (Linear transient analysis. Vol. I. Lumpedparameter two-terminal networks. Weber Ernst. John Wiley and Sons, Inc., New York; Chapman and Hall, Ltd., London, 1954, xiv, 348 pp., 7.50 doll.) (англ.)

Этот том замечательно дополняет важный пробел в имеющейся литературе для инженеров и математиков, работающих в теории цепей. Он касается как классических, так и современных (в прикладном смысле) операционных методов для анализа смешанных, линейных, динамических систем, служащих примером электрических цепей.

В первой главе автор развивает теорию электрических цепей, исходя из уравнений Максвелла электромагнитного поля, которая приводит его к формулировке узловых методов анализа сети. Вторая глава касается классического решения интегро-дифференциальных уравнений сети, причем уделяется особое внимание начальным условиям и разрывным функциям возбуждения. В этой главе рассматривается также принцип суперпозиции, который естественно приводит к концепции адмитанса и интегральной теореме Карсона. В гл. 3 рассматриваются аналоги электрических явлений в механических и тепловых системах, что значительно дополняет изложение. В гл. 4 автор снова возвращается к решению задачи цепи, используя на этот раз операционное исчисление Хевисайда — Жеффрея. Современное направление в инженерном образовании имеет тенденцию к игнорированию оператора Хевисайда в пользу преобразования Лапласа. Это не так прискорбно, хотя и удаляет студентов на шаг дальше от физической действительности. По крайней мере одним убедительным аргументом для включения

операционного исчисления является то, что оно часто появляется в важной инженерной литературе. Метод преобразования Лапласа, который для многих читателей будет „главным сюжетом" этого тома, очень ясно излагается в гл. 5. В последней главе автор рассматривает спектр частот. Он отправляется от рядов Фурье и показывает переход к интегралу Фурье. Идеи, излагаемые в этой главе, являются необходимыми для ясного понимания операций методов интегральных преобразований, и было бы лучше поместить в книге этот материал раньше.

Нет сомнений, что этот том будет благосклонно воспринят математиками, физиками и инженерами. Стиль книги краткий, но ясный, со многими диаграммами, делающими чтение ее понятным. Очень ценной особенностью книги является обилие ссылок на литературу. В конце каждой главы приводится большое количество задач. R. Kahal

Перевод из Math. Revs, 1955, **16** № 2, 203.

См также: 5411, 5484, 5697, 5708, 5731, 5732, 5733, 5783

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

5985. Исчисление с целыми линейными операторами (I). Целая линейная производная первого порядка. Рэдулеску (Calculul cu operatorii liniari întregi (I). Derivarea liniară întreagă de primul ordin. Rădulescu M.), Lucrările Inst. petrol. gaze şi geol. Bucureşti, 1958, **4**, 293—336 (рум.; рез. русск., англ.)

Предлагается абстрактная схема для некоторого класса дистрибутивных операторов, встречающихся в анализе, как, например, операторы предельного перехода, составления конечной разности, разностного отношения, дифференцирования, умножения на функцию и др.

Пусть $D(y)$ — совокупность комплексных функций $y(x)$ вещественного аргумента $x \in [a,b]$. Дистрибутивный оператор L с областью определения $D_L \subset D(y)$ и областью значений в $D(y)$ называется целым линейным тотальным оператором, если существуют $\sigma_i^{(L)} \subset D(y)$ $(i = 0,1,2)$ такие, что для y_1 и $y_2 \subset D_L$

$$L(y_1,y_2) = \sigma_0^{(L)} y_1 y_2 + \sigma_1^{(L)}(y_1 L y_2 + y_2 L y_1) + \sigma_2^{(L)} L y_1 L y_2 \qquad (L\,\mathrm{II})$$

при этом функции $\sigma_i^{(L)}$ удовлетворяют одному из двух групп условий:

$$\begin{cases} \sigma_0^{(L)} + \sigma_1^{(L)} L\,1 = 0, \\ \sigma_1^{(L)} + \sigma_2^{(L)} L\,1 - 1 = 0, \\ \sigma_0^{(L)} + 2\sigma_1^{(L)} L1 + \sigma_2^{(L)}(L1)^2 - L1 = 0, \end{cases} \qquad (L'\,\mathrm{III})$$

$$\begin{cases} \sigma_0^{(L)} + \sigma_1^{(L)} L\,1 - L\,1 = 0, \\ \sigma_1^{(L)} + \sigma_2^{(L)} L1 = 0, \end{cases} \qquad (L''\,\mathrm{III})$$

Оператор N называется целым линейным нормальным оператором, ассоциированным с L, если $Ny = \sigma_1^{(L)} y + \sigma_2^{(L)} Ly$ и $N(y_1 y_2) = Ny_1 \cdot Ny_2$ $(y_1, y_2 \subset_{DL})$. Основным свойством целых линейных нормальных операторов автор, по-видимому, считает соотношение $Ny(x) = y(Nx)$ для любой алгебраической или трансцендентной функции $y(x)$ (теорема 5-1).

Примечание референта. Исследование системы аксиом неубедительно. Основной результат работы ошибочный, в чем можно убедиться, взяв $y(x) = e^x$, а в качестве N — оператор аннулирования, ассоциированный таким же оператором L. К. М. Фишман

5986. О некоторых квазинормированных пространствах. Пырву (Asupra unor spaţii cuasi normate. Pârvu Monica Pavel), An. Univ. «C. I. Parhon». Ser. ştiinţ. natur., 1957, № 14, 15—23 (рум.; рез. русск., франц.)

Векторное пространство E над полем скаляров Φ, в котором определена квазинорма $\|x\|$ $(x \in E)$, отличающаяся от обычной нормы заменой условия положительной однородности условием $\|\lambda x\| = |\lambda^r| \cdot \|x\|$ $(\lambda \in \Phi)$, где $0 < r \leqslant 1$, называется квазинормированным пространством, если ввести в него метрику $\rho(x,y) = \|x - y\|$. Если такое пространство является полным, то оно называется пространством (CN). Примерами пространств (CN) служат пространство L^r $(0 < r \leqslant 1)$ всех измеримых на $(0,1)$ функций $f(x)$, суммируемых со степенью r, если ввести квазинорму $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$, и пространство l_r последовательностей $x = \{x_n\}$ по отношению к квазинорме $\|x\| = \sum_n |x_n|^r$. Произведение конечного числа и фактор-пространства пространств (CN) при определенном образе введенной квазинорме становятся также (CN)-пространством. В работе рассматривается еще ряд элементарных свойств линейных операторов в пространствах типа (CN). Переходя к линейным квазинормированным кольцам, автор переносит ряд предложений, относящихся к свойствам обратных элементов, резольвентному множеству и аналитическим функциям со значениями в кольце.

Примечание референта. В доказательстве теоремы 4.2 надо заменить утверждение $y_n \in \dot{x}_n$ через $z_n \in \dot{x}_n$ и неравенство $\|x_n - z\| \leqslant \|y_n - z\|$ через $\|x_n - z\| \leqslant \|z_n - z\|$. К. М. Фишман

5987. К теории норм функций. Люксембург (On the theory of function norms. Luxemburg W. A. J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 84—85 (англ.)

5988. Характеристика компактных метрических пространств. Исэки (A characterisation of compact metric spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 5, 255—256 (англ.)

Устанавливается характеристическое свойство компактных метрических пространств. Пусть ρ — метрика пространства S и $f(x)$ — функция, заданная на $S \cdot f$ называется вполне компактной на S, если каковы бы ни были последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$, для которых $\rho(x_n, x'_n) \to 0$ при $n \to \infty$, существуют подпоследовательности, для которых $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(x'_{n_k})$ и конечны. Доказывается теорема: Метрическое пространство S компактно тогда и только тогда, когда всякая функция, непрерывная на S, вполне компактна на S. М. М. Вайнберг

5989. О (BS)-пространствах (I). Цзян Цзэ-цзянь, Лю Лун-фу. (Jiang Ze-jian, Liu Long-fu), Дунбэй женьминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1958, № 1, 131—132 (кит.; рез. франц.)

Локально выпуклое пространство авторы называют (BS)-пространством, если его „бочка" поглощает любое ограниченное множество. Установлена связь между (BS)-пространствами и другими классами линейных топологических пространств: Все полные отделимые локально выпуклые пространства суть (BS)-пространства; каждое t-пространство есть (BS)-пространство; для того чтобы (BS)-пространство было квази-t-пространством, необходимо и достаточно, чтобы оно было t-пространством; если (BS)-пространство является борнологическим пространством, то оно есть t-пространство. Теорема: Пусть E и F — два отделимых локально выпуклых пространства, $\mathfrak{S}$ — совокупность ограниченных множеств в E. $L(E,F)$ — линейное пространство всех непрерывных линейных отображений E в F. Для того чтобы каждое ограниченное множество из $L(E,F)$ было ограниченным в $\mathfrak{S}$-топологии, необходимо и достаточно, чтобы E было (BS)-пространством. Доказательства не приведены.

М. И. Кадец

5990. Об одном классе линейных преобразований. Кёниг (Eine Klasse von linearen Transformationen. König H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 82 (нем.)

5991. Обобщенные почти периодические функции в группах. Фёльнер (Generalized almost periodic functions in groups. Følner E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 49 (англ.)

5992. Аналитические функции как ультрараспределения в операционном исчислении. Себаштьян-и-Сильва (Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul operationnel. Sebastião e Silva J.), Math. Ann., 1958, **136**, № 1, 58—96 (франц.)

„Ультрараспределениями" автор называет преобразования Фурье функционалов (обобщенных функций) на основном пространстве Λ_∞ бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)(-\infty<x<\infty)$, удовлетворяющих неравенствам $|\varphi^{(k)}(x)| \leqslant C_k e^{-a|x|}$ $(k=0,1,2,\ldots, a=a(\varphi))$. Иными словами, ультрараспределения суть функционалы на пространстве всех целых функций, убывающих по горизонтальным прямым быстрее любой отрицательной степени независимого переменного. Каждому функционалу $f\in\Lambda'_\infty$ можно сопоставить пару функционалов $f^+\in\Lambda'_\infty$, $f^-\in\Lambda'_\infty$, из которых первый сосредоточен на полуоси $x>0$, а второй — на полуоси $x<0$ и так, что $f=f^+-f^-$ с точностью до функционала, сосредоточенного в точке $x=0$. Отсюда выводится, что каждому ультрараспределению можно сопоставить две функции $g^+(s)$ и $g^-(s)$, первая из которых определена и аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} s>b$, вторая — в полуплоскости $\operatorname{Im} s<-b$; обе они имеют рост по горизонтальным прямым не выше степенного и определяют исходное ультрараспределение с точностью до полинома. Рассматриваются частные случаи: ультрараспределения „умеренного роста" (т. е. расширяющиеся на пространство S Шварца); у соответствующих функций $g^+(s)$ и $g^-(s)$ $b=0$, и естественно определяются как функционалы на S; величины $g^+(\sigma+i0), g^-(\sigma-i0)$ $(\sigma=\operatorname{Re} s)$; функционалы „с ограниченным носителем", который можно отождествить с дифференциальными операторами бесконечного порядка, типа $e^{\xi\frac{d}{dx}}$; функционалы с носителем, ограниченным с одной стороны, и некоторые другие.

Примечание референта. Автор, видимо, незнаком с советскими работами по теории обобщенных функций (например, РЖМат, 1958, 5887). Г. Е. Шилов

5993. О структуре операторов Микусинского в одном псевдонормированном пространстве. Рябцев И. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 143—151

Рассматривается возможный вариант операторного исчисления Микусинского. Определяется класс основных функций Φ — множество всех комплекснозначных функций $\varphi(t)$, непрерывных со всеми производными на $[0,\infty]$ и обращающихся в нуль со всеми производными при $t=0$. В Φ вводится псевдонорма

$$\|\varphi\|_i = \max_{\substack{0\leqslant t\leqslant i\\ 0\leqslant k\leqslant i}} |\varphi^{(k)}(t)| \quad (i=1,2,\ldots).$$

Φ есть пространство типа $[B_0]$ Мазура — Орлича. Для пространств типа $[B_0]$ справедлива теорема: Если непрерывный линейный оператор отображает пространство типа $[B_0]$ на пространство того же типа взаимно однозначно, то обратный оператор тоже непрерывен.

Обобщением $\{f\}$ любой функции f из класса F всех суммируемых на каждом отрезке $[0,T]$ функций автор называет оператор

$$\{f\}\varphi = \int_0^t f(t-\Theta)\,\varphi(\Theta)\,d\Theta,$$

определенный на всем пространстве Φ. Множество $\{F\}$ операторов $\{f\}$ относительно естественным образом определенных действий образует коммутативное кольцо без единицы. Обобщенной функцией называется каждый элемент A поля Φ^*, полученного присоединением к $\{F\}$ единичного оператора и всех операторов, обратных для обобщений, отличных от $\{0\}$. Каждая отличная от нуля обобщенная функция есть линейный оператор (не обязательно непрерывный), отображающий элементы пространства Φ взаимно однозначно друг в друга. В частности, оператор, обратный для $\{1\}$ есть оператор дифференцирования D, определенный на всем Φ и непрерывный.

Оператор сдвига определяется как $D\{1\}_\tau$, где

$$\overset{\perp}{\tau} f(t) = \begin{cases} 0, & 0\leqslant t\leqslant\tau,\\ f(t-\tau), & t>\tau. \end{cases}$$

Дальнейшее изложение посвящено исследованию вопросов, специфических для данного варианта операторного исчисления. Основной результат: всякий, определенный на всем Φ и непрерывный оператор $A\in\Phi^*$ разлагается в ряд сдвигов по обобщенным производным от некоторых функций точки.

М. И. Кадец

5994. Обобщение теории распределений Коревара. II. Яманака (Une extension de la théorie des distributions de M. J. Korevaar. II. Yamanaka Takesi), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1957, **6**, № 1, 79—88 (франц.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 6920.

Определяется преобразование Фурье обобщенных функций многих переменных. Новых результатов нет.

Г. И. Кац

5995. Теория распределений. Солцер (The theory of distributions. Saltzer Charles), Advances Appl. Mech. Vol. 5. New York, N. Y., 1958, 91—110 (англ.)

Краткий очерк основ теории обобщенных функций.

Г. П. Акилов

5996. Границы в обобщенных кольцах бесконечных матриц. Маттьюс (Bounds on generalised rings of

infinite matrices. Matthews G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1958, **A61**, № 3, 354—361; Indagationes math., 1958, **20**, № 3, 354—361 (англ.)

Система $\mathfrak{F}$ бесконечных матриц называется обобщенным кольцом, если она содержит единичную матрицу I и замкнута относительно сложения и умножения матриц. Границей в обобщенном кольце $\mathfrak{F}$ называется числовая неотрицательная функция $|A|$ $(A\in\mathfrak{F})$ такая, что: 1) $|cA| = |c|\,|A|$; 2) $|A+B| \leqslant |A| + |B|$; 3) $|AB| \leqslant |A|\,|B|$; 4) $|a_{ij}| \leqslant |A|$ $(i, j=1, 2, \ldots)$; 5) $|I| = 1$. Здесь $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ — матрицы из $\mathfrak{F}$, c — скаляр.

Строится пример неассоциативного обобщенного кольца с границей такого, что существует матрицы $A, B\in\mathfrak{F}$, для которых ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}b_{jk}$ сходится не абсолютно при некоторых i, k.

Во второй части работы доказывается несколько простых теорем о по-координатной сходимости последовательности матриц. Г. П. Акилов

5997. Положительные функционалы на алгебрах. Сяо-шин, Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 5, 208—209

5998. Некоторые теоремы о равномерной полной непрерывности. Го Да-цзюнь (в подл. Гуо Да-Дьюнь), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ) Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1958, № 1, 1—6 (кит.; рез. русск.)

Доказываются некоторые элементарные свойства равномерно вполне непрерывного множества (т. е. множества операторов с компактной суммой множеств образов сферы), понятие которого введено С. Л. Соболевым в связи с исследованием замыкания алгорифмов (РЖМат, 1957, 6694).

Приведем следующий результат: пусть множество операторов M, переводящих банахово пространство E_1 в рефлексивное банахово пространство E_2 (т. е. $E_2 = E_2^{**}$) равномерно вполне непрерывно. Если последовательность $\{x_n\}$ из E_1 слабо сходится и для любого элемента f из сопряженного пространства E_2^* последовательность $\{A_n^* f\}$ $(A_n\in M)$ сходится в смысле метрики пространства E_2^*, то последовательность $\{A_n x_n\}$ сходится к некоторому элементу $z\in E_2$. Ши Чжун-ци

5999. Операторы свертки, не принадлежащие к скалярному типу. Краббе (Convolution operators which are not of scalar type. Krabbe G. L.), Math. Z., 1958, **69**, № 4, 346—350 (англ.)

Доказывается, что оператор $\tau_\alpha x$ переноса $\{x_{n+\alpha}\}$ последовательности $x=\{x_n\}\in l_p$ при $\alpha=\pm 1$ и оператор H, определяемый на l_p матрицей $\left(\frac{1}{n-\nu}\right)_{n,\nu}$, не принадлежат к скалярному типу (в смысле Данфорда; РЖМат, 1955, 5132). Доказательство в основном опирается на свойства непрерывного соответствия между множеством полиномов на отрезке $[0,1]$ и множеством полиномов от оператора $J=-\frac{1}{2\pi i}H$. Ю. Н. Валицкий

6000. Соотношения между спектральным оператором и его скалярной частью. Фогел (The relations between a spectral operator and its scalar part. Foguel S. R.), Pacif J. Math., 1958, **8**, № 1, 51—65 (англ.)

Рассматривается разложение $T=S+N$ спектрального оператора в сумму скалярного и обобщенного нульстепенного операторов (в смысле Данфорда; РЖМат, 1955, 5132). Автор устанавливает следующие факты: 1. Если T компактен, слабо компактен или имеет замкнутую область значений, то этими же свойствами обладает оператор S. 2. Между спектрами (σ) операторов T и S и частями этих спектров — точечной (σ_p), непрерывной (σ_c) и остаточной (residual, σ_r) — выполняются следующие соотношения: $\sigma_c(S)\subset\sigma_c(T)$, $\sigma_p(T)\cup\sigma_r(T)\subset\sigma_p(S)\subset\sigma(T)$. 3. Каждый спектральный оператор T допускает представления $T=R+iJ$ $(RJ=JR)$ и $T=PU=UP$, причем спектры операторов R и J действительны, спектр P неотрицателен, спектр U лежит на единичной окружности; R и U суть скалярные операторы, J и P — спектральные операторы. 4. Если сумма (произведение) двух перестановочных скалярных операторов есть спектральный оператор, то этот оператор скалярен.

Ю. Н. Валицкий

6001. Расширения нормированной алгебры, допускающие обращение элементов. Аренс (Inverse-producing extensions of normed algebras. Arens Richard), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, № 2, 536—548 (англ.)

Основной результат работы состоит в следующем (теорема 3.1): элемент c коммутативной нормированной алгебры A обратим в некотором ее расширении B тогда и только тогда, когда $\inf_{\|a\|>1} |ca| = \xi > 0$ (3.11). При выполнении (3.11) за B можно взять $A(t)=A(x,t)/J$, где $t\geqslant\xi^{-1}$ и $A(x,t)$ — кольцо формальных степенных рядов $f=\sum a_n x^n$ с коэффициентами из A и нормой $\|f\| = \sum \|a_n\|\, t^n$, а J — идеал в нем, порожденный элементом $1-cx$. Рассматриваются возможность одновременного обращения нескольких элементов c_i и вопрос о величине норм $\|c_i^{-1}\|$ в B. Дается критерий (5.21) полупростоты кольца $A(t)$; в частности (теорема 6.2), если c порождает A и $\|ca\|\geqslant\|a\|$ для всех $a\in A$, то при t, превосходящих спектральный радиус c, $A(t)$ полупросто. В конце статьи приводится несколько нерешенных вопросов. Б. С. Митягин

6002. О кольце всех ограниченных непрерывных функций. Исибата (On the ring of all bounded continuous functions. Isiwata Takesi), Sci. Repts Tokyo, Kyoiku Daigaku, 1957, **A5**, 15 Oct., 293—294 (англ.)

Пусть $B(X)$ — нормированное кольцо всех действительнозначных ограниченных непрерывных функций на некотором вполне регулярном T_1-пространстве X с обычной нормой $\|b\| = \sup_{x\in X} |b(x)|$. Хорошо известна теорема Стоуна — Банаха: Если X и Y — компактные пространства и $B(X)$ и $B(Y)$ алгебраически изоморфны, то X и Y гомеоморфны. Многие авторы занимались как обобщением этого предложения (Myers S. B., Ann. Math., 1948, **49**, 132—140), так и перенесением его при тех или иных дополнительных предположениях и условиях нанекомпактные пространства (Shanks M. E., Bull. Amer. Math. Soc., 1951, **57**, 295; Перселл, РЖМат, 1958, 4548). В работе доказано: Если X и Y — вполне регулярные T_1-пространства и между X и Y существует алгебраический изоморфизм, переводящий разделяющие множества в разделяющие, то X и Y гомеоморфны. (Множество $B_1\subset B(X)$ называется разделяющим, если для любых двух точек x и x' $(x\neq x')$ из X найдется функция $b_1\in B_1$ такая, что $b_1(x)\neq b_1(x')$). Б. С. Митягин

6003. Теория операторов. Часть I. Отдельные операторы. Меррей (Theory of operators. Part. I. Single operators. Murray F. J.), Bull. Amer. Math. Soc., 1958, **64**, № 3, Part 2, 57—60 (англ.)

Обзор работ Дж. Неймана (J. von Neumann) за период с 1928 по 1932 г: абстрактное определение гильбертова пространства и распространение теории Гильберта на абстрактные ограниченные симметрические операторы; неадэкватность бесконечных матриц и неограниченных операторов; симметрические несамосопряженные операторы и их расширения; теория графика; каноническое разложение $A=S.V$ для несимметрического неограниченного оператора; характеристика спектра интегрального оператора. В. Э. Лянце

6004. Достаточное условие для того, чтобы интегральный оператор имел след. Стайнспринг (A suffi-

cient condition for an integral operator to have a trace. Stinespring W. Forrest), J. reine und angew. Math., 1958, **200**, № 3-4, 200—207 (англ.)

Ограниченный оператор T, действующий из одного гильбертова пространства в другое, называется оператором Гильберта — Шмидта, если в некотором (а тогда и в любом) ортонормальном базисе $\{e_\alpha\}$ сходится ряд $\sum_\alpha \| Te_\alpha \|^2$. Оператором, имеющим след, автор называет оператор, представимый в виде произведения двух операторов Гильберта—Шмидта. В том случае, когда оператор, имеющий след, отображает гильбертово пространство в себя, сумма его диагональных матричных элементов конечна и не зависит от выбора ортонормального базиса. Доказывается следующее предложение: Для того чтобы ограниченный оператор T имел след, достаточно, чтобы в некотором ортонормальном базисе $\{e_\alpha\}$

$$\sum_\alpha \| Te_\alpha \| < \infty. \tag{1}$$

Отмечается, что условие (1) не инвариантно; при переходе к другому базису оно может нарушиться. В связи с приведенным достаточным условием изучается вопрос о принадлежности к классу операторов, имеющих след, интегрального оператора

$$Tf = \int f(x)\, k(x)\, d\mu(x). \tag{2}$$

Предполагается, что ядро $k(x)$ определено в n-мерном евклидовом пространстве и исчезает вне куба со сторонами длины 2π, параллельными осям координат. Значения ядра лежат в некотором гильбертовом пространстве и поэтому оператор действует, вообще говоря, из одного гильбертова пространства в другое. Устанавливается, что если ядро $k(x)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$k(x) = \sum_\nu c_\nu\, e^{i\nu x} \tag{3}$$

$\left(\text{где } c_\nu = \frac{1}{(2\pi)^n} \int k(x)\, e^{-i\nu x}\, dx \text{ и } \sum_\nu \| c_\nu \| < \infty\right)$, то оператор (2) имеет след. Приводятся далее некоторые условия, налагаемые на функцию $k(x)$ и ее производные, понимаемые в обобщенном смысле, при которых ряд Фурье (3) абсолютно сходится Тем самым находятся другие достаточные условия, при выполнении которых оператор (2) имеет след. Результаты прилагаются к установлению абсолютной сходимости рядов Фурье функций, заданных на n-мерной компактной группе Ли.

В. Б. Лидский

6005. О сходимости к волновым операторам Мёллера. Хак (On convergencé to the Møller wave operators. Hack M. N.), Nuovo cimento, 1958, **9**, № 4, 731—733 (англ.)

Кук (РЖМат, 1958, 7854) показал, что при выполнении одного лишь условия

$$\int |V(r)|^2 dr < \infty \tag{1}$$

для самосопряженных операторов H_0 и H, определяемых во всем трехмерном пространстве дифференциальными операторами $H_0\varphi = -\Delta\varphi$ и $H\varphi = -\Delta\varphi + V\varphi$, существуют сильные пределы

$$\lim_{t\to\pm\infty} e^{iHt} e^{-iH_0 t} = U^{(\pm)},$$

причем операторы $U^{(\pm)}$ изометричны. В реферируемой работе приведены более тщательные оценки в методе Кука, позволяющие ослабить требование (1) следующим образом: $\int\limits_{|r|<R} |V(r)|^2 dr < \infty$ для любого конечного R, $V(r) = O(|r|^{-\alpha})$ при $|r| \to \infty$, причем $\alpha > 1$.

Л. Д. Фаддеев

6006. О приведении несамосопряженных операторов к простейшему виду. Сахнович Л. А., Успехи матем. наук, 1958, **13**, № 5, 204—206

6007. О представлении вполне непрерывного оператора в абстрактном гильбертовом сепарабельном пространстве. Могилевский Ш. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, **3**, 183—186

Для вполне непрерывного оператора A в гильбертовом пространстве вводятся фундаментальные элементы Шмидта φ_k и ψ_k, т. е. решения системы уравнений

$$\varphi_k = \mu_k A^* \psi_k, \quad \psi_k = \mu_k A \varphi_k \ (k = 1, 2, \ldots).$$

С помощью разложения по собственным элементам оператора A^*A доказывается следующая теорема: Всякий вполне непрерывный оператор A в абстрактном гильбертовом сепарабельном пространстве может быть представлен в виде одного из двух следующих разложений по фундаментальным элементам Шмидта:

$$A\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\Phi, \varphi_k)}{\mu_k} \psi_k$$

(если операторы A^*A и AA^* невырожденные) и

$$A\Phi = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\Phi, \varphi_k)}{\mu_k} \psi_k$$

(если операторы A^*A и AA^* вырожденные).

Примечание референта. Требование сепарабельности пространства, очевидно, является излишним.

Ю. Н. Валицкий

6008. Упорядоченность и коммутативность в банаховых алгебрах. Кертис (Order and commutativity in Banach algebras. Curtis Philip C., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 643—646 (англ.)

Сообщаются результаты Шермана (Sherman S., Amer. J. Math., 1951, **73**, 227—232), установленные им для симметричных банаховых колец. Пусть A — вещественное банахово (полное нормированное) кольцо с единицей, причем $\| 1 \| = 1$, C — замыкание множества конечных сумм квадратов элементов из A. Конус C порождает в A упорядочение. Если при этом A оказывается структурой, то кольцо A непременно коммутативно. Одновременно доказывается, что в дуальном конусе C', состоящем из положительных линейных функционалов с нормой, не превосходящей 1, экстремальные точки суть мультипликативные функционалы.

Аналогичный результат устанавливается и в случае, если A — банахово кольцо с инволюцией и с единицей, а C — замыкание множества конечных сумм элементов вида xx^*. Тогда C — конус в вещественном линейном пространстве H, состоящем из самосопряженных элементов кольца A. Если при упорядочении, порождаемом конусом C, множество H оказывается структурой, то кольцо A коммутативно, а экстремальные точки конуса C' суть мультипликативные функционалы.

Б. З. Вулих

6009. Некоторые примеры факторов. Пуканский (Some examples of factors. Pukánszky L.), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 135—156 (англ.)

Устанавливается существование симметрических неизоморфных факторов типа III. Для факторов типа II_1 этот результат был получен Мерреем (Murray F. J.) и Нейманном (Neumann J. von). Пусть N — подкольцо

кольца операторов M. Обозначим через T подкольцо кольца M, порожденное унитарными операторами $U \in M$ такими, что $UNU^* \subset N$. Подкольцо N называется сингулярным, если $T = N$, и полурегулярным, если T является фактором, отличным от M. Построены примеры факторов типа III, содержащих максимальные коммутативные сингулярные и полурегулярные подкольца. Для аппроксимативно конечных факторов типа II_1 аналогичные примеры были построены Диксмье (РЖМат, 1955, 1386). В. Э. Лянце

6010. Характеристика дуальных B^*-алгебр. Огасавара, Иосинага (A characterization of dual B^*-algebras. Ogasawara Tôzirô, Yoshinaga Kyôichi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1954, **A18**, № 2, 178—182 (англ.)

Для симметрической банаховой алгебры A над полем комплексных чисел, удовлетворяющей условию $\| x \|^2 = \| x^* x \|$ (B^*-алгебра) или условию $\| x \|^2 \leqslant k \| x^* x \|$, устанавливается эквивалентность следующих условий: 1) A дуальна; 2) каждая максимальная коммутативная симметрическая подалгебра в A дуальна; 3) пространство максимальных идеалов любой максимальной коммутативной симметрической подалгебры в A дискретно; 4) спектр любого эрмитова элемента в A не имеет точек сгущения, кроме нуля. Если в симметрической банаховой алгебре A существует вспомогательная норма $| x |$, удовлетворяющая условию $| x |^2 \leqslant k | x^* x |$, и спектр любого эрмитова элемента из A не имеет точек сгущения, кроме нуля, то 1) A вполне симметрично, 2) вспомогательная норма $| x |$ единственна (с точностью до эквивалентности), 3) A является всюду плотной подалгеброй некоторой B^*-алгебры. М. И. Граев

6011. О некоторых свойствах квазиунитарных алгебр. Хонго (On some properties on quasi-unitary algebras. Hongo Eishi), Bull. Kyushu Inst. Technol. (Math., Natur. Sci.), 1958, № 4, 1—6 (англ.)

Под квазиунитарной алгеброй понимается ассоциативная алгебра R (над полем комплексных чисел) со скалярным произведением, удовлетворяющим следующим условиям: 1) $(x^s, x^s) = (x, x)$, $x \in R$; 2) $(x, x^j) \geqslant 0$, $x \in R$; 3) $(xy, z) = (y, x^s z)$; $x, y, z \in R$; 4) левое умножение $y \to xy$ непрерывно при фиксированном x; 5) линейные комбинации элементов вида $xy + (xy)^j$ плотны в R, где $x \to x^s$ и $x \to x^j$ соответственно инволюция и некоторый автоморфизм элемента $x \in R$. Квазиунитарная алгебра называется унитарной, если $x^j = x$. Элемент a называется квазицентральным, если $x^j a = ax$ для всех $x \in R$.

Используя свои ранее полученные результаты о соотношениях между квазиунитарной алгеброй R с полуконечным левым кольцом R^g и некоторой унитарной алгеброй, естественным образом с нею связанной, автор получает для таких алгебр необходимое и достаточное условие квазицентральности элемента a, а также необходимое и достаточное условие того, что R^g — конечного класса. Б. С. Митягин

6012. О линейных представлениях топологических групп. Телеман (Sur la représentation linéaire des groupes topologiques. Teleman Silviu), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1957, **74**, № 4, 319—339 (франц.)

Для каждой топологической группы G рассматриваются ее компактификации и сдвиги группы продолжаются на эти компактификации. Доказывается, что каждая топологическая группа изоморфна группе гомеоморфизмов компактного пространства, взятой в топологии равномерной сходимости, а также изоморфна группе Γ автоморфизмов нормированного кольца, состоящего из непрерывных комплексных функций, заданных на компактном множестве, причем группа Γ рассматривается в топологии простой сходимости. Группе Γ соответствует алгебра A линейных комбинаций $\Sigma \lambda_i \gamma_i$, $\gamma_i \in \Gamma$. Каждый характер группы G является собственной функцией операторов из A и обратно. Н. Я. Виленкин

6013. Формула для полупростых групп Ли. Хариш-Чандра (A formula for semisimple Lie groups. Harish-Chandra), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 4, 733—760 (англ.)

Результаты работы были ранее сообщены в заметке автора (РЖМат, 1957, 7175). М. И. Граев

6014. О дифференцируемости полугрупп линейных операторов. Иосида (On the differentiability of semigroups of linear operators. Yosida Kôsaku), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 6, 337—340 (англ.)

Изучаются полугруппы T_t линейных операторов в комплексном банаховом пространстве X, которые, кроме обычных свойств, обладают свойством, что $T_t x \in D(A)$ при $t > 0$ для любого $x \in X$, где $D(A)$ — область определения производящего оператора. В этом случае существует сильная производная $T'_t x = AT_t x = T_t Ax$. Она является ограниченным оператором в X. Пусть $R(\lambda; A)$ — резольвента производящего оператора. Доказаны теоремы:

Теорема 1. T'_t существует при $t > 0$ и $\overline{\lim_{t \to 0}} t \| T'_t \| < \infty$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lim_{|\tau| \to \infty}} |\tau| \, \| R(1 + i\tau; A) \| < \infty$. Более того, полугруппа с этим условием может быть расширена до полугруппы T_λ, аналитической в секторе $| \lambda - t | < t/eC$, где $C = \sup_{t > 0} \| (e^{-t} T_t)' \|$.

Теорема 2. T' существует при $t > 0$ и $\lim_{t \to 0} t \log \| T'_t \| = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lim_{|\tau| \to \infty}} \log |\tau| \, \| R(1 + i\tau; A) \| = 0$. Л. Д. Фаддеев

6015. Обобщение одной теоремы Мазура. Цитланадзе Э., Тбилисис университетис шромеби, Тр. Тбилисск. ун-та, 1957, **64**, 63—66 (рез. груз.)

Рассматривается пространство $L^p(0, 1)$ с весом $\rho(t)$ в котором

$$\| x \| = \left(\int_0^1 \rho(t) \, | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p}, \quad p > 1,$$

где $\rho(t)$ — положительная ограниченная функция. Доказывается, что

$$\operatorname{grad} \| x \| = \| x \|^{1-p} \rho(t) \, | x(t) |^{p-1} \operatorname{sgn} x(t).$$

М. М. Вайнберг

6016. Обобщение теорем Э. С. Цитланадзе о свойствах градиентов слабо непрерывных функционалов. Аносов В. И., Тр. Семинара по функц. анализу. Воронежск. ун-т, 1958, вып. 6, 3—11

Автор доказывает теоремы референта о компактности и слабой непрерывности оператора, порожденного дифференциалом слабо непрерывного функционала (Э. С. Цитланадзе, Некоторые задачи вариационного исчисления в функциональных пространствах. Докторская диссертация, МГУ, 1950) на случай нерефлексивных банаховых пространств. Пусть E — вещественное банахово пространство, $E_n \subset E_{n+1}$, $n = 1, \ldots$, — последовательность пространств возрастающей размерности, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность проекционных операторов с равномерно ограниченными нормами, $P_n E = E_n$, E^* — пространство, сопряженное к E, (f, x) — значение $f \in E^*$ на элемент $x \in E$, P_n^* — аддиативные равномерно по норме ограниченные однородные проекционные операторы, определенные равенством $(P_n^* f, x) = (f, P_n x)$, E_n^* — подпространства значений операторов P_n^*, $E^{(1)}$ — замыкание объединения всех E_n^*. Вводятся определения: α) последовательность $\{x_n\} \in E$ называется $E^{(1)}$-слабо сходящейся, если для любого $f \in E^{(1)}$ сходится последовательность $\{(f, x_n)\}$, β) E обладает свойст-

вом $E^{(1)}$-слабой полноты, если для каждой $E^{(1)}$-слабо сходящейся последовательности $\{x_n\}$ существует $E^{(1)}$-слабый предел $x_0 \in E$ такой, что $\lim_{n\to\infty}(f, x_n) = (f, x_0)$ для любого $f \in E^{(1)}$, γ) E обладает свойством $E^{(1)}$-слабой компактности, если у каждой ограниченной последовательности его элементов можно выделить $E^{(1)}$-слабо сходящуюся подпоследовательность, δ) функционал $F(x)$, определенный на E, $E^{(1)}$-слабо непрерывен в шаре $T(\|x\| \leqslant r) \subset E$, если его значения на каждой $E^{(1)}$-слабо сходящейся последовательности из T образуют сходящуюся последовательность. Доказывается, что если $F(x)$ $E^{(1)}$-слабо непрерывен в T, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что при $n \geqslant n_0$ и $x, y \in T$ имеем

$$|F(x + P_n y) - F(x + y)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Если для непрерывного в T функционала $F(x)$ удовлетворяется (1), то $F(x)$ обладает свойством $L^{(1)}$-слабой непрерывности в T. Если $F(x)$ в T обладает свойством $E^{(1)}$-слабой непрерывности, то он равномерно непрерывен в T. Если $F(x)$ равномерно непрерывен и равномерно дифференцируем в $T(\|x\| \leqslant r+1)$, то $\operatorname{grad} F(x)$ равномерно непрерывен в $T(\|x\| \leqslant r)$. Далее, если $F(x)$ равномерно дифференцируем и обладает свойством $E^{(1)}$-слабой непрерывности в $T(\|x\| \leqslant r+t)$, где $t > 0$ может быть сколь угодно малым и $\operatorname{grad} E(x)$ действует из $E \in E^{(1)}$, то $\operatorname{grad} F(x)$ преобразует $T(\|x\| < r)$ в компактное множество. Наконец, если выполнены условия последнего предложения, то $\operatorname{grad} F(x)$ каждую $E^{(1)}$-слабо сходящуюся последовательность $\{x_n\} \in T(\|x\| < r)$ преобразует в сильно сходящуюся последовательность.

Э. С. Цитланадзе

6017. Об одном новом принципе неподвижной точки. Красносельский М. А., Тр. Семинара по функц. анализу. Воронежск. ун-т, 1958, вып. 6, 87—90

Доказано, что уравнение

$$y = F(x)$$

при любом $y \in E_y$ имеет единственное решение $x \in E_x$, если выполнены условия: 1) $F(x)$ — нелинейный оператор, действующий из банахова пространства E_x в банахово пространство E_y, равномерно дифференцируемый по Фреше на каждом шаре из E_x, причем $F'(x)$ равномерно ограничена на каждом шаре из E_x; 2) $(Bh, F'(x)h) \geqslant \varepsilon(\|x\|)\|h\|^2$, где B — линейный обратимый оператор, действующий из E_x в E_y^* (E_y^* — пространство сопряженное к E_y), $\varepsilon(u) > 0$ ($u \geqslant 0$) непрерывна и $\int^{\infty} \varepsilon(u)\,du = \infty$ ((l, y) — значение линейного функционала $l \in E_y^*$ на элементе $y \in E_y$); 3) в E_y норма дифференцируема.

Указаны возможные обобщения этого предложения.

А. И. Перов

6018. Условия полной непрерывности оператора K. Аширов С., Элми эсэрлэр. Азэрб. унив. Уч. зап. Азерб. ун-та, 1958, № 6, 13—25 (рез. азерб.)

Доказывается следующая теорема: Пусть вещественные функции $K_i(x, s, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ вещественных аргументов, непрерывные по совокупности $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ для $u_i \in (-\infty, +\infty)$ и измеримые по совокупности $(x, s) \in G \times G$, где G — ограниченное измеримое множество конечномерного евклидова пространства, удовлетворяют условиям: каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что

$$\int_G \left[\int_E |K_i(x, s; u_1(s), u_2(s), \ldots, u_n(s))|\,ds\right]^{r_i} dx < \varepsilon^{r_i},$$

как только $\operatorname{mes} E < \delta$ ($E \subset G$) и вектор-функция $(u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x))$ принадлежит единичному шару пространства $L_{\{p\}}$ — прямой сумме пространств L^{p_i} ($i = 1, \ldots, n$; $p_i > 1$), в котором норма равна сумме норм функций $u_i(x) \in L^{p_i}$; для каждой ограниченной измеримой вектор-функции $(\psi_1(x, s), \ldots, \psi_n(x, s))$

$$\int_G \int_G |K_i(x, s; \psi_1(x, s), \ldots, \psi_n(x, s))|^{r_i}\,dx\,ds < \infty;$$

тогда интегральный оператор $A = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$:

$$A_i u = \int_G K_i(x, s; u_1(s), \ldots, u_n(s))\,ds$$

действует вполне непрерывно из $L_{\{p\}}$ в $L_{\{r\}}$ ($1 < p_i, r_i < \infty$).

Примечание референта. Имеются опечатки, к которым следует отнести и формулировку леммы 1.

М. М. Вайнберг

6019. О потенциальных операторах в линейных топологических пространствах. Энгельсон Я. Л., Уч. зап. Латв. ун-та, 1958, **20**, 27—45 (рез. лат.)

Пусть E — вещественное локально выпуклое пространство и E^* — сильно сопряженное к E пространство. Для функций $x(t)$ и $y(t)$, заданных на $[a, b]$ со значениями соответственно в E и E^*, вводится интеграл Стильтьеса $I = \int_a^b \langle y(t), dx(t)\rangle$ как предел

$$\sum_{k=1}^{n} \langle y(\tau_k), x(t_k) - x(t_{k-1})\rangle.$$

Достаточным условием существования I является требование непрерывности $y(t)$ и ограниченность вариации $x(t)$. По определению $x(t)$ имеет на $[a, b]$ ограниченную вариацию относительно окрестности нуля $V \subset E^*$, если для произвольного разбиения отрезка $[a, b]$ и любого $y \in V$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle y, x(t_k) - x(t_{k-1})\rangle| \leqslant M < +\infty.$$

Устанавливаются различные свойства I и, в частности, предложения о предельном переходе под знаком интеграла. При помощи интеграла Стильтьеса вводится понятие криволинейного интеграла и устанавливаются различные предложения о криволинейных интегралах вида $\int_a^b \langle F(x(t)), dx(t)\rangle$, где F — оператор из E в E^*, а $x(t)$ — непрерывная функция с ограниченной вариацией, являющейся представлением рассматриваемой кривой в E. Основным предложением о криволинейных интегралах является теорема 3.1 о том, что если криволинейный интеграл равен нулю вдоль любого „треугольника", то он равен нулю вдоль любой замкнутой кривой (из некоторого семейства, указанного в работе). Градиент функционала, заданного в E, вводится исходя из линейного дифференциала по Гато. Оператор $F(x)$ из E в E^* называется потенциальным, если он является градиентом некоторого функционала, заданного в E. Доказывается, что непрерывный оператор F из E в E^* потенциален тогда и только тогда, когда $\int \langle F(x), dx\rangle$ не зависит от пути интегрирования. Устанавливаются условия потенциальности дифференцируемых операторов. Изучается связь между потенциальными операторами F и их потенциалами f ($F(x) = \operatorname{grad} f(x)$). Доказываются предложения: из компактности F следует слабая непрерывность f на всяком ограниченном выпуклом множестве D; из равномерной непрерывности F на D следует равномерная дифференцируемость f на D; из непрерывности F на D следует локальная равномерная дифференцируемость f на D. Равномерная дифференцируемость определяется так: каждому $\varepsilon > 0$ соответствует $\delta > 0$ такое, что $\chi = \left|\frac{1}{t}[f(x + th) - f(x)] - Df(x, h)\right| \leqslant \varepsilon$, как только $0 < t < \delta$ ($x, x + h \in D$). Если δ зависит от $x_0 \in D$ и неравенство $\chi \leqslant \varepsilon$ имеет ме-

сто для некоторой окрестности $U(x_0)$, зависящей от x_0, то дифференцируемость называется локально равномерной. В. В. Вайнберг

6020. Теорема приближения Рунге и теория аналитических функционалов. Тилман (Runge's approximation theorem and the theory of analytic functionals. Tillmann H. J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 90 (англ.)

6021. Основные теоремы приближения для полугрупп ограниченных линейных преобразований. Бутцер (Fundamental approximation theorems for semigroups of bounded linear transformations. Butzer P. L.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 76 (англ.)

6022. О некоторых методах приближенного решения нелинейных функциональных уравнений в пространствах Банаха. Вертгейм Б. А., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 1, 166—169

Рассматривается приближенное решение уравнений вида

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

где $y = P(x)$—нелинейная операция, а x и y—элементы банаховых пространств X и Y. Исходя из некоторого начального приближения, автор строит последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) \tag{2}$$
$$\text{и } \Gamma_n = [P'(x_n)]^{-1}$$

для основного метода и

$$\Gamma_n = L_0^{-1} \quad (n = 0, 1, 2\ldots) \tag{3}$$

для модифицированного метода, причем оператор L_0 „близок" к $P'(x)$. Предполагая, что $P'(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера

$$\| P'(x_1) - P'(x_2) \| \leqslant K \| x_1 - x_2 \|^{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \tag{4}$$

автор доказывает теорему 1: Пусть для уравнения (1) выбраны начальная точка x_0 и линейный оператор L_0, имеющий обратный оператор L_0^{-1}, и выполнены следующие условия:

а) $\| L_0 - P'(x_0) \| \leqslant \delta_0$,

б) $\| L_0^{-1} \| \leqslant B_0$,

в) $\| L_0^{-1} P(x_0) \| \leqslant \eta_0$,

г) $B_0\delta_0 = \delta < 1$,

д) условие (4) для x_1 из области (6), $x_2 = x_0$,

е) $$h_0 = B_0 K \eta_0^{\alpha} < \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\alpha} (1-\delta)^{1+\alpha}. \tag{5}$$

Тогда уравнение (1) имеет решение x^* в области

$$\| x - x_0 \| \leqslant N_1(h_0)\,\eta_0, \tag{6}$$

где $N_1(h_0)$ — меньший из двух корней уравнения

$$\frac{h_0}{1+\alpha} N^{1+\alpha} - (1-\delta)N + 1 = 0 \tag{7}$$

и последовательные приближения процессов (2) и (3) сходятся к x^*, начиная с любого элемента сферы (6). Доказывается теорема 2: Единственность решения в условиях теоремы 1 имеет место в сфере

$$\| x - x_0 \| < N_2(h_0)\,\eta_0, \tag{8}$$

где $N_2(h_0)$ — больший корень уравнения (7), если предполагается дополнительно, что условие д) выполнено для всех x_1 из сферы (8). Для класса уравнений, более широкого, чем при условии (4), справедлива теорема 3 Пусть выполнены условия: а) уравнение (1) имеет корнем x^*, б) производная Фреше $P'(x)$ непрерывна в точке x^* с модулем непрерывности $\omega(\delta) = \sup_{\| x - x^* \| \leqslant \delta} \| P'(x) - P'(x^*) \|$ в) существует оператор $[P'(x^*)]^{-1} = L^{-1}$ и $\| L^{-1} \| \leqslant B < \infty$, г) $B\omega(\delta) < 1/3$. Тогда оба процесса Ньютона — основной и модифицированный (процесс 2) — при $\Gamma_n \equiv [P'(x_0)]^{-1}$ сходятся к x^*, начиная с любой точки сферы.

$$\| x - x^* \| \leqslant \delta.$$

Рассматриваются применения метода Ньютона в задаче о струйных течениях несжимаемой идеальной жидкости и в задаче приближенного построения конформных отображений. М. А. Мертвецова

6023. О наилучшем приближении в нормированных векторных пространствах. Хиршфельд (On best approximations in normed vector spaces. Hirschfeld R. A.), Nieuw arch. wiskunde, 1958, **6**, № 2, 41—51 (англ.)

Дано развернутое доказательство теорем 1 и 2, ранее опубликованных автором в краткой заметке (РЖМат, 1959, 595). В. Н. Никольский

6024. Итерационное решение функциональных уравнений первого рода. Бялый (Iterative Lösung von Funktionalgleichungen erster Art. Bialy Horst), Z. angew. Math. und Mech., 1958, **38**, № 7-8, 261—263 (нем.)

Обобщается итерационный метод решения уравнения Фредгольма первого рода, предложенный В. М. Фридманом(РЖМат, 1956, 8884). В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассматривается уравнение

$$Tx = y, \tag{1}$$

где T — линейный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, и y фиксирован. Устанавливаются предложения:

1. Пусть $0 < \mu < 2\lambda_0^{-1}$, где λ_0—наибольшее собственное число вполне непрерывного симметричного и положительно определенного оператора T. Тогда итерационный процесс $x_n = x_{n-1} + \mu(y - Tx_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к решению уравнения (1) при любом начальном $x_0 \in \mathfrak{H}$, если (1) разрешимо.

2. Если (1) разрешимо и T — вполне непрерывный симметричный оператор, то при $0 < \mu < \sqrt{2}\,\| T \|^{-1}$ итерационный процесс $x_n = x_{n-1} + (-1)^{n-1}\mu(y - Tx_{n-1})$ при любом начальном $x_0 \in \mathfrak{H}$ сходится к решению $x(x_0)$ уравнения (1), зависящему от x_0.

3. Если (1) разрешимо и T вполне непрерывен, то при $0 < \mu < 2\,\| T \|^{-2}$ итерационный процесс $x_n = x_{n-1} + \mu T^*(y - Tx_{n-1})$, где T^* — сопряженный оператор, сходится к решению $x(x_0)$, зависящему от начального элемента x_0. Приводится пример. М. М. Вайнберг

6025. Инвариантные средние и поглощающие конусы. Силверман (Invariant means and cones with vector interiors. Silverman R. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **88**, № 1, 75—79 (англ.)

В предыдущих статьях автора (РЖМат, 1957, 4978, 8029) изучались свойства МЕР (monotone extension property) и НВЕР (Hahn-Banach extension property) абстрактных полугрупп. Наличие упомянутых свойств связывалось с существованием инвариантного среднего на полугруппе. В настоящей работе доказана

Теорема. Пусть V — структурно полное линейное полуупорядоченное пространство, конус C положительных элементов которого острый и поглощающий. Если полугруппа $\bar{G}$ имеет инвариантное среднее, то пара $[\bar{G}, V]$ обладает свойствами МЕР и НВЕР.

Конус C называется острым, если $x \in C$ и $-x \in C$ влечет $x = 0$. Если существует элемент $v_0 \in C$ такой, что для любого $v \in V$ можно указать $\varepsilon > 0$ так, что $v^0 + \varepsilon v \in C$ то C называется поглощающим. Г. П. Акилов

6026. Заметка о нормированных линейных пространствах. Конрад (A note on valued linear spaces. Conrad Paul), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 646—647 (англ.)

С помощью метода Банашевского (РЖМат, 1958, 6498) доказывается частный случай теоремы автора о вложении Г — групп (РЖМат, 1953, 604) для случая, когда Г линейно упорядочено. Автор замечает, что тем же методом можно доказывать и самоё теорему вложения.

Е. П. Шимбирева

6027. О гомоморфизмах, не индуцируемых отображениями. Трачик (On homomorphisms not induced by mappings. Traczyk T.), Bull. Acad. polon. sci. sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 2, 103—106, VIII (англ.; рез. русск.)

Рассматривается σ-полная булева алгебра A, множество $\mathfrak{S}$ всех ее простых идеалов и алгебра S подмножеств множества $\mathfrak{S}$, изоморфная алгебре A. Через N обозначается σ-идеал подмножеств множества $\mathfrak{S}$, порожденный множествами вида $\mathfrak{c}(A) - \sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{c}(A_k)$, где $A, A_k \in A$ и $A = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$, а $\mathfrak{c}$ — изоморфизм алгебр A и S. Пусть Z означает алгебру множеств вида $S - N_1 + N_2$, где $S \in S$, N_1, $N_2 \in N$. Если ввести фактор-алгебру Z/N и обозначить через $[Z]$ элемент из Z/N, содержащий $Z \in Z$, то, как известно, отображение $\mathfrak{c}$:

$$\overline{\mathfrak{c}}(A) = [\mathfrak{c}(A)]$$

будет изоморфизмом алгебры A на алгебру Z/N.

Пусть A_1 другая σ-полная булева алгебра. Используя аналогичные обозначения, можно утверждать (Sikorski R., Fundam. math., 1949, 36,45—247), что каждый σ-гомоморфизм f алгебры Z/N в алгебру Z_1/N_1 индуцируется отображением φ множества $\mathfrak{S}_1$ в $\mathfrak{S}$, т. е. для любого $Z \in Z$

$$\varphi^{-1}(Z) \in Z_1, \quad f([Z]) = [\varphi^{-1}(Z)].$$

Если заменить здесь $\mathfrak{S}_1$ произвольным множеством $\mathfrak{X}$, Z_1 — σ-полем X подмножеств $\mathfrak{X}$ и N_1 — σ-идеалом I в X, то указанное предложение уже не имеет места. Именно, доказана

Теорема. Пусть $A_1 = X/I$. Следующие три утверждения равносильны:

1) изоморфизм $\mathfrak{c}^{-1}$ алгебры Z_1/N_1 на алгебру X/I индуцируется отображением;

2) каждый σ-гомоморфизм h произвольной алгебры Z/N в алгебру X/I индуцируется отображением;

3) существует гомоморфизм n алгебры X/I в X такой, что $n([X]) = [X]$ $(X \in X)$.

Строится пример σ-поля X и идеала I, для которых не выполнен пункт 3) теоремы.

В работе имеется несколько существенных опечаток.

Г. П. Акилов

6028. О композиции идеалов в булевых структурах. Хаупт, Пок (Über Adjunktion von Idealen in Booleschen Verbänden. Haupt Otto, Pauc Christian Y. Abhandl. math.-naturwiss. Kl. Akad. Wiss. und Liter., 1957, (1958), № 6, 17 S., ill.) (нем.)

Рассматривается σ-полная булева структура g. Если $a, b \subset g$, то под $a \vee b$ понимается совокупность элементов вида $A \vee B$ $(A \in a, B \in b)$. Рассматривается порожденное системой g булево кольцо $r(g)$; можно определить в нем операцию $A + B = A - B = B - A \doteq (A \vee B) - (A \wedge B)$. Под $a + b$ подразумевается множество элементов, лежащих в g и представимых в форме $A + B$ $A \in a$, $B \in b$).

Композицией (Adjunktion) систем $a, b \subset g$ авторы называют одну из систем $a \vee b$ или $a + b$. В работе систематически изучаются композиции идеалов с произвольными системами элементов из g. Приведем некоторые результаты.

2. 7. 1. Если системы a, $k \subset g$ — булевы структуры и k — идеал в g, то $a \vee k = a + k$.

3. 1. Если k и m — σ-идеалы в g, то $p = k + m$ — также σ-идеал в g.

Имея в виду дальнейшие приложения к теории меры, авторы доказывают теорему: Пусть g — σ-полная булева структура множеств, $z \subset g$ — также σ-полная булева подструктура и k — σ-идеал в g. Тогда, какова бы ни была вещественная функция f^0, определенная на $D \in z$ и измеримая относительно системы $z^0 = z + k$, существует измеримая относительно системы z функция f, определенная по-прежнему на D и отличающаяся от f^0 разве лишь на множестве $K \in k$.

Г. П. Акилов

6029. Пространство мер на счетнокомпактном T_1-пространстве. Исиватa (The space of measures on a countably compact T_1-space. Isiwata Takesi), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1957, **A5**, 15 Oct., 295—299 (англ.)

Пусть M — пространство нормированных (т. е. $\mu X = 1$) мер на T_1-пространстве X (под мерой понимается внешняя мера Каратеодори); топология на M задается окрестностями

$$O(\mu_0, O, \varepsilon) = \{\mu : \mu_0 O < \mu O + \varepsilon\},$$

где O — открытое в X множество и $\varepsilon > 0$. Блау (Blau J.H., Fundam. Math., 1951, **38**, 23—24) доказал, что компактность и метризуемость M эквивалентна тому, что X — метрический компакт. В работе доказано, что в случае счетнокомпактного T_1-пространства M — компакт. Это утверждение остается верным, если на M рассматривать другие естественные топологии; оно справедливо и для пространства всех нормированных борелевских мер на X.

Б. С. Митягин

6030. Замечания о хаусдорфовых мерах и хаусдорфовых размерностях в группах Ли. Гёц (Bemerkungen über Hausdorffsche Masse und Hausdorffsche Dimensionen in Lieschen Gruppen. Goetz A.), Colloq. math., 1957, 5, № 1, 55—65 (нем.)

Пусть G — n-мерная группа Ли, $\rho(x, y)$ — инвариантная относительно умножений слева метрика в G. Устанавливается, что хаусдорфова размерность h_ρ группы G относительно метрики ρ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{n}{\log_2\left[\limsup\limits_{x \to e} \frac{\rho(e, x^2)}{\rho(e, x)}\right]} \leqslant h_\rho \leqslant \frac{n}{\log_2\left[\liminf\limits_{x \to e} \frac{\rho(e, x^2)}{\rho(e, x)}\right]}$$

(если $\liminf\limits_{x \to e} \frac{\rho(e, x^2)}{\rho(e, x)} \leqslant 1$, то имеет место только первое неравенство; если $\limsup\limits_{x \to e} \frac{\rho(e, x^2)}{\rho(e, x)} = 1$, то $h_\rho = \infty$). Если $\rho(x, y)$ — риманова метрика, то $h_\rho = n$ и h_ρ-мерная хаусдорфова мера на G есть мера Хара. В общем случае h_ρ-мерная хаусдорфова мера может не быть мерой Хара. Однако, если существует такая окрестность V единичного элемента e, что для каждого $x \in V$ имеет место $\frac{\rho(e, x^2)}{\rho(e, x)} = A$, то $1 < A \leqslant 2$, $h_\rho = \frac{n}{\log_2 A}$ и h_ρ-мерная хаусдорфова мера является мерой Хара.

М. И. Граев

6031. Спектральное представление двухмезонной функции Грина. Грибов В. Н., Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, **35**, № 2, 416—427 (рез. англ.)

С помощью условия причинности получено спектральное представление для двухмезонной функции Грина в симметричной псевдоскалярной мезонной тео-

рии. Из этого представления следует, что амплитуда рассеяния является аналитической функцией в верхней полуплоскости и не имеет существенной особенности на бесконечности не только при фиксированном переданном импульсе, но и при фиксированном угле рассеяния в системе центра масс. Для амплитуды рассеяния при фиксированном угле рассеяния в системе центра масс найдены дисперсионные соотношения. Они выписываются в явном виде, но содержат амплитуду рассеяния в области мнимых углов. Автор указывает, что аналитическое продолжение в эту область с помощью разложения по полиномам Лежандра, по-видимому, невозможно. Н. А. Тихонов

6032. **Представление изобарического спина частиц с сильным взаимодействием. Рюэлль** (Représentation du spin isobarique des particules à interactions fortes. Ruelle D.), Nucl. Phys., 1958, 7, № 5, 443—450 (франц.; рез. англ.)

Поведение всех известных частиц представлено 2×2 матрицами или кватернионами (Бозон с изоспином, равным нулю, введенный Эспанья (d'Espagnat) и Прэнтки (Prentki), исчезает из лагранжиана сильных взаимодействий вследствие инвариантности при зарядовом сопряжении). Это представление дает простую форму для изобарического спина, заряда и числа изофермионов в терминах инфинитезимальных операторов. При построении лагранжиана сильных взаимодействий рассматриваются, из соображений ренормируемости, лишь скалярные и спинорные поля в обычном пространстве. Кватернионы интерпретируются в скалярной векторной и спинорной формах. Это обеспечивает сохранение изобарического спина. Хотя эти представления не являются неприводимыми представлениями группы вращений в пространстве изобарического спина, они могут оказаться полезными при изучении очень сильных и очень слабых взаимодействий. Н. А. Тихонов

6033. **Квантовая теория простой альтернативы (Дополнительность и логика. II.). Вейцзеккер** (Die Quantentheorie der einfachen Alternative. (Komplementarität und Logik. II). Weizsäcker C. F. von), Z. Naturforsch., 1958, 13a, № 4, 245—253 (нем.)

Высказывания a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) образуют n-кратную альтернативу при выполнении следующих условий: 1) если одно из высказываний a_k истинно, то все остальные ложны; 2) если все высказывания a_l ($l \neq k$), кроме одного, ложны, то a_k истинно.

В реферируемой статье квантовая механика n-мерного пространства состояний трактуется как видоизмененная логика n-кратной альтернативы. В квантовой теории существуют состояния, для которых понятия „истинно" или „ложно" не имеют определенного смысла; в этих состояниях можно говорить лишь о вероятности истинности или ложности различных высказываний.

Автор рассматривает двумерное пространство состояний (простая альтернатива), основываясь на идеях Неймана (Neumann J. v., Mathematishe Grundlagen der Quantenmechanik, Springer-Verlag, Berlin, 1932) и своей предыдущей работы (Naturwiss., 1955, 42, № 19/20, 548), и приводит ряд примеров из области квантовой физики (спин электрона, поляризация света, изотопический спин и т. п.). М. С. Лившиц

6034. **Введение физических операторов в квантовую теорию полей. Ридо** (Sur l'introduction des opérateurs habillés en théorie quantique des champs. Rideau Guy), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 15, 1098—1101 (франц.)

Рассматривается квантовая система, состоящая из взаимодействующих частиц. При предположениях, сводящихся к предположению о непрерывности спектра полного гамильтониана системы, построены векторы, представляющие физические частицы. С помощью этих векторов, являющихся собственными векторами гамильтониана, дано определение матричных элементов матрицы S с использованием лишь операторов рождения и аннигиляции физических частиц. Н. А. Тихонов

6035. **О связи между спином и статистикой. Бергойн** (On the connection of spin with statistics. Burgoyne N.), Nuovo cimento, 1958, 8, № 4, 607—609 (англ.; рез. итал.)

Не делая никаких предположений ни об уравнениях поля, ни о форме взаимодействия, автор доказывает фундаментальную (хорошо известную для свободных полей) теорему Паули о связи между спином и статистикой. При доказательстве автор использует только наиболее общие постулаты современной квантовой теории поля (релятивистская инвариантность, отсутствие состояний с отрицательной энергией, положительность метрики в пространстве Гильберта, коммутативность или антикоммутативность различных операторов поля в точках, разделенных пространственноподобным интервалом), а также вытекающие из этих постулатов глубокие результаты Уайтмана (РЖФиз, 1956, 30897) и Уайтмана и Холла (РЖМат, 1959, 4647) об аналитических свойствах вакуумных ожиданий от произведений полевых операторов. Аналогичные результаты о связи спина и статистики получены также в работе Людерса и Цумино (РЖМат, 1959, 3977). О. С. Парасюк

6036. **О спектре оператора Шредингера для системы многих частиц. Жислин Г. М.**, Успехи матем. наук, 1958, 13, № 5, 207—208

✓6037 К. **Введение в функциональный анализ. Вулих Б. З.** М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 352 стр., илл., 8 р. 25 к.

В доступной для читателя форме излагаются начала функционального анализа и приложения общей теории к различным задачам. Книга предназначена для инженеров, не имеющих университетского образования, и студентов старших курсов педагогических институтов.

В гл. 1 изучается n-мерное евклидово пространство. В нем рассматриваются линейные функционалы и операторы, сопряженные и самосопряженные операторы, а также собственные числа и собственные векторы линейных преобразований. Комплексное евклидово пространство рассматривается в последнем параграфе. В гл. 2 рассматривается вещественное гильбертово пространство l^2, которое называется бесконечномерным евклидовым. Замечание о комплексном l^2 содержится в конце главы. Основные понятия метрического пространства и условия компактности в нем изложены в гл. 3. Гл. 4 является продолжением гл. 3.; в ней рассматриваются непрерывные функционалы и операторы и, при выполнении условий принципа сжатых отображений, устанавливаются предложения о существовании неподвижных точек преобразований, применяющиеся к примерам линейных и нелинейных интегральных уравнений. В гл. 5, 6 и 7 рассматриваются нормированные пространства, абстрактное гильбертово пространство и пространство L^2. В гл. 8 изучаются линейные операторы, действующие из одного банахова пространства в другое такое же пространство. Рассмотрены вопросы о распространении линейных операторов, о последовательностях операторов, пространстве всех непрерывных линейных операторов, об обратных операторах. Доказываются теорема Банаха — Штейнгауза, теорема Банаха о линейности отображения одного пространства на другое и различные предложения о существовании обратного оператора. В гл. 9 рассматриваются линейные функционалы в различных пространствах. Устанавливается общий вид линейных функционалов в гильбертовом пространстве и пространстве непрерывных функций. Вводятся понятия сопряженного пространства и слабой сходимости функционалов. Теорема о слабой сходимости функционалов применяется к доказательству сходимости процесса механических квадратур. Вводится пространство сходящихся последовательностей и из-

лагаются обобщенные методы суммирования рядов. Гл. 10 и 11 содержат различные предложения о спектре операторов; в основном рассматриваются самосопряженные и вполне непрерывные операторы в гильбертовом пространстве. Приближенные методы решения линейных функциональных уравнений рассмотрены в гл. 12; изложен, в частности, метод Рица и его применение к решению уравнения Штурма — Лиувилля и к нахождению собственных значений. В последней гл. 13 рассмотрены полуупорядоченные нормированные пространства, теория которых была построена советскими математиками Л. В. Канторовичем и М. Г. Крейном. М. М. Вайнберг

6038 Д. Условия полноты системы корневых подпространств у несамосопряженных операторов с дискретным спектром. Лидский В. Б. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1958

6039 Д. О положительных решениях нелинейных уравнений с вогнутыми операторами. Бахтин И. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Воронежск. ун-т. Воронеж, 1958

6040 Д. Принцип мажорант в общей теории итерационных методов. Тамме Э. Э. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тартуск. ун-т, Тарту, 1958

См. также: 5697, 5709, 5801, 5963, 5988

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

6041. Счетные вероятностные пространства. Ранкин (Computable probability spaces. Rankin B.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958 127 (англ.)

Вероятностное пространство $(S, \mathfrak{B}, P)$ называется счетным, если S представляет последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и для всех ограниченных случайных величин X

$$EX = \lim \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} X(a_k). \qquad (1)$$

Изучаются и обобщаются такие пространства. Обобщение производится следующим образом: пусть S — последовательность вещественных чисел, F — класс ограниченных функций на S, для которых (1) сходится. Функционал E не обязательно непрерывен. Если надлежаще выбрать F, то действительнозначные конечные функции Y на S, для которых $c(Y) \in F$ (c непрерывна и ограничена), представляют также множество случайных величин, включающее случайные величины из $(S, \mathfrak{B}, P)$

6042. Строгая импликация и определение законов вероятности. Бодью (Implication stricte et détermination des lois de probabilité. Bodiou G.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 5—6 (франц.)

6043. Вторая статья о статистиках, связанных со случайной дезориентацией кубов. Маккензи (Second paper on statistics associated with the random disorientation of cubes. Mackenzie J. K.), Biometrika, 1958, 45, № 1-2, 229—240 (англ.)

См. РЖМат, 1958, 6066. Получены теоретические функции плотности для угла дезориентации (наименьший угол вращения для приведения куба в первоначальное положение) и для наименьшего угла между ребрами куба в его данном и первоначальном положениях. Из резюме автора

6044. К теории рекуррентных событий. II. Бачелет (Zur Theorie der wiederkehrenden Ereignisse II. Batschelet Eduard), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 294—297 (нем.)

Часть 1 см. РЖМат, 1959, 618. С помощью результатов части I статьи находится вероятность того, что в последовательности $2m$ испытаний Бернулли с вероятностью успеха $p = \frac{1}{2}$ разность $h - p$, где h — частота успеха, k раз изменит знак. М. И. Ядренко

6045. О несимметричных монетах и аналогичных проблемах. Поланьи (On biassed coins and related problems. Polanyi Michael), Z. phys. Chem. (BRD), 1958, 15, № 1-6, 290—296 (англ.)

Рассматривается способ бросания несимметричной монеты, при котором само бросание представляет собой вероятностный, например, броуновский процесс (в частности, к этому случаю относится встряхивание несимметричной игральной кости в чашке с последующим выбрасыванием ее на стол). В этом случае функция распределения для процесса бросания монеты зависит от параметров вероятностного процесса бросания; в случае броуновского движения — от температуры. При температуре, равной нулю, падение несимметричной монеты на одну из сторон достоверно, тогда как при высоких температурах вероятности падения монеты на каждую сторону стремятся к $^1/_2$. Автор приходит к выводу что распределение вероятностей несимметричных в указанном смысле систем не является детерминированной функцией состояния системы: оно зависит от интенсивности случайных толчков, действующих на систему.

В. Цукерман

6046. Об одной проблеме математики. Лефевр (Propos sur un problème de mathématiques. Lefevre A.), Bull. Assoc. ingrs issus Ecole applic. artill. et génie, 1958, 36, № 2, 19—25 (франц.; рез. флам.)

Вычисляется вероятность, что выбранные случайно среди чисел $1, 2, \ldots, n$ два числа p и q будут взаимно просты, в предположении, что появление любой пары p, q равновозможно. Она равна $\pi^2/6 + O(\log n/n)$. Результат и доказательство хорошо известны. Изложение общедоступно. И. П. Кубилюс

6047. Методы седловых точек для мультиномиального распределения. Гуд (Saddle-point methods for the multinomial distribution. Good I. J.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 4, 861—881 (англ.)

Развивается метод седловой точки для определения коэффициентов производящих функций. Идея метода состоит в асимптотическом разложении контурного интеграла, представляющего коэффициент степенного ряда. Кратко описан „дискретный" метод и разработан „непрерывный" метод получения коэффициентов производящих функций.

Три члена асимптотического разложения получены для однократного интегрирования, два — для двойного интеграла и один член — для кратных интегралов.

Сформулирована следующая теорема: Пусть $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n z^n$ — степенной ряд или полином с неотрицательными действительными коэффициентами и невырождающейся открытой областью сходимости.

Предположим, что не все индексы r, для которых $Q_r > 0$, имеют общий делитель, больший 1. Пусть к-оэффициент при z^N в $(f(z))^t$ будет $c(N, t)$.

Если $c(N, t) \neq 0$, тогда имеется единственное неотрицательное действительное решение ρ уравнения

$$t\rho \frac{d}{d\rho} f(\rho) = Nf(\rho)$$

и, если к тому же N/t содержится внутри постоянного интервала, тогда

$$c(N, t) \sim \frac{[f(\rho)]^t}{\sigma\rho^N \sqrt{2\pi t}} \cdot \left\{1 + \frac{1}{24t}(3\lambda_4 - 5\lambda_3^2) + (1/1152t^2)\times\right.$$

$$\left.\times (168\lambda_3\lambda_5 + 385\lambda_3^4 - 630\lambda_3^2\lambda_4 - 24\lambda_6 + 105\lambda_4^2) + \ldots\right\}$$

равномерно при $t \to \infty$, где $\lambda_s = \lambda_s(\rho) = k_s(\rho)/\sigma^s$, $\sigma = \sqrt{k_2(\rho)}$, и

$$k_s(\rho) = \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)^s (\log f(\rho e^u))|_{u=0} \quad (s = 0, 1, 2, \ldots).$$

Аналогично формулируется теорема для $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(r) z^r dr$ и для случая многократных интегралов.

Указывается, что теоремы могут быть доказаны методом, аналогичным методу, данному в работе Даниэльса (РЖМат, 1957, 2531). Сформулированные теоремы применены к проблеме распределения максимальной частоты для мультиномиального распределения. Дается несколько примеров применения дискретных методов получения коэффициентов производящих функций и комбинаторные формулы для проблемы распределения максимальной частоты. В. И. Бабкин

6048. Абсолютная непрерывность функций распределения в классе L. Сюй Бао-лу (Hsu Pao-lu), Бэйцзин дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Acta scient. natur. Univ. pekinensis, Beijing daxue xuebao ziran kexue, 1958, 4, № 2, 145—150 (кит.; рез. англ.)

Автор находит следующее выражение для характеристической функции любого распределения из класса L (Колмогоров А. Н., Гнеденко Б. В., Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, 1949, гл. 4, § 30):

$$\ln f(t) = i\gamma t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{m(u)}{u}du +$$

$$+ \int_{0}^{\infty}\left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{n(u)}{u}du, \qquad (1)$$

где $m(u)$ — неотрицательная неубывающая на $(-\infty, 0)$, а $n(u)$ — неотрицательная невозрастающая на $(0, +\infty)$ функции, для которых

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{um(u)}{1+u^2}du < \infty, \quad \int_{0}^{\infty}\frac{un(u)}{1+u^2}du < \infty.$$

(1) используется для доказательства абсолютной непрерывности любой функции распределения из L.

Резюме автора

6049. Среднее последовательности случайных величин, закон распределения которых также случаен. Шаллан (Moyenne d'une série de grandeurs fortuites dont la loi de distribution est elle-même fortuite. Challand Albert), Verhandl. Schweiz. naturforsch. Ges., 1953, 132, 98—99 (нем.)

6050. Локальная предельная теорема для плотности вероятности. Сунь Энь-хоу (Sun En-hou), Дунбэй жэньминь дасюэ цзыжанькэсюэ сюэбао, Acta scient. natur., 1958, № 1, 1—8 (кит.; рез. англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины с функциями распределения (ф. р.) $F_k(x)$ и характеристическими функциями (х. ф.) $f_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$;

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{B_n} - A_n;$$

$p_n(x)$ — плотность вероятности ζ_n;

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

В статье изучается задача выбора $B_n > 0$ ($B_n \to \infty$ при $n \to \infty$) и A_n таким образом, что $p_n(x)$ равномерно стремится к $\varphi(x)$ при $n \to \infty$.

Пусть выполняются условия:

1) при подходящем выборе $B_n > 0$ и A_n $\overline{F_n(x)} \Rightarrow \Phi(x)$ где $\overline{F_n(x)}$ — ф. р. ζ_n; $\Phi(x)$ — ф. р., соответствующая $\varphi(x)$;

2) $\{f_k(t)\}$ содержит подпоследовательность $\{f_{n_k}(t)\}$, равномерно сходящуюся к нулю относительно n_k при $t \to \infty$;

3) если n^* — число х. ф., принадлежащих к $\{f_{n_k}(t)\}$, среди первых n в последовательности $\{f_k(t)\}$, то выполняется неравенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^*}{B_n^2} > 0;$$

4) для некоторого положительного целого числа m $\prod_{k=1}^{m} f_{n_k}(t)$ абсолютно интегрируемо.

Тогда $p_n(x)$ равномерно стремится к $\varphi(x)$ при $n \to \infty$.

Доказывается также следующее обобщение теоремы Смита (РЖМат, 1954, 1725):

Если для любого $\tau > 0$

$$\lim_n \frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x|>\tau B_n} x^2 dF_k(x + M\zeta_k) = 0$$

и выполняются условия 2), 3), 4), то

$$\lim_n \sup_x |p_n(x) - \varphi(x)| = 0.$$

По резюме автора

6051. О процессах, порожденных многомерным процессом Пуассона. Такач (On secondary stochastic processes generated by a multidimensional Poisson process. Takács Lajos), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1957, 2, № 1-2, 71—80 (англ.; рез. русск., венг.)

Рассматриваются процессы, порожденные однородным процессом Пуассона $\{\xi(s)\}$, определенные на борелевских подмножествах s некоторого конечномерного евклидова пространства, т. е.

$$P\{\xi(s) = k\} = e^{-p\mu(s)}\frac{[p\mu(s)]^k}{k!},$$

где $\mu(s)$ — мера Лебега на множестве S, $p > 0$. Предполагается, что всякое событие процесса Пуассона создает сигнал.

Исследуется стохастический процесс

$$\eta(x, s) = \sum_{y_\nu \in S} f(x, y_\nu, \alpha_\nu),$$

$f(x, y_\nu, \alpha_\nu)$ — обозначает в точке x величину сигнала, принадлежащего точке y_ν, и $\{\alpha_\nu\}$ — одинаково распределенные, независимые случайные параметры.

Определены распределение случайной величины $\eta(x,s)$, корреляционная и спектральная функции процесса $\{\eta(x, s)\}$, когда S является полным пространством.

С. М. Броди

6052. К проблеме предсказания. Крамер (On a problem of prediction. Cramér H.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 120 (англ.)

Задача линейного предсказания по методу наименьших квадратов для стационарных стохастических процессов почти полностью разрешена. В сообщении обсуждается аналогичная задача для более общего случая, а именно для гармонизуемого процесса Лоэва.

6053. Неравенства для стохастических процессов с известной ковариационной функцией. Бирнбаум (Inequalities for stochastic processes with known covariance function. Birnbaum Z. W.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 118 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$—случайные величины с $E(X_i)=0$ $i=1, \ldots, n$, и пусть $\sigma_{ij}=E(X_iX_j)$. Если все σ_{ij} и σ_{ij+1} заданы, то выводится неравенство для

$$P\{|X_i|<\varepsilon_i,\ i=1,\ldots,n\}$$

для любых $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n>0$.

Второе неравенство получено для всех заданных σ_{ii} и σ_{1i}. При помощи этих неравенств можно разрешить ряд проблем следующего типа: Пусть X_t $(0\leqslant t\leqslant T)$ — стохастический процесс такой, что $E(X_t)=0$, и с известной ковариационной функцией.

Для $\varepsilon>0$ требуется построить функцию $f(t)>0$ такую, что

$$P\{|X_t|<f(t),\ 0\leqslant t\leqslant T\}\geqslant 1-\varepsilon.$$

6054. Некоторые предельные теоремы для марковских процессов с дискретным временем. II. Уэно (Some limit theorems for temporally discrete Markov processes. II. Ueno Tadashi), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 1958, Sec. 1, 7, № 5, 557—565 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1958, 5916. Во второй части статьи изучается возможность применения усиленного закона больших чисел к последовательности $\{X_i,\ i\geqslant 1\}$ зависимых случайных величин с действительными значениями, в частном случае связанных в неоднородную по времени цепь Маркова. Предполагается, что для случайных величин X_i существует такая неубывающая последовательность $\varphi(i)$, что почти наверное

$$\max_{u<k<l<2n} |E(X_{k+1}+X_{k+2}+\ldots+X_l\mid X_1,\ldots,X_k)|\leqslant\varphi(n)$$

для всех натуральных k, l, n. Если при этом $E(X_n)=0$ $(n\geqslant 1)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^2}\left[1+D(X_n)\right]<\infty,$$

то

$$P\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}=0\right\}=1.$$

При рассмотрении цепей Маркова для переходных функций $P(x, du)$ используются характеристики:

$$1)\ Q(P)=\frac{1}{2}\sup_{x,\,y}\|P(x,dz)-P(y,dz)\|,$$

где $\|\mu(dz)\|$ обозначает полную вариацию обобщенной меры $\mu(dz)$, и

$$2)\ Q_1(P)=\frac{1}{2}\sup_{x,\,y}\left|\int z\,P(x,dz)-\int z\,P(y,dz)\right|.$$

Символом PP^1 обозначается композиция распределений $P(x, dy)$ и $P^1(x, dy)$.

Для цепи Маркова $\{X_n\}$ с переходными вероятностями на n-м шаге $P_n(x, E)$ имеет место усиленный закон больших чисел, если: 1) существуют такое δ, $0<\delta<1$, и такие натуральные числа N и n_r $(r=1,2\ldots)$ для которых $0<n_{r+1}-n_r\leqslant N$ и $Q(P_{n_r+1}P_{n_r+2}\ldots P_{n_{r+1}})\leqslant\delta$; 2) $Q_1(P_n)\leqslant M<\infty$ при $n\geqslant 1$.

Рассматриваются вопросы единственности инвариантной относительно преобразований, индуцируемых мерами $P_n(x, dy)$, меры $m(E)$, т. е. меры, для которой $m(E)=\int P_n(x, E)\,m(dx)$. Оказывается, если существует вероятностная инвариантная мера $m(E)$ и

$$\lim_{n\to\infty}Q(P_1P_2\ldots P_n)=0, \tag{1}$$

то вероятности перехода за n шагов $P_1P_2\ldots P_n$ сходятся (в топологии, индуцированной полной вариацией) равномерно по x к единственному предельному распределению, совпадающему с $m(E)$. Доказывается, что из σ-конечности инвариантной меры $m(E)$ и условия (1) вытекает конечность $m(E)$.

М. Г. Шур

6055. О новом определении стохастического интеграла посредством случайной римановой суммы. Нисио (On a new definition of stochastic integral by random Riemann sum. Nisio Makiko), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1958, **A31**, № 1, 25—31 (англ.)

Пусть (Ω, B, P)—вероятностное пространство; $\{Y(t, \omega)\ t\in[0, \infty)\}$ —винеровский процесс и $\Phi(t, \omega)$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\Phi(t, \omega)$ измерима относительно пары (t, ω); 2) $\int_0^{\infty}M\Phi^2(t,\omega)dt<\infty$; 3) $\Phi(t, \cdot)$ для каждого t B_t-измерима, где B_t — σ-алгебра событий, определяемая значениями процесса $\{Y(s, \omega);\ s\leqslant t\}$.

Вместо обычного определения стохастического интеграла (см., например, Дуб, Вероятностные процессы, М. Изд-во Ин. лит., 1956, стр. 392)

$$\varphi(\omega)=\int_0^{\infty}\Phi(t,\ \omega)\,dY_t(\omega)$$

предлагается следующее: Пусть (Ω', B', P') — вероятностное пространство (ω и ω' независимы), в котором определены процессы Пуассона $\{P_n(t, \omega'),\ t\in[0, \infty)\}$, где $n=M'P_n(1, \omega')$. И пусть $(\bar\Omega, \bar B, \bar P)=(\Omega, B, P)\times(\Omega', B', P')$ — прямое произведение вероятностных пространств.

Обозначая через $t_i^n(\omega')$ i-й скачок процесса $P_n(t,\omega')$, автор полагает

$$S_n(\bar\omega)=\sum_{t>1}\Phi(t_i^n(\omega'),\omega,)\,[Y(t_{i+1}^n(\omega'),\ \omega)-Y(t_i^n(\omega'),\omega)].$$

В качестве стохастического интеграла от случайной функции $\Phi(t, \omega)$, удовлетворяющей условиям 1), 2), 3), по $dY_t(\omega)$, предлагается рассматривать случайную величину $\varphi^*(\omega)$, такую, что

$$P[M\{S_n(\bar\omega)-\varphi^*(\omega)\}^2>\varepsilon]\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Оправданием такого определения служат доказываемые две теоремы.

Теорема 1. $\varphi^*(\omega)$ существует и однозначно определяется, за исключением P-меры нуль.

Теорема 2. Для почти всех ω

$$\varphi^*(\omega)=\varphi(\omega).$$

А. Н. Ширяев

6056. Некоторые предельные стохастические операции. Рамакришнан (Some limiting stochastic operations. Ramakrishnan A.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 126 (англ.)

Аналитические операции, как-то: сходимость для последовательности случайных величин, дифференцирование и интегрирование для случайных функций, — обычно определяются в тесной аналогии с обычными последовательностями и функциями. По мнению автора, для правильного понимания этих операций с физической точки зрения необходимо систематически изучать связь между такими понятиями, как корреляция и сходимость. Переход от дискретной последовательности случайных величин к случайной функции может быть осуществлен на основе известного для физиков понятия „плотности состояний".

В статье обсуждается связь между стационарностью и эргодичностью, с одной стороны, и корреляцией, — с другой. Указываются предыдущие результаты автора о стохастической интеграции, имеющие отношение к настоящей статье. Из резюме автора

6057. Случайное интегрирование. Дюге (Intégration aléatoire. Dugué D.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 120—121 (франц.)

Применение понятия сильной равномерной непрерывности (определенной в других работах автора) случайных функций к определению интеграла в смысле Римана. В изложении используется результат Слуцкого о полноте пространства случайных величин. Такая непрерывность позволяет также определить случайный максимум. В случае функций с независимыми приращениями (безгранично делимые законы) изучение такой интеграции приводит к теоремам, связанным с концентрацией случайных величин.

6058. Моменты распределения процесса Маркова. Амбарцумян Г. А., Изв. АН АрмССР. Физ.-матем., естеств. и техн. н., 1956, **9**, № 5, 25—41 (рез. арм.)

В работе получены уравнения, которыми определяются моменты непрерывных марковских процессов, удовлетворяющих условиям А. Н. Колмогорова (Успехи матем. наук, 1938, вып. 5) и некоторым дополнительным предположениям. В. С. Королюк

6059. О марковских процессах Такача смешанного типа. Рейх (On the mixed-type Markov process of Takács. Reich E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 127 (англ.)

Распределение $F(t, x) = P[\eta(t) \leqslant x]$ марковского процесса $\eta(t)$, определенного Такачом, удовлетворяет соотношению

$$F_t = F_x - \lambda(t)F + \lambda(t)\int_0^x H(x-y)\,d_yF(t,y), \qquad (1)$$

где $F(x, 0)$ и $H(x) = P(X \leqslant x) = \int_0^x h(u)\,du$ заданы.

Изучается решение (1). Если $\lambda(t) \in L^2$, $e^{-cx}h(x) \in L^2(0,\infty)$ для некоторого $c \geqslant 0$, тогда (1) имеет единственное решение F, которое выражается в виде единственного решения некоторого уравнения Вольтерра.

Исследуя последнее методами Абеля, можно установить асимптотические свойства $F(t, 0)$, обобщающие хорошо известные результаты в случае постоянного $\lambda(t)$.

6060. Построение кодов, обнаруживающих и корректирующих ошибку в симметричном бинарном канале. Бос, Кьюблер (Construction of error detecting and error correcting codes for the symmetric binary channel. Bose R. C., Kuebler R. R.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh 1958, 118—119 (англ.)

Методы конечной геометрии применяются к построению кодов для симметричных бинарных каналов. Рассматриваемый код называется групповым алфавитом, он был введен Слепяном. Строится общая теория таких кодов и приводятся специальные случаи ее применения. Полностью проанализированы алфавиты размера 2^n для $n \leqslant 6$. Резюме автора

6061. Приложения теории вероятностей. Кендалл (Applied probability. Kendall D. G.), Nature, 1958, **181**, № 4604, 245—246 (англ.)

Заметка представляет рецензию на сборник статей „Приложения теории вероятностей" (РЖМат, 1958, 7056 К). Автор отмечает, что заглавие сборника неудачно, так как в некоторых его статьях решаются чисто математические, а не прикладные задачи. Это относится, например, к статье Леви об отображении одного гильбертова пространства в другое, к статьям Дуба и Феллера, касающихся теории потенциала. Кратко излагаются некоторые задачи и результаты, содержащиеся в статьях сборника. Ю. А. Веретенников

6062 К. Сборник задач по теории вероятностей. Гарецкий С. П., Моск. гос. экон. ин-т. М., 1958, 32 стр.

6063 К. Первый курс по теории вероятностей и статистике. Нейман (First course in probability and statistics. Neyman J. New York, Henry Holt and Co., 1953, IX, 350 pp., 5.50 doll.) (англ.)

6064 Д. Некоторые предельные теоремы для вероятностей больших уклонений. Рихтер Вольфганг. Автореф. дисс. канд. физ-матем. н., ЛГУ, Л., 1958

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6065. К эффективности выбора с разными вероятностями без возвращения. Сингх (On efficiency of the sampling with varying probabilities without replacement. Singh Daroga), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1954, **6**, № 1, 48—57 (англ.)

Известно, что в двухступенчатых выборочных планах выбор первичных единиц с разными вероятностями без возвращения приводит в некоторых случаях к более эффективным оценкам, чем выбор с равной вероятностью с возвращением (РЖМат, 1955, 1890). Автор ищет достаточные условия для этого утверждения.

Примечание референта. По-видимому, нельзя пренебрегать первым слагаемым в сумме (10), так как в рассматриваемых случаях np_i может превосходить 1 и поэтому не аппроксимировать вероятность $p_i(X)$. K. Sarkadi

6066. Нанесение экспериментальных данных на нормальную или логарифмически нормальную вероятностную бумагу. Феррелл (Plotting experimental data on normal or log—normal probability paper. Ferrell Enoch B.), Industr. Quality Control, 1958, **15**, № 1, 12—15 (англ.)

Рассматривается нанесение результатов эксперимента на вероятностную бумагу. i-е наблюдение в выборке объема n (ранжированной по величине наблюдений) наносится в точке $i/n + 1$ по шкале частот. Нанесенные точки выравниваются гладкой кривой, обладающей свойством медианы. Дисперсия оценивается по перцентилям 6,68 и 93,32 гладкой кривой, дающих частичный размах в 3σ. Эти процедуры применяются и в случае асимметрических распределений, аппроксимируемых логарифмически нормальным. Резюме автора

6067. Построение искусственных совокупностей и их применение. Фиш (The construction of artificial populations and their application. Fisz M.), Prace mat., 1955, **1**, 174—182 (англ.)

Описательная статья об использовании случайных чисел для извлечения выборок из совокупности с заданным распределением. Z. Birnbaum

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 1, 52

6068. К градуированию дискретных распределений. Фернандиш-Кошта (On the graduation of discrete frequency distributions. Fernandes Costa M. A. Bol. Inst. Actuarios Portug., 1953, 8, 21—27) (англ.)

6069. О некоторых последствиях неоднородности объектов в выборках в возвращением, извлеченных с разными вероятностями. Жаркович (O nekim posledicama heterogenosti jedinica pri izboru sa nejednakim verovatnoćama i sa ponavljanjem. Žarković S. S.), Statist. rev., 1958, 8, № 1, 45—47 (сербо-хорв.; рез. англ.)

6070. К испытанию случайности серии случайных чисел, полученных по методу Исида. Нисихира (Nisihira Mieko), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1958, 5, № 2, 109—113 (японск.; рез. англ.)

6071. Влияние линейных связей между нормально распределенными коррелированными случайными величинами на распределение линейных функций от этих величин. Бейкер (The effect of selection of linear functions of normally distributed correlated variables on the distributions of other linear functions. Baker G. A., Ann. Inst. statist. Math., 1954, 5, 91—95) (англ.)

6072. Выборки малого объема в вероятностной сети. Хеннинг, Вартман (Stichproben kleinen Umfanges im Wahrscheinlichkeitsnetz. Henning H.-J. Wartmann R.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1957, 9, № 3, 168—181 (нем.)

Пусть

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_N$$

— вариационный ряд, построенный по выборке из нормальной совокупности с $M(X) = \mu$ и стандартным отклонением σ. Пусть далее

$$\lambda_k = (x_k - \mu)/\sigma; \qquad u_k = (x_k - \bar{x})/s;$$

$$\varphi(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \quad \pi_{N,k} = \int_{-\infty}^{\bar{\lambda}_k} \varphi(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\bar{\lambda}_k = M(\lambda_k).$$

Требуется провести на вероятностной бумаге прямую так, чтобы получались несмещенные оценки $\bar{x}$ и s для μ и σ соответственно, причем

$$s = \sum_k a_k \Delta_k^2 = \min,$$

где $\Delta_k = x_k - (\bar{x} + su_k)$, a_k — веса.

Из очевидных соображений следуют требования

$$\sum_k a_k = 1, \qquad a_k = a_{N-k+1}. \tag{1}$$

Оказывается при этом, что удовлетворение вышеуказанным требованиям обеспечивает несмещенность оценок $\bar{x}$ и s независимо от выбора a_k (удовлетворяющим условию (1)). Условия для выбора a_k получаются, если потребовать еще минимальной дисперсии оценок.

Если величинам x_k поставить в соответствие какие-либо другие величины $\pi'_{N,k}$, U'_k (также с $U'_k = -U'_{N-k+1}$), то оценка для $\bar{x}$ останется несмещенной, а для s окажется смещенной (см. РЖМат, 1956, 4699).

Б. В. Финкельштейн

6073. Оптимальное решающее правило для упорядочения средних значений нормально распределенных совокупностей. Сил (An optimum decision rule for ranking means of normal populations. Seal K. C.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1957, 7, № 28, 131—150 (англ.)

Имеем $(n+1)$ нормальных совокупностей $N(\mu_i, \sigma)$ с неизвестными средними и общей, но неизвестной дисперсией. Из них нужно выбрать группу совокупностей таким образом, чтобы при любых μ_i вероятность того, что совокупность, имеющая наибольшее среднее, не попадет в эту группу, была равна α $(0 < \alpha < 1)$.

Рассматривается класс C решающих правил $D(c_1 \ldots c_n)$ $(c_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n,\ \sum c_i = 1)$ для такого выбора.

Если получены $n+1$ наблюдений x_i по одному из каждой совокупности, то $D(c_1 \ldots c_n)$ определяется следующим образом: Совокупность, из которой получено наблюдение x_0, исключается из группы, если

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_{(i)} - x_0 > St_\alpha(c_1 \ldots, c_n),$$

и включается в противном случае. Здесь $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$ суть n упорядоченных наблюдений из $(x_1, \ldots, x_n)$ а $t_\alpha(c_1, \ldots c_n)$ определяется из соотношения

$$P\left[\sum_1^n c_1 Y_{(i)} - Y_{(0)} > St_\alpha(c_1 \ldots c_n)\right] = \alpha,$$

где $Y_{(1)} < Y_{(2)} < \ldots < Y_{(n)}$ суть n упорядоченных статистик из $N(0,1)$, а S — несмещенная оценка σ.

Обозначим $D(c_1 \ldots c_n)$ через D_0, если $c_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots n$, и через $D(r)$, если $c_r = 1$, $c_j = 0$, $j \neq r$.

В предыдущей работе (РЖМат, 1956, 6014) было показано, что в классе C D_0 максимизирует вероятность включения наилучшей (имеющей максимальное среднее) совокупности и исключения наихудшей (имеющей минимальное среднее) совокупности.

В настоящей работе среди решений класса C ищется оптимальное в том смысле, что, уступая по мощности решению D_0, оно дает минимальный объем выбранной группы. Таким решением является $D(n)$. Е. А. Баваров

6074. Асимптотическое поведение критериев для среднего значения логарифмически нормального распределения при известной дисперсии. Северо (Asymptotic behavior of tests on the mean of a logarithmico-normal distribution with known variance. Severo Norman C.), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 4, 1044—1046 (англ.)

Настоящая заметка является дополнением к работе Северо и Олдса (РЖМат, 1958, 6996). В реферируемой заметке автор рассматривает асимптотическое поведение критериев, предложенных в указанной работе, при больших объемах выборки. Сохраняется та же терминология, что и в основной работе. П. Ф. Беляев

6075. К асимптотической теории оценки и проверки гипотез. Ле-Кам (On the asymptotic theory of estimation and testing hypotheses. Le Cam L.), Proc. 3rd Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1956, 129—156 (англ.)

Цель работы — развить методику сведения проблем оценки и проверки гипотез при большом числе независимых эмпирических данных к тем же проблемам для нормального распределения. В работе связываются, с одной стороны, результаты Вальда (Wald A., Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 426—482) об асимптотической достаточности оценок максимального правдоподобия, а с другой, результат Неймана (Neymann J., Proc. Berkeley Sympos. Math. Statistics and Probability. Berkeley-Los Angeles, 1949, 239—273) о наилучших асимптотически нормальных регулярных оценках. Рассматриваются семейства распределений, зависящих от параметра и удовлетворяющих определенным условиям гладкости, которые все же не обеспечивают состоятельности

оценок максимального правдоподобия или даже их существования. Доказывается, что при выполнении этих условий существуют асимптотически нормальные оценки параметра, равномерные, в некотором смысле, относительно значения параметра. Далее показывается, что из произвольной оценки параметра, принадлежащей к достаточно широкому классу оценок, можно построить асимптотически достаточную оценку. Полученные результаты иллюстрируются на примере асимптотических свойств байесовских решающих функций. Автор также продолжает некоторые результаты Неймана (РЖМат, 1958, 3110) и строит в одном случае равномерно наиболее мощные критерии в классе так называемых асимптотически подобных критериев, т. е. критериев, у которых мощность асимптотически не зависит от параметрической точки. И. И. Гихман

6076. **Сокращение корреляции за счет ошибок измерения и взаимодействие. Мак-Немар** (Attenuation and interaction. McNemar Quinn), Psychometrika, 1958, 23, № 3, 259—265 (англ.)

Предлагается критерий значимости для определения будет ли коэффициент корреляции меньше 1 на величину, большую, чем можно приписать ошибкам измерения в дисперсионном анализе. Резюме автора

6077. **«Нормальные» многомерные доверительные границы. Рой** («Normal» multivariate confidence bounds. Roy S. N.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 128 (англ.)

6078. **Множественная решающая процедура, основанная на одной выборке, для ранжирования средних значений нормальных совокупностей с известной дисперсией. Бекхофер** (A single-sample multiple decision procedure for ranking means of normal populations with known variances. Bechhofer Robert E.), Ann. math. Statistics, 1954, 25, 16—39 (англ.)

6079. **К алгебре дисперсионного анализа. Рейерсёль** (A contribution to the algebra of the analysis of variance. Reiersøl O.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 127—128 (англ.)

Рассматривается модель, применимая в частных случаях полностью и частично смешанных симметричных факториальных планов и соответствующих квазифакториальных планов. Анализ основан на разбиениях множеств последовательностей индексов наблюдений или подмножеств этих множеств. Различные множества фиксированного разбиения содержат одинаковое число элементов и объединение любых двух разбиений, не включающих в себя первое, состоит из множеств, содержащих одинаковое число элементов. Первое разбиение, по предположению, удовлетворяет несколько более слабому условию относительно других разбиений.

6080. **Метод наименьших квадратов для парных сравнений с неполной матрицей данных. Галликсен** (A least squares solution for paired comparisons with incomplete data. Gulliksen Harold), Psychometrika, 1956, 21, № 2, 125—134 (англ.)

Дана некоторая система „стимулов" S_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Величины S_i рассматриваются как случайные, принимающие разные значения у разных индивидуумов и подвергающиеся статистической обработке. Эксперимент, проводимый, например, в форме опроса ряда лиц „Что Вы предпочитаете, S_i или S_j?" дает каждый раз только ответы вида $D_{ij}^* > 0$ или $D_{ij}^* < 0$, где D_{ij}^* — значение $D_{ij} = S_i - S_j$. По отношению количеств этих двух ответов, исходя из некоторых априорных предположений относительно дисперсий и законов распределения S_i, можно определить средние значения $\bar{D}_{ij}$, а затем найти средние значения $\bar{S}_i$ (с точностью до постоянной) путем минимизации $\sum_{(ij)} [\bar{D}_{ij} - (S_i - S_j)]$, где (i, j) — пары „стимулов", участвующие в эксперименте (матрица может быть неполной, так как некоторые пары стимулов плохо поддаются сравнению между собой). Такие подсчеты производятся в психометрии для изучения „предпочтений различных блюд, вещей, видов деятельности или целей". М. Л. Бродский

6081. **Теория квантования и примеры к ней. Хаяси** (Hayashi Chikio), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1958, 5, № 2, 163—169 (японск.; рез. англ.)

Обобщение метода квантования качественных данных, описанного в 2-й части статьи Хаяси (Hayashi C., Ann. Inst. Statist. Mathematics, 1952, 3, № 2).

6082. **Процедура вычисления коэффициентов регрессии. Кауден** (A procedure for computing regression coefficients. Cowden Dudley J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, 53, № 281, 144—150 (англ.)

Приводится новый метод получения хорошо известных формул коэффициентов регрессии различных порядков

$$b_{ij \cdot t} = \frac{b_{ij} - b_{it}\, b_{tj}}{1 - b_{jt}\, b_{tj}}$$

и

$$b_{ij \cdot tu} = \frac{b_{ij \cdot u} - b_{it \cdot u}\, b_{tj \cdot u}}{1 - b_{jt \cdot u}\, b_{tj \cdot u}}$$

и примеры вычисления этих коэффициентов по числовым данным. А. М. Бендерский

6083. **Об оптимальном выборе из многомерных совокупностей. Дес Радж** (On optimum selections from multivariate populations. Des Raj), Санкия, Indian J. Statist., 1955, 14, 363—366 (англ.)

Пусть случайная величина $(Y, X_1, \ldots, X_p)$ имеет совместную плотность вероятности $f(Y, X_1, \ldots, X_p) = f_1(x)\, \Phi(Y \mid x)$, где $x = (X_1, \ldots, X_p)$, и пусть $\eta(x)$ — функция регрессии Y на x. Автор характеризует в терминах f, Φ, f_1 и η области в x-пространстве, на которые требуется усечь $(Y, X_1, \ldots, X_p)$, для того чтобы частное распределение Y для усеченной совокупности имело некоторые желательные свойства. Рассматривается 4 типа таких свойств. Для 3-типов, если f — плотность многомерного нормального распределения, области усечения совпадают с областями, полученными Бирнбаумом и Чэпменом (Birnbaum and Chapman, Ann. Math. Statistics, 1950, 21; 443—447) и Кохраном (Cochran Proc. 2nd Berkeley Symposium Math. Statistics Probability, 1950, Univ. of California Press, 449—470). Четвертый тип до сих пор не рассматривался даже в мультинормальном случае. Z. W. Birnbaum

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 3, 279.

6084. **О классе процедур парных сравнений. Нотер** (On a class of paired comparison procedures. Noether G. E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 124 (англ.)

Метод парных сравнений Мостеллера—Терстона обобщается на класс процедур парных сравнений, содержащий как частные случаи метод m ранжировок (для сбалансированных неполных блоков размера 2) и модифицированный метод Брэдли—Терри. Критерии проверки нулевой гипотезы о нулевых разностях между способами обработки асимптотически сводятся к χ^2-критерию, связанному с методом m ранжировок. Асимптотическая эффективность этого критерия относительно критерия Шеффе, основанного на анализе дисперсии, равна $4\sigma^2 f^2(0)$, где $f(x)$ — плотность распределения ошибок измерения, предполагаемая симметричной относительно $x = 0$.

6085. **Факториальный анализ как психологический прием. Пель** (Factorial analysis as a psychologic

technique. Peel E. A. Uppsala Sympos. psychol. factor analysis, March 17—19, 1953, 7—22) (англ.)

6086. Некоторые искусственные эксперименты в факторном анализе. Вольд (Some artificial experiments in factor analysis. Wold H. Uppsala Sympos. psychol. factor analysis, March 17—19, 1953, 43—64) (англ.)

6087. Анализ и расположение результатов факториальных экспериментов. Бейкер (Analysis and presentation of the results of factorial experiments. Baker Anthony G.), Appl. Statist., 1957, **6**, № 1, 45—55 (англ.)

Описание систематического метода упорядочения и анализа результатов факториальных экспериментов. Метод в особенности удобен при применении настольных вычислительных машин и применим как в случае количественных, так и качественных факторов.

По резюме автора

6088. О некоторых совместных предельных распределениях в теории порядковых статистик. Винце (On some joint limiting distributions in the theory of order statistics. Vincze I.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 133 (англ.)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ — выборки из двух совокупностей с функциями распределения $F(x)$ и $G(x)$ соответственно. Пусть далее $F_n(x)$ и $G_m(x)$ — эмпирические функции распределений этих выборок. Пусть $\xi_0^{(n)}$ и $\eta_0^{(n)}$ = наименьшие значения x, на которых функции

$$D_n(x) = F_n(x) - G_n(x) \text{ и } |D_n(x)| = |F_n(x) - G_n(x)|$$

принимают максимумы.

Дается совместное предельное распределение статистик

$$\left\{ D_n(\xi_0^{(n)}),\ \frac{1}{2}\left[F_n(\xi_0^{(n)}+0) + G_n(\xi_0^{(n)}+0)\right]\right\}$$

и

$$\left\{ \left| D_n(\eta_0^{(n)}) \right|,\ \frac{1}{2}\left[F_n(\eta_0^{(n)}+0) + G_n(\eta_0^{(n)}+0)\right]\right\}$$

при гипотезе $F(x) \equiv G(x)$.

Обсуждаются некоторые следствия из результатов.

6089. Степень корреляции U. Нивергельт (Die Rangkorrelation *U*. Nievergelt E.), Mitteilungsbl. math. Statist., 1957, **9**, № 3, 196—232 (нем.)

Рассматривается ранговый коэффициент корреляции, предложенный Ван дер Варденом:

$$U = \sum_{i=1}^{n} \Psi\left(\frac{p_i}{n+1}\right)\Psi\left(\frac{q_i}{n+1}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Psi^2\left(\frac{i}{n+1}\right),$$

в котором $\Psi(w) = z$ — обратная функция нормального распределения

$$w = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{1}{2}t^2}\, dt,$$

p_i — ранг i-го наблюдения в выборке относительно одного, а q_i — относительно другого из коррелируемых признаков.

Доказывается, что U имеет математическое ожидание 0 и дисперсию $\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}$; приводятся выражения для других четных моментов (нечетные равны нулю).

А. М. Бендерский

6090. Случайность и перекрытие порядковых статистик. Кон (Randomness and overlap of order statistics. Cohn R. M.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh, Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 119—120 (англ.)

Пусть $F_1, \ldots, F_k$ — k непрерывных кумулятивных функций распределения на вещественной прямой. Из этих распределений извлекаются случайные выборки объема n. Пусть a_i обозначает наибольший, а b_i — наименьший члены в выборке из распределения F_i. Тацуока, Мостеллер и автор установили, что

$$P(\max b_i \leqslant \min a_i) \leqslant n^k \Big/ \binom{kn}{k} \to 0$$

при $k \to \infty$, причем равенство имеет место, если все F_i совпадают. Этот результат указывает на то, что обычно вторые по величине члены некоторых выборок, если число последних достаточно велико, превосходят (или, на языке автора, перекрывают) наибольшие члены в некоторых других. Отсутствие такого перекрытия указывает на отсутствие случайности в выборе.

6091. Письмо в редакцию. Королюк В. С., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, 22, № 5, 735

Поправка к работе В. С. Королюка (РЖМат, 1955, 374 Д).

6092. К выбору значений параметров при оценке спектральной плотности стохастического процесса. Зарембa (On the choice of parameter values in estimators of the spectral density function of a stochastic process. Zaremba S. K.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 133 (англ.)

Трудность статистического спектрального анализа лежит не в выборе формы оценки, а в выборе значений, входящих в нее параметров, например числа членов в периодограмме. Эти значения определяют порядок величины ожидаемой квадратической ошибки и их выбор должен основываться на предварительной оценке некоторых параметров, входящих в самый процесс. На основе исследований, проведенных автором и З. А. Ломницким, предлагается правило приблизительно оптимального усечения периодограммы.

6093 К. Элементарная статистика. Хауэлл, Голд (Elementary statistics. Howell John M., Gold Ben K. Dubuque, Iowa, William C. Brown Co., 1954, 154 pp., 3.00 doll.) (англ.)

6094 К. Первый курс статистики. Лавди (A first course in statistics. Loveday Robert. London, Cambridge Univ. Press, 1958, XI, 121 pp., ill. 8 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 444, 9 (англ.)

6095 К. Прикладная статистика для экономистов. Курс статистических методов. Кармел (Applied statistics for economists. A course in statistical methods. Karmel Peter Henry. Melbourne—London, Pitman, 1957, XI, 452 pp., ill., 65 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 438, 9 (англ.)

6096 К. Прикладная статистика для инженеров. Волк (Applied statistics for engineers. Volk William. New York—London, Mac Graw—Hill, 1958, XI, 354 pp., ill., 74 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 438, 9 (англ.)

6097 К. Введение в многомерный статистический анализ. Андерсон (An introduction to multivariate statistical analysis. Anderson Theodore Wilbur. New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1958, XII, 374 pp., ill., 5L) Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 438, 9 (англ.)

6098 К. Некоторые аспекты многомерного анализа. Рой (Some aspects of multivariate analysis. Roy S. N. New York, John Wiley and Sons; London, Chapman and Hall, 1958, VIII, 216 pp., ill., 64 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 438, 9 (англ.)

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

6099. Об одной теореме Ричардсона. Исбелл (On a theorem of Richardson. Isbell J. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, 8, № 5, 928—929 (англ.)

Под системой $(S, >)$ понимается некоторое множество с нерефлексивным отношением $>$. Для любого подмножества $T \subset S$ через $\mathrm{dom}T$ обозначим множество всех $x \in S$ таких, что для какого-нибудь $t \in T$ $t > x$. Подмножество $T \subset S$ называется решением системы $(S, >)$, если оно удовлетворяет соотношению $T = S - \mathrm{dom}\,T$. В реферируемой заметке приводится простое доказательство теоремы Ричардсона о существовании решения у некоторых классов систем $(S, >)$ (Richardson M., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 113—116). Изучение решений систем интересно потому, что с любой игрой n лиц можно связать систему $(S, >)$, решение которой совпадает с решением игры. И. А. Ибрагимов

6100. Несколько неравенств между характеристическими корнями и элементами минимакса (максимина) действительных матриц. Гатман (Some inequalities between latent roots and minimax (Maximin) elements of real matrices. Guttman Louis), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 897—902 (англ.)

Пусть $A = \| a_{ij} \|$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ — действительная матрица; $p = \max_i \min_j a_{ij}$, $q = \min_j \max_i a_{ij}$. В статье даются нижние границы для наибольшего по абсолютному значению характеристического корня λ^2 матриц AA' или $A'A$, где A' — матрица, транспонированная к A, а именно:

$$|\lambda| \geqslant p\sqrt{n}, \tag{1}$$

$$|\lambda| \geqslant -q\sqrt{m}. \tag{2}$$

Неравенство (1) применимо тогда и только тогда, когда $p > 0$, аналогично (2) — когда $q < 0$. В случае, когда все диагональные элементы симметрической корреляционной матрицы AA' равны 1, неравенства (1)—(2) перепишутся так:

$$\lambda \geqslant 1 + p(\sqrt{n} - 1), \quad \lambda \geqslant 1 - q(\sqrt{n} - 1).$$

С другой стороны, если известен наибольший по абсолютному значению корень λ_c^2 матрицы $A_c A_c'$, где $A_c = \| a_{ij} - c \|$ $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$, а v — значение игры, матрицей которой является A, то

$$c - \frac{|\lambda_c|}{\sqrt{m}} \leqslant v \leqslant c + \frac{|\lambda_c|}{\sqrt{n}}.$$

Доказательство неравенств (1)—(2) основывается на основной теореме матричных игр. Э. И. Вилкас

6101. Оптимальное поведение и рациональное управление. II. Методы решения «Теории игр». Боклер (Optimales Verhalten und rationelles Lenken. II. Lösungsmethoden der «Theorie der Spiele». Beauclair W. de), Inz.Anz., 1958, **80**, № 70, 1065—1068 (нем.)

Статья продолжает (РЖМат, 1958, 1412) трактовку общей теории матричных игр, включающую обзор нескольких элементарных методов решения. Приводятся примеры. О. В. Шалаевский

6102. Оптимальное поведение и рациональное управление. II. Методы решения «Теории игр». Боклер (Optimales Verhalten und rationeelles Lenken. II. Lösungsmethoden der «Theorie der Spiele». Beauclair W. de), Inz.-Anz., 1958, 80, № 74, 1127—1129 (нем.)

Окончание статьи (РЖМат, 1958, 1412). Затрагиваются игры 3×3 и один метод приближенного решения матричных игр общего вида. О. В. Шалаевский

6103. Динамическое программирование и статистическая теория связи. Беллман, Калаба (Dynamic programming and statistical communication theory. Bellman Richard, Kalaba Robert), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1957, **43**, № 8, 749—751 (англ.)

Отправной точкой авторов служит статья Келли (РЖМат, 1958, № 5, 3937) о новой интерпретации понятия скорости передачи информации.

Рассматривается дискретная передача M различных символов по каналу с шумами. Канал определяется условными вероятностями P_{ij} появления символа j на входе канала при условии, что на выходе получен символ i. Символы i, $i = 1, 2, \ldots, M$, вырабатываются источником независимо друг от друга с вероятностями q_i. Передача связана с игрой, в которой игрок (получатель), ставит ставку z_i на то, что передан символ i, причем $\sum z_i < x$. Если он ставит правильно, то получает сумму $r_i z_i$, в противном случае — ничего. Процесс продолжается N шагов с выплатой на каждом шаге. Задача игрока: определить оптимальную стратегию (policy), максимизирующую математическое ожидание некоторой данной функции $\varphi(w)$.

Если обозначить искомый максимум через $f_N(x)$, то задача сводится к обычным для динамического программирования функциональным уравнениям

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{M} q_i \left\{ \operatorname*{Max}_{\sum z_i < x} \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \varphi(r_j z_j + x - \sum_{s=1}^{M} z_s) \right\}$$

. . . . . .

$$f_N(x) = \sum_{i=1}^{M} q_i \left\{ \operatorname*{Max}_{\sum z_i < x} \sum_{j=1}^{M} p_{ij} f_{N-1}(r_j z_j + x - \sum_{s=1}^{M} z_s) \right\}.$$

Утверждается, что для $\varphi(w) = \log w$,

$$f_N(x) = \log x + Nk,$$

$$k = \sum_{i=1}^{M} q_i \left\{ \operatorname*{Max}_{\sum z_i < 1} \sum_{j=1}^{M} p_{ij} \log(r_j z_j + 1 - \sum_{s=1}^{M} z_s) \right\}, \tag{1}$$

и оптимальная стратегия не зависит от числа остающихся шагов, размера наличного капитала и последовательности $\{q_j\}$. Она определяется максимизацией в уравнении (1).

Указываются пути возможных обобщений и распространений метода на более сложные случаи. Доказательства отсутствуют. И. А. Ибрагимов

6104. Об одной теореме Вальда. Кун (On a theorem of Wald. Kuhn H. W.), Proc. 2 Sympos. Linear Programm., 1955, **1**, 273—275 (англ.)

Краткое изложение результатов автора (РЖМат, 1957, 7234). А. А. Корбут

6105. Замечание по задаче выбора кратчайшего маршрута. Минти (A comment on the shortest-route problem. Minty George J.), Operat. Res., 1957, 5, № 5, 724 (англ.)

Замечание к статье Данцига (РЖМат, 1958, 6018). Указывается на упрощение решения в случае симметричной матрицы расстояний. И. В. Романовский

6106. О линейном программировании. II. Ранку, Тёвишши (Despre programarea liniară. II. Rancu N., Tövissi L.), Rev. statist., 1958, 7, № 5, 39—48 (рум.)

Ч. I см. РЖМат, 1959, 2984.

6107. Линейное программирование (Метод выбора наилучшего решения). Думлер С. А., Техн.-экон. бюл. Сов. нар. х-ва Челяб. экон. р-на, 1958, № 3, 41—47

Модифицированный распределительный метод линейного программирования (автор называет его методом „северо-западного угла") применяется к решению задачи построения наивыгоднейшего календарного плана

работ с минимальной величиной производственных циклов и заделов. И. Н. Соколова

6108. Эволюция техники решения задач линейного программирования. Орчард-Хейс (Evolution of linear programming computing techniques. Orchard-Hays Wm.), Manag. Sci., 1958, **4**, № 2, 183—190 (англ.)

6109. Решение одной экстремальной задачи. Рубинштейн Г. Ш., Урбаник К., Теория вероятностей и ее применение, 1957, **2**, № 3, 375—377 (рез. англ.)

В квадратной матрице отмечено несколько клеток. Нужно в этих клетках так расставить неотрицательные числа p_{ij} с суммой 1, чтобы величина

$$\Phi = \sum_{i,j} p_{ij} \log \frac{p_{ij}}{\sum_k p_{ik} \sum_k p_{kj}}$$

достигла максимума (Вопрос предложен А. Н. Колмогоровым в связи с задачами из теории информации).

Элементарно доказывается, что $\max \Phi = \log r$, где r — наибольшее число клеток в наборе, который можно выбрать из отмеченных клеток, не используя клеток, с одинаковым номером столбца или строки. Имеются опечатки. В. А. Залгаллер

6110. Вывод линейного правила решений в вопросах производства и найма. Холт, Модильяни, Мат (Derivation of a linear decision rule for production and employement. Holt Charles C., Modigliani Franco, Muth John F.), Manag. Sci., 1956, **2**, № 2, 159—177 (англ.)

Выводятся оптимальные (т. е. дающие минимум издержек) правила решений для квадратичной функции издержек. Приведено подробное численное решение двух примеров. А. А. Корбу

6111. Экономическая интерпретация агрономических данных при помощи линейного программирования. Суонсон, Тайнер, Питерсон (Economic interpretation of agronomic data by the linear programming technique. Swanson E. R., Tyner E. H., Peterson G. A.), Soil Sci. Soc. America Proc., 1958, **22**, № 2, 132—136 (англ.)

Рассматривается возможность применения известного симплекс-метода линейного программирования для планирования площадей посевов, капиталовложений и т. д. на средней ферме в течение пятилетнего периода. Цель планирования — обеспечение максимальной прибыли при реально ограниченных возможностях фермера.

Рассмотрение приводится на конкретном примере. С. М. Мовшович

6112. Линейная модель производства железа и стали. Фейбиан (A linear programming model of integrated iron and steel production. Fabian Tibor), Manag. Sci., 1958, **4**, № 4, 415—449 (англ.)

Описано построение математической модели, к которой может быть применено линейное программирование в целях получения наиболее дешевой стали. Л. И. Горьков

6113. Линейное программирование в составлении графика добычи сырой нефти. Ли, Ароновский (A linear programming model for scheduling crude oil production. Lee A. S., Aronofsky J. S.), J. Petrol. Technol., 1958, **10**, № 7, 51—54 (англ.)

На конкретных примерах рассматривается задача составления графика нефтедобычи на несколько лет для нескольких скважин, соединенных нефтепроводами, с целью максимизации (при некоторых естественных ограничениях) общей прибыли. А. А. Корбут

6114. Объединение в экономических моделях. Маленво (L'agrégation dans les modèles économiques. Malinvaud E.), Cahiers sémin. économétrie, 1956, № 4, 69—146 (франц.)

Мемуар, посвященный детальному обсуждению понятий модели и объединения в экономических моделях. Под объединением автор понимает представление экономической модели через другие модели. Одна из глав рассматривает связь между объединением и теорией статистических решений Вальда. В заключение автор отмечает методологические трудности, возникающие при применении метода моделей и объединения в эконометрике. Библ. 42 назв. А. А. Корбут

6115. Замечание об экономическом равновесии для нелинейных моделей. Джорджеску-Регён (Note on the economic equilibrium for nonlinear models. Georgescu-Roegen Nicholas), Econometrica, 1954, **22**, № 1, 54—57 (англ.)

Некоторое обобщение результатов Никайдо (РЖМат, 1959, 5038), в частности Ω не обязательно ограничено. С. С. Кислицын

6116. О некоторых свойствах экономики, разделенной на отрасли, и их динамическая классификация. Керубино (Su alcune proprietà delle economie ripartite in settori e sulla loro classificazione dinamica. Cherubino Salvatore), Riv. polit. econ., 1957, **47**, № 6, 406—421 (итал.)

Возможность создания динамической теории общего экономического равновесия, исходя из матрицы Леонтьева внутренних промышленных связей, была установлена Гудвином и с бо́льшим приложением к действительной жизни в статье автора (РЖМат, 1959, 5036).

Вышеуказанная матрица не зависит от реакции рынка, кроме того, она выигрывает в простоте и общности, а также позволяет дать классификацию экономики, разделенной на отрасли. Возможные типы, которые различаются с ее помощью, очень произвольны.

Автор кратко упоминает о теоретической возможности управлять экономикой, давая прогнозы на более продолжительный срок. По резюме автора

6117. Заметка о сравнении валютных курсов и покупательной способности различных государств. Гири (A note on the comparison of exchange rates and purchasing power between countries. Geary R. C.), J. Roy. Statist. Soc., 1958, **A121**, № 1, 97—99 (англ.)

В связи с созданием общеевропейского рынка возникла проблема определения валютных курсов и международных цен.

Рассмотрим n государств и k товаров. Пусть p_{ij} и q_{ij} — цена и количество соответственно i-го товара в j-м государстве. Тогда международную цену i-го товара $-C_i$ и валютного курса j-го государства $-E_j$ автор предлагает определять из системы однородных линейных уравнений

$$C_i = \frac{\sum_j E_j p_{ij} q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}, \quad i = 1, \ldots, k;$$

$$E_j = \frac{\sum_i c_i q_{ij}}{\sum_i p_{ij} q_{ij}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Л. И. Горьков

6118. Производственные функции для австрийского народного хозяйства. Тинтнер (Produktonsfunktionen für die österreichische Landwirtschaft. Tintner Gerhard), Z. Nationalökon, 1958, **17**, № 4, 426—442 (нем.)

6119. Структурные балансы энергетики. Франк (Strukturbilanzen der Energiewirtschaft. Frank W.), Unternehmensforschung, 1958, **2**, № 3, 118—135 (нем.)

6120. Исследование операций. I. История, принципы, техника, приложения. Джейкобс. II. Определение, формулировка, анализ, истолкование. Купер. III. Анализ конкретных задач. Шрейбер (Operations research. I. History, concepts, techniques, applications. Jacobs Herberts H., II. Identification, formulation, analysis and interpretation. Cooper Gershon. III. Case studies. Schreiber Robert J. SAE Annual Meet. Preprints, s. a., № 35A, 30 pp., ill.) (англ.)

Сборник из трех статей представляет собой проекты докладов на конференции Общества транспортных инженеров (Society of Automotive Engineers). В первой из статей инженерные расчеты сравниваются с задачами технико-экономического выбора конструкций. Принятие решения о выборе к производству той или иной системы диктуется экономическими критериями и базируется на закономерности социальных явлений и предсказуемости поведения общественных групп (потребители, конкуренты, рабочие). Исследование операций занимается предсказаниями возможных последствий принятия того или иного решения. Предсказания основываются на изучении закономерностей явления (функционального или статистического характера) и производятся на основе математических, количественных подсчетов с использованием некоторых упрощений. Исследование операций не подменяет своей деятельностью само принятие решения, а только подготавливает его, обеспечивает количественные прогнозы результатов различных возможных действий.

Разобраны два примера иллюстративного характера: транспортная задача (линейное программирование) и задача массового обслуживания (ремонт работающих машин).

Во второй статье обсуждается процесс постановки задачи при исследовании операций, исходя из существенных переменных и принятых критериев оценки. Основной частью исследования является построение теоретической модели изучаемого явления. Модель должна быть достаточно простой. Результат исследования получается с помощью принятой модели и представляет собой предсказание будущих последствий тех, или иных действий (решений), предпринятых в настоящем.

Основную трудность при исследовании представляет выявление критериев оптимизации, выбор которых имеет решающее значение. В отличие от инженерных задач, решаемых по известным формулам и правилам, каждая задача исследования операций требует от исследователя скорее изучения закономерностей явления и разработки методики решения, чем применения готовой методики.

В третьей статье подробно рассматриваются две типичные задачи исследования операций: 1) распределение продукции между несколькими торговыми точками для продажи; 2) выбор оборудования для производственного предприятия.

В первой задаче исходными данными являются: предсказание спроса, прибыль от единичной продажи, скидка при продаже залежавшегося товара, наценка при дополнительном заказе в случае отсутствия изделия в магазине, риск потери покупателя, продажные цены (с наценкой на транспортировку). Решаются два вопроса: 1) сколько предметов должно быть произведено; 2) как произведенные продукты должны распределяться между магазинами для продажи. Задача решается до конца для случая двух магазинов.

Во второй задаче решается вопрос о выборе станков для производства нескольких различных изделий. При этом принимается во внимание: будущий спрос на различные изделия, будущие цены, будущая зарплата, срок каждого из возможных для приобретения станков и их производительность по каждому изделию.

Для случая приобретения предприятием любого (из числа возможных) станка подсчитывается ожидаемая прибыль на 12 лет вперед. Выбор станка для приобретения производится на основании полученных зависимостей прибыли от времени для каждого варианта покупки станка.

Обсуждаются особенности постановки каждой из двух задач. И. А. Полетаев

6121. Границы использования малоэффективных неделимых единиц. Бекман, Ладерман (A bound on the use of inefficient indivisible units. Beckmann Martin J., Laderman Jack), Naval Res. Logist. Quart., 1956, **3**, № 4, 245—252 (англ.)

Вопрос о распределении ресурсов в случае, когда неприменимо обычное экономическое предположение о полной делимости факторов, рассматривается на следующей задаче. Нужно перевезти определенное число пассажиров самолетами двух типов. Количество мест в самолете i-го ($i = 1, 2$) типа равно s_i, стоимость перевозки одного пассажира c_i, причем $s_1 > s_2$, $c_1 < c_2$, $s_2c_2 < s_1c_1$. Перевозка с минимальными затратами может потребовать использования самолетов типа 2. В работе указывается верхняя граница для их числа. Она дает возможность уменьшить число вариантов, которые нужно изучить при составлении оптимальной комбинации. Полученные результаты обобщены на случай $i > 2$.

Рассмотренную задачу можно свести к задаче линейного программирования. А. А. Корбут

6122. Приложение исследования операций при принятии перспективных решений. Клейн, Меклинг (Application of operations research to development decisions. Klein Burton, Meckling William), Operat. Res., 1958, **6**, № 3, 352—363 (англ.)

Обсуждается различие в применениях исследования операций к вопросам планирования текущих операций и к перспективному планированию. А. А. Корбут

6123. Применение теории игр к вопросам заинтересованности и контроля качества в промышленности. Нисимов (An application of game theory in incentives and quality control problems. Nissimov Leon H.), J. Industr. Engng, 1958, **9**, № 3, 213—216 (англ.)

В статье утверждается, что результатом применения теории игр при статистическом контроле в производстве является возможность увеличения выпуска продукции без снижения ее качества, поскольку при этом учитывается психология оператора.

Рассматриваемая задача обратна обычной задаче теории игр. Задается оптимальная стратегия оператора (процент брака P_a в выпускаемой продукции) и оптимальная стратегия контролера (размер в процентах контролируемой выборки $(1 - P_b)$), определяемые производственными факторами, и определяются элементы матрицы выигрышей X_1, X_2, X_3, X_4 для чистых стратегий оператора (производить брак, производить годную продукцию) и контролера (контролировать, не контролировать) так, что значение игры

$$M = P_aP_bX_1 + P_a(1 - P_b)X_2 + (1 - P_a)P_bX_3 + (1 - P_a)(1 - P_b)X_4 = 0.$$

При этом X_1, X_2, X_3, X_4 удовлетворяют уравнениям

$$X_1X_4 - X_2X_3 = 0, \quad \frac{X_4 - X_3}{X_1 - X_2 - X_3 + X_4} - P_a = 0,$$

$$\frac{X_4 - X_2}{X_1 - X_2 - X_3 + X_4} - P_b = 0, \quad X_1 - (1 - P_b)X_4 - 1 = 0.$$

При отклонении стратегии оператора от оптимальной величина M служит для определения поощрительных вознаграждений при росте качества и „штрафов" при снижении качества, что обеспечивает сохранение уровня качества продукции. Рассматриваются примеры.

С. М. Мовшович.

6124. Одно обобщение результатов Джонсона о составлении расписаний для массовых работ. Джэксон (An extension of Johnson's results on job lot scheduling. Jackson James R.), Naval Res. Logist. Quart. 1956, **3**, № 3, 201—203 (англ.)

Джонсон предложил эффективный алгорифм для решения следующей задачи. Изделия $1, 2, \ldots, N$ нужно обработать сначала на машине I, затем на машине II. Обработка n-го изделия на машине I требует времени $a_n > 0$, на машине II — времени $b_n > 0$. Указать такую последовательность обработки изделий, которая минимизирует суммарное время выполнения заказа.

В заметке содержится несложное, но практически важное обобщение этих результатов. Пусть все изделия относятся к одному из следующих типов: *A*) требующие обработки только на машине I, *B*) требующие обработки только на машине II, *C*) требующие обработки сначала на машине I, затем на машине II и *D*) требующие обработки сначала на машине II, затем на машине I. Нужно составить оптимальное расписание. Алгорифм состоит в следующем. Сначала упорядочим изделия типа *C*) (если для них $\min(a_n, b_n) = a_{n_1}$, то изделие n_1 ставим первым, если $\min(a_n, b_n) = b_{n_2}$, то изделие n_2 ставим последним), затем изделия типа *D*) (если для них $\min(a_n, b_n) = a_{n_1}$, то изделие n_1 ставим последним, если $\min(a_n, b_n) = b_{n_2}$, то изделие n_2 ставим первым). Затем на машине I последовательно отрабатываем изделия типов *C*), *A*), *D*), на машине II — изделия типов *D*), *B*), *C*). Порядок обработки изделий типов *A*) и *B*) безразличен.

Обобщение этих задач на 3 машины и более наталкивается пока на большие трудности. В заключение автор отмечает возможную неединственность оптимального расписания.

Примечание референта. Изложение подхода к подобным задачам с точки зрения динамического программирования см. в статье Белмана (РЖМат, 1957, 6551). А. А. Корбут

6125. Математика в составлении производственных графиков. Аншен, Холт, Модильяни, Мат, Саймон (Mathematics for production scheduling. Anshen Melvin, Holt Charles C., Modigliani Franco, Muth John F., Simon Herbert A.), Harvard Business Rev., 1958, **36**, № 2, 51—58 (англ.)

6126. Замечание к модели запаса. Финч (Note on a stock model. Finch P. D.), Operat. Res. Quart., 1958, **9**, № 1, 1—8 (англ.)

Рассматривается следующая ситуация. В запасе имеется N единиц товара. Требования на него поступают через промежутки времени t_r (интервал между $r-1$-м и r-м требованиями), которые являются независимо и одинаково распределенными случайными величинами. Числа n_r единиц товара, заявляемых в r-м требовании, также независимы и одинаково распределены. Ожидания $E(t_r)$ и $E(n_r)$ конечны.

Пусть $m(N)$ таково, что

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{m(N)-1} < N, \text{ а}$$

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_{m(N)} \geqslant N,$$

$m(N)$-е требование обеспечивается $N - (n_1 + n_2 + \ldots + n_{m(N)-1})$ единицами товара, после чего запас восполняется следующей партией из N единиц.

Доказывается:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} C^k(N) = c\{E[m(1)] + \ldots + E[m(N)]\}/E[m(N)]$

с вероятностью единица. $C^k(N)$ — стоимость хранения запаса за единицу времени для k последовательных его исчерпаний.

2. $N/E(n) \leqslant E[m(N)] < 1 + N/E(n)$,

3. $\sum\limits_{r=1}^{\infty} E[m(r)]\, x^{r-1} = 1/[(1-x)(1-a^1(x))]$,

$$a^1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^1 x^n \text{ и } a_n^1 = P(n_i = n),\ n = 1, \ldots$$

В качестве примера приводится случай геометрического распределения n_i. Результаты статьи обобщают выводы Джексона (РЖМат, 1959, 2999).

Н. М. Митрофанова

6127. Подход к линейной задаче о производстве и запане. Пинкем (An approach to linear inventory production rules. Pinkham Roger), Operat. Res., 1958, **6**, № 2, 185—189 (англ.)

Предложен метод выбора констант, характеризующих уровень производства, для достижения оптимального соотношения между издержками хранения и издержками производства. Основной идеей является измерение колебаний запаса и уровня производства среднеквадратичной ошибкой. Дан метод для их вычисления.

Задача проиллюстрирована на примере

$$I_n = I_{n-1} + P_{n-1} - S_n,$$
$$P_n = aP_{n-1} + bI_{n-1} + cF_n,$$

где I_n — запас к концу n-го периода, S_n — продажа в n-й период, P_n — производство в n-й период, F_n — предполагаемая (в конце $n-1$-го периода) продажа в n-й период, а константы a, b и c должны быть выбраны оптимальным образом. Л. И. Горьков

6128. Правила решений для амортизационных запасов. Бонини (Decision rules for buffer inventories. Bonini Charles P.), Manag. Sci., 1958, **4**, № 4, 457—471 (англ.)

В определенные периоды времени производятся n видов продукции. Предполагается, что количество производимой продукции определяется для всех видов в начале периода. Путем минимизации производственной стоимости обычными методами определяется планирование производства продукции всех n видов. Рассматривается приближенный метод, основанный на аппроксимации производственной стоимости квадратичной функцией стоимости. Для частных случаев определяется общая функция стоимости всех n видов продукции на данный период. Е. Б. Яновская

6129. Кибернетика, исследование операций и автоматика. Джордж (Cybernetics, operational research and automation. George F. H.), Instrum. Practice, 1958, **12**, № 7, 747—755; Abstr.-Process Control and Automat., 1958, **5**, № 6, 218—222 (англ.)

6130. Математическое исследование операций по смешиванию угля в паровозных депо (Пример линейного программирования). Урабэ, Ивасэ (Urabe Syun-ichi, Iwase Yuji), Тэцудо гидзюцу кэнкю сирэ, J. Railway Engng Res., 1958, **15**, № 1, 15—18 (японск.)

6131. Функции стоимости и производства. Шепард (Cost and production functions. Shephard R. W. Princeton, Univ. Press, 1953, VII, 104 pp., 2.00 doll.) (англ.)

6132. Последние методы использования гибкости подстановок. Моррисcетт (Some recent uses of elasticity of substitution. A survey. Morrissett Irving. Econometrica, 1953, **21**, 41—62) (англ.)

6133. Аппроксимация минимума объективной функции в линейном программировании методом разбиения. Сати (Approximation to the value of the objective function in linear programming by the method of partitions. Saaty Thomas L.), Operations. Res., 1956, **4**, № 3, 352—353 (англ.)

6134. Первое заседание по применению математики и статистики в экономических исследованиях. Николич (Osvrt na prvo savetovanje o primeni matematičkih i statističkih metoda u ekonomskim istraživanjima. Nikolić D.), Statist. rev., 1957, **7**, № 4, 416—418 (сербо-хорв., рез. англ.)

Сообщение о встрече эконометриков 6 декабря 1957 г. в Белграде.

6135. Исследование операций. Мот (La recherche opérationnelle. Mothes Jean), Rev. franç. énergie, 1957, **8**, № 82, 152—156, 173 (франц.)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

6136. О длине эмпирических кривых. Перкаль (O długości krzywych empirycznych. Perkal J.), Zastosow. mat., 1958, **3**, № 3-4, 258—284 (польск.; рез. русск., англ.)

То обстоятельство, что длина дуги является разрывным функционалом, приводит к неприятным практическим последствиям при измерении длин дуг эмпирических кривых. Поэтому автор предлагает измерять вместо длины дуги кривой $\mathfrak{X}$ введенную им ранее (РЖМат, 1959, 248) длину дуги порядка ε

$$L_\varepsilon(\mathfrak{X}) = \frac{a_\varepsilon(\mathfrak{X}) - \pi\varepsilon^2}{2\varepsilon},$$

где $a_\varepsilon(\mathfrak{X})$ — лебегова мера тех точек плоскости, расстояние от которых до дуги $\mathfrak{X}$ не превосходит ε. Величина $L_\varepsilon(\mathfrak{X})$ есть непрерывный функционал дуги $\mathfrak{X}$ и, если $\mathfrak{X}$ спрямляема, то $L_\varepsilon(\mathfrak{X})$ стремится к классической длине дуги $\mathfrak{X}$ при $\varepsilon \to 0$. Описывается конструкция специального прибора (ε-лонгиметра) для измерения $L_\varepsilon(\mathfrak{X})$. Высказываются некоторые теоретико-вероятностные соображения о погрешностях измерений с помощью такого прибора. М. И. Ядренко

6137. О решении сверхопределенной системы уравнений методом наименьших квадратов. Пешсон (Om lösningen av ett överbestämt ekvationssystem enligt minsta kvadratmetoden. Persson Olle), Nord. mat. tidskr., 1958, **6**, № 2, 69—77, 95 (шведск.; рез. англ.)

Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_r$ — независимые нормально распределенные величины со средним λ_i и стандартным отклонением τ;

$$\lambda_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{is}x_s,\ i = 1, 2, \ldots, r\ (s < r),$$

где $x_1, \ldots, x_s$ — неизвестные постоянные, которые требуется оценить.

Эта задача в статье сводится методом максимального правдоподобия к решению симметричной системы уравнений

$$A^*AX = A^*L.$$

(где X и L — векторы-столбцы).

Описывается один метод решения такой системы (включая определение средних ошибок для x_i) и иллюстрируется примером. Резюме автора

6138. Предельные ошибки результатов измерений и уравновешиваний. Шилов П. И., Изв. высш. учебн. заведений. Геод. и аэрофотосъемка, 1958, № 2, 3—14

Изложение общеизвестных результатов теории ошибок при малом числе измерений.

6139. Ошибки и поправки. Несколько любопытных замечаний. Жакоб (Erreurs et corrections. Quelques remarques curieuses. Jacob Maurice), Sci. et techn., 1957, **15**, № 5-6, 83—85 (франц.)

6140. Один метод введения поправок при наличии дефектных данных. Слоним, Мак-Колл (A method of adjustment for defective data. Slonim Morris James. McCall Chester H., Jr), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, **53**, № 283, 736—740 (англ.)

Иллюстрируется метод исправления дефектных данных при обнаружении грубых ошибок в измерениях.

6141. Случайные процессы Маркова при замене деталей машин. Сазиени (A Markov chain process in industrial replacement. Sasieni M. W.), Operat. Res. Quart., 1956, **7**, № 4, 148—155 (англ.)

В некоторой машине работает одновременно пара одинаковых деталей, живучесть которых зависит от числа проделанных циклов. Распределение вероятностей выхода одной детали из строя в зависимости от числа циклов предполагается известным, например, из статистических данных. На основании этого распределения легко устанавливается число циклов m, при котором обязательно меняется пара деталей.

Возможно, однако, что одна из деталей выйдет из строя при числе циклов $n < m$, тогда надо установить, следует ли одновременно менять и другую деталь, имея в виду, что преждевременная ее замена может обойтись дешевле, чем лишняя остановка машины.

Целью статьи является установление нижней границы для n, при которой производится замена пары, если выходит из строя только одна деталь, при условии минимальных затрат.

Для решения задачи используется аппарат цепей Маркова. Приводится числовой пример.

А. М. Бендерский

6142. Некоторые проблемы в теории водохранилищ. Кендалл (Some problems in the theory of dams. Kendall David G.), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 2, 207—233 (англ.)

Для водохранилища бесконечной вместимости со случайным пополнением за время $t_2 - t_1$, имеющим распределение $\frac{1}{2}\rho\chi^2_{2\tau}$ $(\tau = t_2 - t_1)$, и расходом за время $t_2 - t_1$, равным $t_2 - t_1$, преобразование Лапласа $(Ee^{-\Theta v})$ для функции стационарного распределения объема воды v в водохранилище равно:

$$(1-\rho) + \rho M(\Theta),$$

где

$$M(\Theta) = \frac{1-\rho}{\rho} \cdot \frac{\log(1+\rho\Theta)}{\Theta - \log(1+\rho\Theta)}.$$

В первой части работы путем обращения $M(\Theta)$ показывается, что

$$\lim_{\rho \to 1} P\{(1-\rho)v > w\} = e^{-2w}.$$

Во второй части определяется распределение времени T первого опустошения водохранилища, если в начальный момент $t = 0$ водохранилище имеет определенное заполнение.

Так, например, вероятность того, что время первого опустошения равно бесконечности, т. е. водохранилище никогда не будет пусто, определится из

$$P(T = \infty) \approx 1 - \exp\left\{-\frac{2S(I-D)}{D^2\gamma^2}\right\},$$

где S — начальное заполнение водохранилища, I — среднегодовое пополнение, D — среднегодовое потребление, $(I\gamma)^2$ — дисперсия годового пополнения.

П. А. Строганов

6143. Статистические аспекты анализа испытаний на употребительность. Джессоп (Statistical aspects of the analysis of usage trials. Jessop W. N.), Bull. Inst. Internat. Statist., 1955, **34**, № 4, 286—297 (англ.)

6144. Значение теории информации для техники измерений больших расстояний. Свобода (Die Bedeu-

tung der Informationstheorie für die Fernmeßtechnik. Swoboda G.), Arch. techn. Messen, 1958, № 269, R85—R89 (нем.)

6145. Математическая статистика в исследовании промышленных предприятий. Адам (Mathematische Statistik in der industriellen Unternehmensforschung. Adam A.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 262—263 (нем.)

6146. Интерпретация производственно-технических данных. Некоторые случаи, иллюстрирующие применение статистических приемов. Котрелл (Interpretation of production engineering data—some case studies illustrating the application of statistical techniques. Part V. Conclusions. Cottrell P. J. W.), Austral. Machinery, 1958, **11**, № 118, 21—27 (англ.)

6147. Статистика или эксперимент. Бург (Statistiek of experiment. Burg A. R. van der), Statist. neerl., 1958, **12**, № 3, 131—134 (гол., рез. англ.)

6148. Критерий точности наладки сортировочной машины. Клега, Зейц (Test přesnosti seřízení automatického třídiče. Klega Vladimír, Seitz Jiří), Aplikace mat., 1958, **2**, № 3, 124—140 (чешск.; рез. русск., англ.)

Автоматическая сортировочная машина пропускает детали, размеры которых попадают в интервал (γ_1, γ_2). Пусть измерение машиной дает значение $\eta + \xi$, где η — размер, по которому производится сортировка, а ξ — погрешность измерения, о которой предполагается, что она является нормальной случайной величиной с известной дисперсией. Строится критерий для проверки гипотезы $M\xi = 0$, основанный на точных значениях сортируемого размера в случайной выборке из партии деталей, которые были включены в интервал (γ_1, γ_2).
V. Fabian

6149. Выборочная приемка партий по способу медианы и квазиразмаха.— (Acceptance sampling of lots by the median, quasi-range method), Industr. Quality Control, 1958, **15**, № 1, 8—11 (англ.)

Предполагая, что контролю подлежат объекты, распределенные нормально по некоторому количественному признаку, показывается, как в таких случаях может быть использована выборочная медиана и квазиразмах (т. е. разность между i-ми членами от начала и конца вариационного ряда). Н. В. Смирнов

6150. О двух приложениях теоремы Ляпунова из исчисления вероятностей. Бейер (Über zwei Anwendungen des Satzes von Ljapounoff der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Beyer Otfried), Wiss. Z. Hochschule Schwermaschinenbau Magdeburg, 1958, **2**, № 1, 7—9 (нем.)

Указываются некоторые производственные приложения теоремы Ляпунова. Н. В. Смирнов

6151. Возможность применения математической статистики в металлургии. Вартман (Anwendungsmöglichkeit der Mathematischen Statistik im Metallhüttenwesen. Wartmann Rolf), Z. Erzbergbau und Metallhüttenwesen, 1958, **11**, № 2, 63—69 (нем.)

Статья содержит доклад, прочитанный на собрании металлургов и горняков, в котором излагаются соображения по организации статистического контроля в металлургии, основывающиеся на элементарных сведениях из математической статистики, В. М. Волков

6152. Обнаружение дефектных элементов в больших совокупностях. Стерретт (On the detection of defective members of large populations. Sterrett Andrew), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 4, 1033—1036 (англ.)

Рассматривается критерий, предложенный Дорфманом (Ann. Math. Statistics, 1943, **14**, 436—440) для обнаружения всех дефектных элементов в больших совокупностях. Предлагалось испытывать не каждый элемент генеральной совокупности, а партиями по k элементов сразу, и если такое испытание дает положительный результат — вся партия принимается, если отрицательный — испытывается каждый из k элементов отдельно. Было найдено оптимальное k и эффективность метода при различных вероятностях появления дефектных элементов.

Настоящая заметка посвящена повышению эффективности критерия. В. И. Бабкин

6153. Контрольные карты для меняющегося тренда. Бенкен (Moving trend control charts. Behnken Donald W.), Industr. Quality Control, 1957, **14**, № 5, 7—11 (англ.)

Рассматриваются следующего рода задачи, возникающие при анализе производственных процессов.

Пусть в моменты $x_1, \ldots, x_n$ времени X произведены измерения некоторой величины Y и пусть $y_1, \ldots, y_n$ — результаты соответствующих измерений. Требуется по известным значениям $y_1, \ldots, y_n$ приближенно оценить y^q — значение величины Y, соответствующее моменту времени x_q $(q \neq 1;\ q \neq 2; \ldots;\ q \neq n)$, и построить для величины y_q доверительный интервал.

Задача решается в двух предположениях:

1) В предположении, что зависимость между X и Y может быть достаточно хорошо описана линейной функцией.

2) В предположении, что зависимость между X и Y может быть достаточно хорошо описана параболой. Приводится ряд числовых примеров. П. Ф. Беляев

6154. Основы статистического метода контроля и производства качества продукции в текстильной промышленности. Матич (Osnovi statističkih metoda kontrole kvalitete proizvoda i proizvodnje u tekstilnoj industriji. Matič Eugen), Tekstil, 1956, **5**, № 7, 549—555 (сербо-хорв.)

6155. Что такое статистический контроль? Манайра (Che cos'e il controllo statistico? 16. Manaira Mario), Ufficio mod., 1958, **32**, № 8, 1324—1326 (итал.)

6156. О применении теории вероятностей к анализу нагрузок промышленных электросетей. Каялов Г. М., Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, **1958**, № 1, 114—123

Теория корреляции стационарных случайных процессов применяется к расчету нагрузок промышленных электросетей. Пусть $P(t)$ — суммарная нагрузка группы электроприемников. Рассматривается средняя величина нагрузки за интервал времени θ:

$$P_\theta(t) = \frac{1}{\theta}\int_t^{t+\theta} P(t)dt.$$

В предположении, что $P(t)$ представляет стационарный случайный процесс со средним $P_{ср}$ и корреляционной функцией $B(\tau)$, вычисляется среднее $P_{\theta ср}$ и среднее квадратическое значение $P_{\theta э}$ процесса $P_\theta(t)$. Найдено

$$P_{\theta\,ср} = P_{ср};\quad (P_{\theta\,э}\cdot\theta)^2 = 2\int_0^\theta d\tau \int_0^\tau B(\tau)d\tau.$$

Приведено вычисление корреляционной функции суммарной нагрузки для частного случая индивидуальных графиков нагрузки (двухступенчатый график).
Е. А. Баваров

6157. Непрерывный производственный выборочный контроль. Сонобэ, Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1957, **8**, № 10, 641—644 (японск.)

6158. Теория предсказания. Хонда Намио, Дэнки цусин гаккай дзасси, J. Inst. Electr. Commun. Engrs Japan, 1958, **41**, № 5, 559—565 (японск.)

6159. Детектирование негауссовского шума. Маллен, Мидлтон (The rectification of non-Gaussian noise. Mullen James A., Middleton David), Quart. Appl. Math., 1958, **15**, № 4, 395—419 (англ.)

Работа посвящена нахождению низкочастотной составляющей корреляционной функции на выходе полуволнового детектора

$$y=(gx)=\begin{cases}x^{\nu}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases} \qquad (1)$$

когда на его вход подается сумма независимых между собой синусоидального сигнала $s(t)$ и узкополосного негауссовского шума $N(t)$.

Шум $N(t)=\sum_i v_i(t=t_i)$, где t_i — случайные моменты времени, распределенные в соответствии с законом Пуассона, а v_i — одинаково распределенные случайные процессы, независимые (как процессы) при разных i.

Сигнал $s(t)=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi)$, где A_0, ω_0 — константы, а φ — фаза, случайная величина, равномерно распределенная на $(0,2\pi)$.

Идея применяемого в работе метода состоит в следующем. Как известно, корреляционная функция $R(t_1,t_2)$ на выходе нелинейного устройства $y=g(x)$, при некоторых ограничениях на рост функции $g(x)$ (для детектора (1) они выполнены), может быть записана в виде

$$R(t_1t_2)=I\{F_N(t_1t_2)\cdot F_S(t_1,t_2)\},$$

где I — некоторый оператор, а $F_N(t_1,t_2)$ и $F_S(t_1,t_2)$ — соответственно двумерные характеристические функции независимых между собой шума $N(t)$ и сигнала $S(t)$. Введя понятие „плотности" шума (произведение среднего числа импульсов v_i в единицу времени на среднюю длительность импульса), авторы показывают, что при большой „плотности" шума и независимости (как процессов) его огибающей и фазы двумерную характеристическую функцию $F_N(t_1,t_2)$ можно представить в виде

$$F_N(t_1,t_2)=DG_N(t_1,t_2,\psi_1,\psi_2,\psi)\mid_{\psi_1=\psi_2=\psi}. \qquad (2)$$

Здесь D — некоторый оператор, коммутирующий с оператором I, а $G_N(t_1,t_2,\psi_1,\psi_2,\psi)$ — двумерная характеристическая функция некоторого гауссовского процесса, зависящего от параметров ψ_1, ψ_2, ψ. Используя коммутативность операторов I и D, получаем

$$R(t_1,t_2)=I\{F_N\cdot F_S\}\;I\{DG_N\cdot F_S\}\mid\psi_1=\psi_2=\psi=$$
$$=DI\{G_N\cdot F_S\}\mid_{\psi_1=\psi_2=\psi}.$$

Таким образом задача сводится к нахождению корреляционной функции на выходе детектора, когда на его вход поступает гауссовский шум, с последующим применением оператора D.

Разложение типа (2) приведено и в случае малой „плотности" шума. Приведены асимптотические формулы низкочастотной части корреляционной функции на выходе детектора в зависимости от „плотности" шума и отношения сигнал/шум. Подробно рассмотрены некоторые примеры, приведены графики.

В работе встречаются неточности. Формула (10) работы написана неверно. Заметим также, что предположение авторов о независимости огибающей и фазы (как процессов) для процессов, близких к гауссовскому, по-видимому, неверно, так как у гауссовского процесса его огибающая и фазы зависимы.

В. В. Леонов, А. Н. Ширяев

6160. Частотно-временное представление сигналов, включающее натуральные компоненты. Хаггинс (The frequency-time representation of signals using natural components. Abstract. Huggins W. H.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, 5, № 2, 95 (англ.)

6161. Линейное сглаживание и предсказание по методу наименьших квадратов с приложениями. Дарлингтон (Linear least-squares smoothing and prediction, with applications. Darlington Sidney), Bell System Techn. J., 1958, 37, № 5, 1221—1294 (англ.)

6162. Оценка максимального правдоподобия в простых очередях. Кларк (Maximum likelihood estimates in a simple queue. Clarke A. Bruce), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 4, 1036—1040 (англ.)

Под простой очередью понимается очередь, имеющая пуассоновское распределение входов и отрицательно-экспоненциальное время обслуживания.

Рассматривается величина $\rho=\lambda/\mu$, известная как интенсивность движения системы (λ — среднее число появлений в единицу времени; $\frac{1}{\mu}$ — средняя продолжительность времени индивидуального обслуживания).

Цель заметки является статистическая оценка ρ, а также λ и μ.

Для оценки ρ, λ, μ получена функция правдоподобия

$$L=(1-\lambda/\mu)\,e^{-\mu\tau-\lambda T}\,\mu^{m-\nu}\lambda^{n+\nu}k,$$

где k не зависит от λ или μ; τ — определенным образом выбираемая константа: $\nu=n(0)$ — начальный объем очереди; m — общее число выходов; T — время m-го выхода, n — общее число приходов к моменту T.

Оценкой для ρ будет величина $\rho_1=\frac{(n+\nu)\tau}{(m-\nu)T}$, если $0<\rho_1<1$.

В этом случае для λ и μ оценками будут

$$\hat{\lambda}\cong\frac{n+\nu}{T},\quad \hat{\mu}\cong\frac{m-\nu}{\tau}.$$

В. И. Бабкин

6163. О некоторых основных задачах теории траффика. Хомма (On some fundamental traffic problems. Homma Tsuruchiyo), Yokohama Math. J., 1957, 5, № 1, 99—114 (англ.)

Рассматривается классическая система массового обслуживания с простейшим в смысле А. Я. Хинчина (РЖМат, 1957, 5032) потоком вызовов, n линиями и пуассоновским распределением длительности разговоров. Устанавливается, что производящие функции $\varphi_m(t,z)$ вероятностей $W_{mk}(t)$ того, что в данный момент t будет занято k линий, если в момент $t=0$ занято m линий, удовлетворяют некоторой системе интегральных уравнений, решение которой существует и единственно. Показывается, что задача решения такой системы сводится путем перехода к преобразованиям Лапласа функций $\varphi_m(t,z)$ по t к решению системы линейных уравнений с $(n+1)$ неизвестными и последующему обращению преобразований Лапласа. В качестве следствия таким путем получены классические формулы Эрланга для распределения вероятностей числа занятых линий в стационарном режиме.

Находится также система интегральных уравнений для производящих функций $\psi_m(t,z)$ вероятностей $L_{mk}(t)$ того, что за время t будет k отказов, если в начальный момент занято m линий. Вычисляется среднее число отказов в интервале $(0,t)$.

М. И. Ядренко

6164. Некоторые проблемы в теории обеспечения водохранилищ. Гани (Some problems in the theory of provisioning and of dams. Gani J.), Biometrika, 1955, 42, № 1-2, 179—200 (англ.)

Автор объединяет проблему обеспечения, исследованную Питтом (Pitt H. R., J. London Math. Soc., 1946, 21, 16—22), с проблемой водохранилищ, рассмотренной Мораном (РЖМат, 1957, 4268), в одну проблему под названием проблемы хранения.

Пусть $S(t)$ — запас в момент времени t; $I(t)$—количество, поступающее за период времени $(0, t)$; $D(t)$ — количество, выходящее за период времени $(0, t)$; $F(t)$—избыток за то же самое время. Тогда $S(t)=I(t)-D(t)$—$F(t)$ (избыток имеет место, когда $S(t)$ принимает максимальное значение). Автор принимает $S(0)=0$ и при определенных предположениях находит функцию распределения для $S(t)$ и ее предельное значение при $t\to\infty$.

Рассматриваются следующие случаи:

1) $\{I(t)\}$ есть пуассоновский процесс,

$$D(t)=\left[\frac{I(t-M)}{M}\right]M \quad \text{или} \quad D(t)=I\left\{\left[\frac{(t-T)a}{M}\right]\frac{M}{a}\right\},$$

где M — целое число, $T<\frac{M}{a}$ — положительная константа, $F(t)=0$ и $0\leqslant S(t)<\infty$; $[\ldots]$ означает, как обычно, наибольшее целое число, не превышающее число, стоящее в скобке. В обоих случаях определяется вероятность $P\{S(t)=n\}$ и ее предельное значение при $t\to\infty$.

2) (см. статью Морана). $\{I(t)\}$ есть стационарный процесс с независимыми приращениями, принимающий целые значения,

$$P\{I(t+\theta)-I(t)=i\}=p_i(\theta);$$

$D(t)$ есть ступенчатая функция со скачками в точках $t=1, 2,\ldots$, а именно, $D(t)-D(t-1)=M$, если $S(t-0)\geqslant M$ и $D(t)-D(t-1)=S(t-0)$, если $S(t-0)<M$, и $F(t)-F(t-1)=[S(t-1)+I(t)-J(t-1)-K]^+$,

где $[z]^+=\begin{cases}[z], & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$

В этом случае $\{S(t)\}$, $t=0, 1, 2,\ldots$, образует цепь Маркова, для которой вероятности перехода зависят от вероятностей

$$p_i=p_i(1)$$

3) $\{I(t)\}$ есть стационарный процесс с независимыми приращениями, принимающий целые значения

$$D(t)=I\left\{\left[\frac{(t-T)a}{M}\right]\frac{M}{a}\right\},$$

где M — целое число, $T<\frac{M}{a}$ — положительная константа, $0\leqslant S(t)\leqslant k$ и функция избытка удовлетворяет следующим условиям:

$$F\left(\frac{kM}{a}+T\right)-F\left(\frac{kM}{a}\right)=\left[S\left(\frac{kM}{a}\right)+I\left(\frac{kM}{a}+T\right)-I\left(\frac{kM}{a}\right)-k\right]^+,$$

$$F\left(\frac{(k+1)M}{a}\right)-F\left(\frac{kM}{a}+T\right)=\left[S\left(\frac{kM}{a}+T\right)+I\left(\frac{(k+1)M}{a}\right)-I\left(\frac{kM}{a}T\right)-k\right]^+.$$

При этих условиях, используя теорию марковских процессов, автор дает метод определения предельных значений вероятностей

$$P\left\{S\left(\frac{kM}{a}\right)=j\right\} \text{ и } P\left\{S\left(\frac{kM}{a}+T\right)=j\right\} \text{ при } k\to\infty.$$

Для случая, когда $\{I(t)\}$ представляет процесс Пуассона, автор приводит числовой пример.

4) Предыдущий случай исследуется при $T=\frac{M}{a}$.

5) В заключение автор обобщает задачу 2) на непрерывный случай, предполагая при этом, что $I(t)$ представляет пуассоновский процесс, точки скачков функции $D(t)$ образуют также пуассоновский процесс и скачки имеют величину M, и для этого случая дает явную форму предельного значения распределения $S(t)$ при $t\to\infty$. M. Ziermann

6165. К вопросу о применении геометрической средней, в частности, при вычислении индексов. Брахвиц (Zur Frage der Anwendung des geometrischen Mittels insbesondere bei Berechnung von Indexzahlen. Brachwitz Wilhelm), Allgem. statist. Arch., 1958, **42**, № 1, 39—41 (нем.)

6166. Некоторые применения математической статистики к проблеме снабжения электроэнергией. Джельсомини, Смид (Qualche applicazione di statistica matematica nelle imprese elettriche. Gelsomini Theo. Smid Allessandro. Bull. Inst. Internat. Statist., 1955, **34**, № 4, 370—383) (итал.)

6167. Экспоненциальное распределение и его приложения. Джоуэтт (The exponential distribution and its applications. Jowett G. H.), Incorp. Statist., 1958, **8**, № 2, 89—95 (англ.)

Автор получает экспоненциальное распределение как предельное распределение длины интервала между последовательными наступлениями события A в схеме Бернулли при $n\to\infty$ и $p\to 0$. Указывается, что этому распределению подчиняется процесс появления побочных разновидностей при выведении новых сортов растений невегетативным способом и распределение интервалов между вылетом частиц в радиоактивной эмиссии. Отмечается, что это распределение применяется при использовании метода „меченых атомов" в различных медицинских исследованиях, а также в различных аспектах проблемы обслуживания очередей. Ю. А. Веретенников

6168. Теория показателей. Роке (Teoria liczb wskaźnikowych. Roquet Raymond), Przegl. telekomun., 1958, **31**, № 5, 140—144 (польск.)

6169. К вопросу о применении математической статистики в маркшейдерии и геодезии. Лебединский Н. И., Ростковский Б. А., Тр. Всес. научно-техн. совещания по маркшейд. делу, 1956, М., Углетехиздат., 1958, 123—130

6170. Статистический анализ явлений, происходящих сериями. V(I). Качественный контроль и разрывные процессы в прядильном производстве. Акаике (Akaike Hirotugu), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1958, **5**, № 2, 133—139 (японск.; рез. англ.)

6171. Стастический анализ явлений, происходящих сериями. Качественный контроль и разрывные процессы в прядильном производстве. Симадзаки, Цубои, Касаи (Shimazaki Akinori, Tsuboi Hisashi, Kasai Tadamitsu), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1958, **5**, № 2, 141—151 (японск.; рез. англ.)

6172. Сравнение вероятности отцовства, исчисленной по особенностям группы крови с результатами наследственно-биологической экспертизы в 105 случаях. Прокоп, Шнейдер, Зёндероп (Vergleich der rechnerischen Wahrscheinlichkeit einer Vaterschaft auf Grund der Blutgruppenmerkmale mit dem Urteil des erbbiologischen Gutachtens dargestellt an 105 Fällen. Prokop Otto, Schneider Wilhelm, Soenderop Erika), Wiss. Z. Humboldt—Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1956—1957, **6**, № 5, 523—536 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Вероятностная трактовка одного метода определения отцовства, основанного на исследовании группы крови.

6173. Статистические основы диагноза и прогноза. Джини (Le basi statistiche delle diagnosi e delle

prognosi. Gini Corrado), Metron, 1953, 17, 127—150 (итал.)

6174. Демографическое прогнозирование с вероятностной точки зрения. Флюккигер (Bevölkerungsvorausberechnung in stochastischer Darstellung. Flückiger M.), Schweiz. Z. Volkswirtsch. und Statist., 1957, 93, №4, 417—44 (нем.)

До последнего времени математическая теория народонаселения носила детерминистический характер, согласно чему численность народонаселения в будущем однозначно определялась по прошлому. На демографическом конгрессе в Риме (1954 г.) было отмечено несовершенство такой точки зрения и указано на необходимость введения в демографию вероятностных представлений.

В настоящей работе автор пытается получить ряд соотношений, характеризующих рост народонаселения, при этом численность народонаселения, изменяющаяся с течением времени случайным образом, рассматривается как вероятностный марковский процесс. Исходя из таких предпосылок, автор рассматривает возможность получения ряда характеристик, описывающих изменение численности народонаселения. В частности, он рассматривает возможность, решая уравнения Колмогорова, получить закон Эйлера, согласно которому численность народонаселения возрастает по закону:

$$N(t) = N(0)\, e^{\lambda t},$$

и закон Ферхюлста (P. F.Verhulst), согласно которому численность народонаселения возрастает по закону:

$$N(t) = \frac{N(0)\, e^{\lambda t}}{k + N(0)(e^{\lambda t} - 1)},$$

здесь $N(0)$ — численность народонаселения в начальный момент времени, $N(t)$ — численность народонаселения в момент t, k и λ — некоторые константы. Кроме того, исходя из вероятностных моделей, автор оценивает ряд таких биометрических факторов, как число рождений за определенный отрезок времени, число лиц из некоторой группы, доживших до определенного возраста, и т. д. П. Ф. Беляев

6175. Основные вопросы математической стилистики. Кнауэр (Grundfragen einer mathematischen Stilistik. Knauer Karl), Forsch. und Fortschr., 1955, 29, № 5, 140—149 (англ.)

Автор провозглашает необходимость и правомерность использования математических (преимущественно статистических) методов в лингвистике. В качестве примера приводятся таблицы частот фонем в итальянской и французской речи с целью придать количественную формулировку утверждениям о „звучности" итальянского языка. В 54 ссылках дана обширная библиография.

М. З. Розенфельд

6176. Некоторые математические и статистические задачи в теории обучения. Сапс (Some mathematical and statistical problems which arise in learning theory. Suppes P.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 131 (англ.)

После краткого обзора линейных и марковских стохастических моделей для процесса обучения обсуждаются неразрешенные математические и статистические проблемы, от которых зависят экспериментальные исследования. Таковыми являются существование различных асимптотических величин в линейных моделях и оценка параметров в марковских моделях, когда наблюдения представляют статистические функции от состояний.

6177. Анализ числа очков при подачах мяча в игре в бейсбол. Рубин (An analysis of baseball scores by innings. Rubin Ernest), Amer. Statistician, 1958, 12, № 2, 21—22 (англ.)

6178. Многомерное квантование с приложением к анализу социальных явлений. Хаяси (Multidimensional quantification. With the applications to analysis of social phenomena. Hayashi Chikio. Ann. Inst. statist. Math., 1954, 5, 121—143) (англ.)

6179. Квазистационарное поведение некоторых нелинейных биологических моделей. Бартлетт (Quasi-stationary behaviour of some non-linear biological models. Bartlett M. S.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh Univ. Edinburgh, 1958, 118 (англ.)

Для некоторых нелинейных стохастических процессов, используемых в качестве моделей в экологии и эпидемиологии, предельное поведение может быть тривиальным и представлять меньший интерес, чем так называемое квазистационарное поведение в отдельные промежутки времени, в течение которых процесс в некотором смысле не зависит от времени.

С этой точки зрения рассматривается несколько типичных моделей. В частности, для моделей логистического типа исследуется среднее время жизни после заражения. Для двумерных колебательных процессов, используемых как модели возвращающихся эпидемий, теоретические результаты менее надежны и поэтому здесь применяются выборочные методы.

6180. Факторный анализ в психологии с точки зрения статистика. Бартлетт (Factor analysis in psychology as a statistician sees it. Bartlett M. S. Uppsala Sympos. psychol. factor analysis. March 17—19, 1953, 23—34) (англ.)

6181. Распределения по классам и некоторые их приложения. Сентис (Le répartitions en classes et quelques unes de leurs applications. Sentis Philippe), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1958, 7, № 1, 15—19 (франц.)

6182. Соотношения между валовой прибылью предпринимателей, стоимостью производства и различного рода итоговыми расходами потребителей. Юар-де-ля-Марр (Relations entre le bénéfice global des entrepreneurs, le prix global de la production et les montants globaux des dépenses des diverses catégories de consommateurs. Huard de la Marre R. Bull. trimestr. Inst. Actuaries Franç., 1954, 65, 31—43) (франц.)

6183. Пример применения отрицательно-гипергеометрического распределения. Гопкинс (An instance of negative hypergeometric sampling in practice. Hopkins J. W.), Bull. Inst. internat. Statist., 1955, 34, № 4, 298—306 (англ.)

6184. К соотношению между энергией распада и функциями распределения продуктов распада. Мияваки (Miyawaki Inosuke), Акита дайгаку кодзан гакибу тика сигэм кайхацу кэнкюсё хококу. Rept. Res. Inst. Underground Resources Mining Coll., Akita Univ. 1958, № 19, 50—58 (японск.; рез. англ.)

Энергия распада равна $E = -\int_{x_0}^{x_1} c\,dx/x^n$, где x_0 и x_1 — размеры частиц до и после распада соответственно, c и n — постоянные. В том случае, когда размеры частиц после распада распределены по закону

$$1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^a\right\} \quad (a \text{ и } b - \text{некоторые постоянные}),$$

$$E = \frac{c}{n-1}\left[b^{1-n}\,\Gamma\left(\frac{1+a-n}{a}\right) - x_0^{1-n}\right].$$

Когда функция распределения логарифмически нормальна,

$$E = \frac{c}{n-1}\left[x_g^{1-n} \exp\left\{\frac{(1-n)^2}{2}\ln^2 \sigma_g\right\} - x_0^{1-n}\right],$$

где x_g и σ_g — геометрическое среднее и геометрическое стандартное отклонение распределения.

В обоих случаях $\lim_{n\to 1} E = E_{n=1}$. Резюме автора

6185. О каноническом распределении Гиббса. Курт (Über Gibbs' kanonische Wahrscheinlichkeitsverteilung. Kurth Rudolf), Z. Naturforsch., 1958, **13a**, № 1, 30—32 (нем.)

Отмечается, что хотя каноническое распределение Гиббса не дает верного распределения значений энергии системы, тем не менее оно приводит к выводам, хорошо согласующимся с экспериментальными результатами. Автор показывает, что если вероятностное распределение состояний системы в фазовом пространстве при одной степени свободы будет произвольным (не обязательно распределением Гиббса) и удовлетворять лишь весьма общим условиям, то при безграничном увеличении числа степеней свободы оно будет приводить к распределению Больцмана для скоростей частиц, входящих в систему. П. Ф. Беляев

6186. Математическая структура корреляционных функций взаимодействующих частиц. Чжэнь (Mathematical structure of correlation functions for interacting particles. Tchen C. M.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 155 (англ.)

6187. Основная кривая смертности. Филипс (A basic curve of deaths. Phillips Williams), J. Inst. Actuaries, 1954, **80**, 289—325) (англ.)

6188. О билинейном представлении процентной нормы временных связанных рент. Руфенер (Über eine Bilineardarstellung der Barwerte temporärer Verbindungsrenten. Rufener Ernst). Mitt. Verein. schweiz Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 205—220 (нем.)

6189. Заметка о практическом определении уровня консервации. Тепо (Essai de détermination pratique du plein de conservation. Thépaut André. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français, 1953, **64**, 371—472) (франц.)

6190. Закон среднего возраста и формула Макегама. Люблен (La loi d'âge commun et la formule de Makeham. Lublin Mogens. Bull. trimestr. Inst. Actuaires Français, 1954, **65**, 21—29) (франц.)

6191. Новые случайные числа и их применение в страховой математике. Лах (A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics. Lah Ivo. Bol. Inst. Actuarios Portug., 1954, **9**, 7—15) (англ.)

6192. Вычисление премий в пенсионном страховании. (Prämienberechnung in der Pensionsversicherung). Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 286—328 (нем.)

6193. Теория коллективного риска и страхование. Амметер (La théorie collective du risque et l'assurance de choses. Ammeter H. Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmath., 1954, **54**, 185—204) (франц.)

6194 К. Финансовая и страховая математика. Ивальди (Matematica finanziaria ed attuariale. Per gli istituti tecnici commerciali. Vol. I. Ivaldi Piero. Milano, L. Trevisini, 1957, viii, 336 p., 1200 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 679, 622 (итал.)

6195 К. Современная коммерческая статистика. Фрёйнд, Вильямс (Modern business statistics. Freund John Ernst, Williams Frank J. Englewood Cliffs, N. J., Prentice—Hall; London, Bailey and Swinfen, 1958, xvii, 539 pp., ill., 68 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 444, 9 (англ.)

6196 К. Измерение и статистика: основной текст имеет в виду приложения к наукам о поведении. Сендерс (Measurement and statistics: a basic text emphasizing behavioral science applications. Senders Virginia L. New York—London, Oxford Univ. Press, 1958, xvi, 594 pp., ill., 42 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 445, 11 (англ.)

6197 К. Симпозиум по применению теории информации в биологии. Йокки (Symposium on Information Theory in Biology. (Gatlinburg, Tenn., Oct. 29th—31st, 1956). Ed. Yockey Hubert P. London—New York—Paris—Los Angeles, Pergamon Press, 1958, xii, 418 pp., ill.) (англ.)

6198 К. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Давенпорт, Рут (An introduction to the theory of random signals and noise. Davenport Wilbur B., Jr, Root William L. New York, McGraw—Hill Book Co., 1957, 402 pp. ill., 10.00 doll.) Publishers Weekly, 1958, **173**, № 10, 65 (англ.)

6199 К. Биоматематика. Смит (Biomathematics. Smith C. A. B. 3rd ed. rewritt. London, Ch. Griffin and Co., 1954, XV, 712 pp., 80 sh.) (англ.)

См. также: 5381, 5382, 5383, 5638

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

6200. Помогите геометрии зарекомендовать себя. Вильямсон (Help geometry prove itself. Williamson Donald A.), School Sci. and Math., 1958, **58**, № 1, 10—12 (англ.)

Для стимулирования усвоения учащимися средней школы аксиоматического метода в геометрии автор предлагает практиковать изучение с ними этим методом также элементов геометрической оптики. Такое изучение должно представить большой интерес для учащихся, так как здесь (в отличие от систематического дедуктивного курса геометрии, где учащиеся встречаются с материалом, уже во многом знакомым им из пропедевтического курса геометрии) они имеют дело с новыми для них фактами. Десять предложений, принимаемых автором за „аксиомы оптики", учащиеся должны установить сами экспериментальным путем.

Ю. М. Гайдук

6201. Некоторые замечательные задачи геометрии. Попа (Probleme frumoase de geometrie. Popa I.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 5, 262—265 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор подчеркивает „красоту" некоторых известных геометрических задач, отличающихся либо оригинальностью содержания, либо особой изящностью данных им решений. Среди них: 1) Трисектрисы внутренних углов треугольника попарно пересекаются в трех точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника (Морлей); 2) Пусть Γ — замкнутая кривая, внутри которой отрезок постоянной длины AB может совершить полный оборот, имея при этом свои концы A и B на Γ. Точка C отрезка AB описывает при таком обороте замкнутую кривую Γ_1. Доказать, что площадь, заключенная между Γ и Γ_1, равна $\pi AC \cdot CB$ (теорема Холдича); 3) Теорема Понселе: Если две кривые второго порядка так расположены, что существует много-

угольник, вписанный в одну и описанный около другой из них, то существует бесконечное множество таких многоугольников (доказательство этой теоремы имеется в книге „Конические сечения" Лебега).

Г. И. Глейзер

6202. **Перемещения и ориентации на уроках элементарной математики. Дельпла** (Déplacements et orientations en classe de mathématiques élémentaires. Delpla G.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1958, **37**, № 192, 331—337 (франц.)

Наглядное представление о точечном преобразовании дается путем установления соответствия между точками двух одинаковых, но различно расположенных тел (стульев). Соответствие между двумя прямыми D и D' ведет к установлению на них направления, при этом все отрезки на прямой разбиваются на два класса: те, которые направлены в ту же сторону, что и некоторая полупрямая $\vec{A\lambda}$, и те, которые направлены в сторону противоположной полупрямой $\vec{A\lambda_1}$. Для любых двух ориентированных прямых $\vec{D}$ и $\vec{D'}$ существует перемещение D, которое прямой D и ее точке A ставит в соответствие прямую D' и ее точку A'.

Предполагая далее, что D и D' совпадают, перемещение D называют прямым, если оно отрезки I класса переводит в отрезки того же класса, в этом случае $\overline{AM} = \overline{A'M'}$, и непрямым (déplacement indirect), если оно отрезкам I класса ставит в соответствие отрезки II класса, в этом случае $\overline{AM} = \overline{M'A'}$ (в этом равенстве можно переставлять крайние и средние точки). Непрямое перемещение является симметрическим преобразованием прямой относительно середины отрезка AA'.

При соответствии между двумя плоскостями P и P' ориентация на плоскости устанавливается путем рассмотрения ориентированного угла $(\vec{A\lambda}, \vec{A\mu})$, причем все углы на плоскости (за исключением равных нулю и развернутых) разбиваются на два класса. Предполагается, что существует перемещение D, ставящее в соответствие полупрямой $\vec{A\lambda}$ ориентированной плоскости P полупрямую $A\lambda'$ плоскости P'. Считая далее плоскости P и P' совпадающими, вводят понятия прямого и непрямого перемещения в плоскости. В случае прямого перемещения и совпадения начальных точек полупрямых $(\vec{O\lambda}, \vec{O\mu}) = (\vec{O\lambda'}, \vec{O\mu'})$ получаем вращение с центром в O и углом поворота $(\vec{O\lambda}, \vec{O\lambda'})$. Доказывается, что всякое прямое перемещение является либо переносом, либо вращением.

При изучении перемещений в пространстве рассматриваются ориентированные двугранные углы. Такой угол („створка", volet) имеет ориентированное ребро и правую и левую полуплоскости. А. Г. Школьник

6203. **Одно применение символического обозначения в аналитической геометрии. Морейра-Калаис** (Uma aplicação de representação simbólica em geometria analitica. Moreira Calaes Antônio), Rev. escola minas, 1958, **21**, № 3, 135 (порт.)

Иллюстрируется применение трилинейных координат для доказательства существования некоторой неподвижной точки вне эллипса для треугольников, образованных хордами этого эллипса. И. Я. Депман

6204. **К алгебре двойных чисел. Королёва М. С.**, Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1957, **7**, 113—136

Изучаются двойные числа $a + be$, $e^2 = 1$. Находятся условия, когда квадратный корень из двойного числа имеет 4, 2, 1 и ни одного значения, рассматриваются различные формы двойных чисел, аналогичные тригонометрической форме комплексных чисел, и элементарные функции двойного переменного. Б. А. Розенфельд

6205. **О независимости аксиомы Архимеда. Боровский Ю. Е.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 161—167

Автор доказывает, что аксиома Архимеда не зависит от усиленной аксиомы Кантора (последняя гласит, что для каждой системы последовательно вложенных промежутков — без предположения об их неограниченном уменьшении — существует общая точка). Метод доказательства существенно использует трансфинитную теорию множеств.

Определяется множество $\mathfrak{A}_1$ на основе произвольного множества A так: определяется операция $\varphi(A) = A \cup \theta$, где θ — множество разбиений множества A на суммы $A = A_1 + A_2$, где A_1 и A_2^* (множество, упорядоченное обратно A_2) суть упорядоченные множества, содержащие не более чем счетную конфинальную последовательность. Множество $\varphi(A)$ упорядочивается так: $x_1 < x_2$, если либо: а) $x_1, x_2 \in A$ и $x_1 < x_2$; либо; б) x_2 есть разбиение $[A_1, A_2]$, а $x_1 \in A_1$; либо в) x_1 есть разбиение $[A_1, A_2]$, а $x_2 \in A_2$; либо г) x_1 разбиение $[A_1', A_2']$, x_2 разбиение $[A_1'', A_2'']$ и $A_1' \subseteq A_1''$. Фиксируется любое множество $\mathfrak{A}_1$, инвариантное относительно операции φ.

$\mathfrak{A}_2$ есть множество формальных трансфинитных рядов $a_\alpha t^\alpha + a_\beta t^\beta + \ldots$, когда $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}_1$; оно строится из некоторых отображений $\mathfrak{A}_1$ в поле вещественных чисел. Доказывается, что $\varphi(\mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}_2$.

$\mathfrak{A}_3$ есть множество таких же рядов, но $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}_2$. Доказывается, что $\varphi(\mathfrak{A}_3) = \mathfrak{A}_3$. Множества $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$ естественно упорядочиваются на основе упорядочения $\mathfrak{A}_1$, что позволяет ввести аксиомы порядка.

Доказывается, что $\mathfrak{A}_3$ замкнуто относительно операции $\sqrt{e + \Delta^2}$, где $\Delta \in \mathfrak{A}_3$, e — единица, что позволяет ввести аксиомы конгруэнтности. В силу неархимедовости $\mathfrak{A}_3$ получается неархимедова геометрия, в которой тем не менее выполнена усиленная аксиома Кантора ($\varphi(\mathfrak{A}_3) = \mathfrak{A}_3$) и точка, общая всем сегментам, может быть выбрана существенно внутри всех последовательно вложенных сегментов.

В работе существенно используется трансфинитная индукция, и, таким образом, остается открытой проблема: независимы ли эти аксиомы при пользовании только средствами конструктивной математики.

Р. И. Пименов

6206. **В редакцию журнала УМН. Гордевский Д. З.**, Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 4, 266

Автор объясняет ряд положений в заметке Т. В. Солнцевой (РЖМат, 1957, 6595) неправильным пониманием его текста, признавая некоторые термины своей статьи „неподходящими". Отмечается недопустимо резкий тон этой заметки. В. А. Маневич

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6207. **Новый метод решения треугольников. Льельмо** (Nuovo metodo per la risoluzione dei triangoli. Glielmo Armando), Ingegneria mecc., 1957, **6**, № 12, 7—8 (итал.; рез. франц., англ., нем.)

6208. **К построению правильных десятиугольника и пятиугольника. Хибш** (Zur Konstruktion des regelmäßigen Zehnecks und Fünfecks. Hiebsch H.), Math. und naturwiss. Unterr., 1957, **10**, № 2, 82—83 (нем.)

Предлагается простой способ построения правильных десятиугольника и пятиугольника. В связи с выполненным чертежом получается построение золотого сечения, которое сравнивается с классическим построением.

Л. П. Гокиели

6209. **Шестиугольники, окаймленные равносторонними треугольниками. До** (Hexagones bordés de triangles

équilatéraux. Deaux R.), Mathesis, 1957, 66, № 4-6, 151—167 (франц.)

Шесть собственных, действительных, компланарных точек $A_1, A_2, \ldots, A_6$ — последовательные вершины шестиугольника (A). Вершины $A_k'(k = 1, 2, \ldots, 6)$ равносторонних и одинаково ориентированных треугольников $T_k' = A_k A_{k+1} A_k'$ — вершины шестиугольника (A'), ассоциированного с (A). Существует ∞^2 шестиугольников (A), ассоциированных с данным (A'). В шестиугольнике (A') основные диагональные векторы $\overline{A_1'A_4'}$, $\overline{A_5'A_2'}$, $\overline{A_3'A_6'}$ или равны векторам $\overline{OD_1'}$, $\overline{OD_2'}$, $\overline{OD_3'}$, соединяющим точку O с вершинами равностороннего треугольника $(D') = D_1' D_2' D_3'$ (тип I), или они равны между собою (в частности, все равны 0) (тип II).

Обозначим через a_k аффикс точки A_k, через $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ оператор поворота на угол $\frac{\pi}{3}$, через $\bar{\alpha}$ оператор α^{-1}. Тогда получим:

$$a_{k+1} = \bar{\alpha}\, a_k' + \alpha a_k;\quad a_2' - a_5' = \bar{\alpha}(a_6' - a_3') + \alpha(a_4' - a_1').$$

При помощи аналогичных выводов получаются следующие предложения. Вершины A_1', A_3', A_5' и A_4', A_6', A_2' равносторонних и одинаково ориентированных треугольников суть вершины шестиугольника (A').

При данном шестиугольнике (A') любая точка A_1 есть вершина одного или двух (A). В последнем случае стороны двух шестиугольников (A) совпадают, если $A_1' = A_3' = A_4' = A_6'$ и $A_2' = A_4'$. Если $A_1' = A_2' = \ldots = A_6'$, то (A) — правильный.

Центры тяжести троек A_1', A_3', A_5' и A_2', A_4', A_6' — G_1' и G_2' совпадают, если векторы $\overline{A_1'A_4'}$, $\overline{A_5'A_2'}$ $\overline{A_3'A_6'}$ равны соответствующим векторам в правильном шестиугольнике.

Если $M_{k,k+3}$ и M_{k+3}' — середины диагоналей $A_k A_{k+3}$ и $A_k' A_{k+3}'$, то треугольники $M_{14}' M_{14} M_{52}$, $M_{52}' M_{52} M_{36}$, $M_{36}' M_{36} M_{14}$ — равносторонние.

В шестиугольнике (A''), вершины которого A_k образуют треугольники $A_k' A_{k+1}' A_k''$ несобственно подобные T, основные диагональные векторы равны $3\overline{G_1 G_2}$ и обращаются в нуль при $G_1' = G_2'$.

Имеют место шесть равенств: $\overline{A_k A_k''} = \overline{A_{k+1} A_{k+2}}$.

Середины $M_{14}'', M_{52}'', M_{36}''$ основных диагоналей в (A'') суть вершины треугольника, несобственно подобного T_k.

Если $\Delta A_1' A_2' A_3'$ несобственно подобен T_k, то тройка $A_1' A_2' A_3'$ называется «несобственно правильной».

Если две из троек $(A_1' A_2' A_3')$, $(A_3' A_4' A_5')$ и $(A_4' A_6' A_1')$ несобственно правильны, то такой же будет и третья тройка, причем $G_1' = G_2'$.

Если тройка A_1', A_2', A_3' не есть несобственно правильная, то существует ∞^1 шестиугольников (A), причем точка A_1 лежит на окружности γ, описанной около $\Delta A_1' A_2'' X$, несобственно подобного T_k.

Если $G_1' \neq G_2'$, существует единственный (A), в котором $A_1A_2 \parallel A_3A_4 \parallel A_5A_6$. По этим сторонам проходят диагонали $A_5''A_2''$, $A_1''A_4''$, $A_3''A_6''$.

Обозначим через (A^*) шестиугольник, в котором $A_1A_2 \parallel A_3A_4 \parallel A_5A_6$ и одновременно $A_2A_3 \parallel A_4A_5 \parallel A_6A_1$.

Если $G_1' \neq G_2'$, то единственный (A^*) существует тогда и только тогда, когда точки A_k' лежат на оси симметрии m точек G_1' и G_2', на которой лежат все A_k.

Если $G_1' = G_2'$, то возможны три случая:

1) Если тройки $(A_1'A_2'A_3')$ $(A_6'A_1'A_2')$ и их аналоги — несобственно правильны, то существует (A^*), шесть вершин которого совпадают только в том случае, если совпадают вершины (A').

2. Если $(A_1'A_2'A_3')$ несобственно правильная, а $(A_6'A_1'A_2')$ — нет, то существует ∞^1 (A^*) лишь в том случае, когда A_1', A_3', A'_5 коллинеарны.

3. Если ни одна из вышеуказанных троек не есть несобственно правильная и окружности γ и γ_1 имеют, $0,1,2,\infty^1$ общих точек, то существует соответственно $0, 1, 2, \infty^1$ шестиугольников (A^*). Окружность γ_1 описана около $\Delta A_6' A_1'' Y$ подобного T_k.

Если тройки (A_1', A_2', A_3') и (A_6', A_1', A_2') не являются несобственно правильными, векторы $\overline{A_1'A_4'}$, $\overline{A_5'A_2'}$, $\overline{A_3'A_6'}$ равны соответствующим векторам правильного шестиугольника и противоположные стороны (A') параллельны, то существуют ∞^1 шестиугольников (A^*).

Обозначим через (A_*) шестиугольник, все углы которого прямые. Если $G_1' = G_2'$, точки A_1', A_3', A_5' коллинеарны, тройки $(A_1'A_2'A_3')$, $(A_3'A_4'A_5')$, $(A_5'A_6'A_1')$ несобственно правильны, то существует единственный (A_*), в котором $A_1 = A_2 = A_1'$; $A_3 = A_4 = A_3'$; $A_5 = A_6 = A_5'$.

Если в тех же условиях тройки $(A_1'A_2'A_3')$, $(A_6'A_1'A_2')$ не будут несобственно правильными, то любая точка A_1, отличная от A_6' и A_1' и общая окружностям $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ является вершиной (A_*). Окружность γ_2 описана около треугольника $A_6'A_1'B_6''$, подобного T_k.

Для того чтобы (A') приводил хотя бы к одному (A_*), необходимо и достаточно, чтобы основные диагональные векторы были равны соответствующим векторам правильного шестиугольника и в ряде треугольников $A_k'A_{k+1}'B_k'$, подобных T_k, два последовательных отрезка $A_k'B_{k-2}''$ были бы ортогональны. А. И. Фетисов

6210. О точках Фейербаха треугольника. Гурматай (Sur les points de Feuerbach d'un triangle. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1957, 66, № 7-9, 317—319 (франц.)

Используя метод комплексных координат, беря в качестве единичной окружности окружность девяти точек (O_9) треугольника ABC, автор получает непосредственно координаты точек $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ Фейербаха этого треугольника, как корни уравнения четвертой степени, коэффициенты которого выражены через элементарные симметрические функции координат треугольника $A'B'C'$ с вершинами в серединах сторон треугольника ABC. Рассматривается несколько следствий, связанных с интерпретацией коэффициентов полученного уравнения. Г. С. Бархин

6211. Прямая Симсона. Малкова Н. М., Сб. студ. научн. работ Марийск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 1. 101—117

Введение посвящено определению нормальных и трилинейных координат точки треугольника относительно основания треугольника. Дано уравнение прямой Симсона (прямая, проходящая через основание перпендикуляров, опущенных из точки M, окружности на стороны вписанного треугольника, называется прямой Симсона точки M). Выведено уравнение прямой Симсона в трилинейных координатах и показано известное свойство прямой Симсона, что прямая, проходящая через точки, которые являются зеркальным отражением M в сторонах ABC, проходит через ортоцентр треугольника параллельно прямой Симсона точки M. Даны примеры прямой Симсона в элементарной геометрии.

Примечание референта. В статье прямая Симсона ошибочно названа прямой Симпсона.

С. И. Зетель

6212. Рекуррентные теоремы о вписанных многоугольниках. Гурматай (Théorèmes récurrents relatifs aux polygones inscriptibles. Coormaghtigh R.). Mathesis, 1957, 66, № 7-9, 288—291 (франц.)

Пусть O — центр единичной окружности Γ, Ω — единичная точка, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — аффиксы вершин многоугольника $A_1, A_2, \ldots, A_n$, вписанного в Γ. Обозначим через $s_{\nu,1}, s_{\nu,2}, \ldots, s_{\nu,\nu}$ элементарные симметрические функции чисел $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ ($\nu \leqslant n$). Назовем ортоцентром многоугольника $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ точку с аффиксом $s_{\nu,1}$. Обозначая через $\bar{u}$ число, сопряженное с u, получим

$$\bar{s}_{\nu,j}\frac{s_{\nu,\nu-j}}{s_{\nu,\nu}} \quad (j<\nu), \quad \text{так что}$$

$$s_{\nu,j}\,\bar{s}_{\nu,j} = s_{\nu,\nu-j}\,\bar{s}_{\nu,\nu-1}.$$

Обозначим через $P_{\nu,j}$ точку с аффиксом $s_{\nu,j}$. Положение ее не зависит от положения на окружности единичной точки Ω, так как получим $s'_{\nu,j} = s_{\nu,j} : \alpha^j$.

Установив это, получаем далее общее соотношение:

$$s_{\nu+1,j} = s_{\nu,j} + t_{\nu+1}\,s_{\nu,j-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant \nu),$$

которое остается справедливым и при $j=1$, если положить $s_{\nu,0} = 1$.

Известно, что точка $s_{3,1}$ есть аффикс ортоцентра треугольника $A_1A_2A_3$. Из предыдущего получим, что этот ортоцентр есть пересечение трех окружностей, симметричных с Γ по отношению к сторонам треугольника $A_1A_2A_3$.

Во вписанном четырехугольнике $A_1A_2A_3A_4$ единичные окружности, центры которых совпадают с ортоцентрами треугольников $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, проходят через одну и ту же точку $P_{4,1}$ — ортоцентр четырехугольника.

В пятиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5$ единичные окружности с центром в точке $P_{4,1}$ и аналогичные окружности, центры которых совпадают с ортоцентрами четырехугольников $A_2A_3A_4A_5$, $A_3A_4A_5A_1$, $A_4A_5A_1A_2$, $A_5A_1A_2A_3$, проходят через общую точку — ортоцентр пятиугольника и т. д.

Точка $P_{3,2}$ симметрична с ортоцентром треугольника $A_1A_2A_3$ по отношению к диаметру окружности Γ, параллельному прямой Симсона для точки Ω.

Принимая еще во внимание равенство $s_{3,2}\,\bar{s}_{3,2} = s_{3,1}\,\bar{s}_{3,1}$, получим для

$$\nu = 3,4,\ldots \text{ и } j=2.$$

Окружности, проходящие через O и имеющие центрами точки, симметричные с ортоцентрами треугольников $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$, по отношению к диаметрам Γ, параллельным к прямым Симсона для точки окружности Γ и этих треугольников, имеют общую точку $P_{4,2}$.

И этим же путем мы можем получить последнее предложение предыдущего параграфа. Заметим, что в предложениях, относящихся к четырехугольнику, рассматриваемые окружности образуют пучок, откуда следует:

Во вписанном четырехугольнике точки, симметричные с ортоцентрами четырех треугольников по отношению к диаметрам, параллельным прямым Симсона этих треугольников относительно любой точки описанной окружности, лежат на одной и той же прямой.

Наконец, из того же равенства: $s_{3,2}\,\bar{s}_{3,2} = s_{3,1}\,\bar{s}_{3,1}$ получаем:

В четырехугольнике $A_1A_2A_3A_4$, вписанном в Γ, окружности, имеющие центрами точки, в которых перпендикуляры, проведенные из точки окружности Γ к прямым Симсона четырех треугольников для этой точки, и с радиусами, равными расстояниям O от ортоцентров этих треугольников, пересекаются в точке $P_{4,3}$.

Во вписанном пятиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5$ окружности с центром $P_{4,3}$ и радиусом $OP_{4,2}$ для четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$ и аналогичные окружности для четырехугольников $A_2A_3A_4A_5$, $A_3A_4A_5A_1$, $A_4A_5A_1A_2$, $A_5A_1A_2A_3$ пересекаются в точке $P_{3,5}$ и т. д.

А. И. Фетисов

6213. О кругах Скоуте. Тоскано (Sur les cercles de Schoute. Toscano L.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1957, 26, № 6, 314—324 (франц.)

Геометрическим местом точек, лежащих в плоскости данного треугольника и определяющих такие антиподерные треугольники, которые с данным треугольником имеют один и тот же угол Брокара, являются две окружности Скоуте. Когда угол изменяется, получается гиперболический пучок, в который входят описанная окружность, окружность Брокара, прямая Лемуана как радикальная ось, и изодинамические центры как предельные окружности пучка.

Пусть ABC — основной треугольник со сторонами a,b,c и площадью Δ треугольника; тогда отрезки Торричелли t и t' определяются формулами

$$2t^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\Delta\sqrt{3};\quad 2t'^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4\Delta\sqrt{3}.$$

Геометрическое место точек, расстояния которых от изодинамических центров W и W' находятся в данном отношении $(\frac{t'}{t})^\nu$ (где целое $\nu \geqslant 0$), есть окружность гиперболического пучка с предельными точками W и W'. Этот пучок совпадает с пучком окружностей Скоуте.

Пусть (Z_ν) — окружность, соответствующая числу ν, Z_ν и R_ν — ее центр и радиус, $X_\nu Y_\nu$ — диаметр на линии центров пучка. Для $\nu = 0$ получим прямую Лемуана (радикальная ось пучка). Для $\nu = 1$ — описанная окружность с центром 0 и радиусом R. Для $\nu = 2$ — окружность Брокара, для которой $X_2 \equiv 0; Y_2 \equiv K$ (точка Лемуана). Радиус R обозначим через σ. Для $\nu > 2$ точки на линии центров идут в последовательности $0, X_\nu, Z_\nu, W, Y_\nu, K, W'$. Для $\nu = 3$ центр и радиус окружности (Z_3) определяются формулами

$$OZ_3 = \frac{t^2 + t'^2}{t^4 + t^2t'^2 + t'^4}tt'R = \frac{t^4 - t'^4}{t^6 - t'^6}tt'R,$$

$$R_3 = \frac{t^2t'^2}{t^4 + t^2t'^2 + t^4}R = \frac{t^2 - t'^2}{t^6 - t'^6}t^2t'^2R.$$

Далее можно получить формулу $WW' = \left(\frac{t^\nu}{t'^\nu} - \frac{t'^\nu}{t^\nu}\right)R_\nu$.

Триполярные координаты точки X_ν по отношению к вершинам основного треугольника суть:

$$AX_\nu = \frac{bc}{t^\nu - t'^\nu}[(t^{\nu-2} - t'^{\nu-2})(t^\nu - t'^\nu) + 3a^2t^{\nu-2}t'^{\nu-2}]$$

для BX_ν и CY_ν координаты получаются циклической заменой букв a,b,c).

Итак (Z_ν) есть геометрическое место точек, находящихся внутри описанной окружности, расстояния которых от изодинамических центров находятся в отношении $(\frac{t'}{t})^\nu$ и антиподерные треугольники которых имеют угол Брокара, равный ε_ν.

Из формул удвоения для $\sin 2\varepsilon_\nu$, $\sin 2\varepsilon_{\nu,1}$, $\sin 2\varepsilon_{\nu,2}$ и формулы $\frac{R_\nu}{R_{2\nu}} = \frac{t^\nu}{t'^\nu}$ получаем соотношение:

$$\frac{R_\nu - R_{2\nu}}{\sin 2\varepsilon_{\nu+1,1}} = \frac{R_\nu}{\sin 2\varepsilon_{\nu+1}} = \frac{R_\nu + R_{2\nu}}{\sin 2\varepsilon_{\nu+1,2}}.$$

С другой стороны: $\varepsilon_{\nu+1,1} + \varepsilon_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+1,2} = 90°$.

Отсюда заключаем, что треугольники, определяемые углами $2\varepsilon_{\nu+1,1}$, $2\varepsilon_{\nu+1}$, $2\varepsilon_{\nu+1,2}$ имеют стороны, пропорциональные величинам:

$$R_\nu - R_{2\nu},\ R_\nu,\ R_\nu + R_{2\nu}.$$

Обобщением точек Брокара Ω и Ω' являются точки Ω_ν, Ω'_ν окружности (Z_ν), симметричные по отношению к диаметру $X_\nu Y_\nu$, причем:

$$\angle \Omega_\nu X_\nu Y_\nu = \angle Y_\nu X_\nu \Omega'_\nu = \varepsilon_\nu.$$

Пусть $X_{-\nu}$ и $Y_{-\nu}$ — точки линии центров, делящие извне и изнутри отрезок WW' в отношении $(\frac{t'}{t})^{-\nu}$. Точка $X_{-\nu}$ симметрична с $X_{-\nu}$, $Y_{-\nu}$ — с Y_ν по отношению к J — середине WW', также симметричен центр $Z_{-\nu}$ окружности $(Z_{-\nu})$ с центром Z_ν. При $\nu>2$ последовательность точек на прямой такова: $O, X_\nu, Z_\nu, W, Y_\nu, K, J, Y_{-\nu}, W', Z_{-\nu}, X_{-\nu}$.

Рассмотрим на прямой Эйлера точки D, F описанной окружности (по одну сторону с центром тяжести G по отношению к O). Окружности $WW'D$ и $WW'F$ касаются этой прямой в точках D и F. Окружности (Z_ν) и $(Z_{-(\nu-2)})$ находятся соответственно внутри и вне описанной окружности и являются двумя окружностями Скоуте.

Центры гомотетии U и U' окружностей (Z_ν) и $(Z_{-(\nu-2)})$ делят отрезок извне и изнутри в отношении $\frac{R_\nu}{R_{\nu-2}}$. Отсюда получаем:

$$UZ_\nu = \frac{R_\nu}{R_{\nu-2} - R_\nu} Z_\nu Z_{-(\nu-2)} = OZ_\nu;$$

$$U'Z_\nu = \frac{R_\nu}{R_{\nu-2} + R_\nu} Z_\nu Z_{-(\nu-2)} = KZ_\nu.$$

Следовательно, центры гомотетии совпадают с точками O и K. Поэтому (Z_ν) и $(Z_{-(\nu-2)})$ взаимны в инверсиях относительно центров O и K.

Радиусом первой инверсии является R. Радиус второй — мнимый и равен $\rho_2\sqrt{-3}$. Окружности инверсии ортогональны, так как

$$R^2 - 3\rho_2^2 = 4\sigma^2.$$

Произведение инверсий $[O; R]$ и $[K; \rho_2\sqrt{-3}]$ есть инволюционное преобразование Мёбиуса с двойными точками W и W', центром J, степенью $1/4WW'^2$ и окружность Скоуте единственна. А. И. Фетисов

6214. Заметка о теореме Фейербаха. Рао (A note on Feuerbach's theorem. Rao K.. Srinivasa), Math. Student, 1957, **25**, № 3-4, 172—174 (англ.)

Теорема Фейербаха о касании окружности девяти точек и окружности, вписанной в треугольник, доказывается координатным методом в косоугольных координатах. За ось координат принимаются две стороны треугольника. Из уравнения радикальной оси следует, что она касается каждой из окружностей. Из полученного доказательства непосредственно следует, что окружность девяти точек касается и вневписанных окружностей. С. И. Зетель

6215. Неравенство из стереометрии. Велдкамп (Een ongelijkheid uit de stereometrie. Veldkamp G. R.), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1955—1956, **43**, № 4, 213—215 (гол.)

Дается элементарногеометрическое доказательство неравенства $a + b + c + d > p + q + r$, где a, b, c — длины трех сходящихся в одной вершине ребер блока (т. е. призмы, основанием которой служит параллелограмм), d — длина выходящей из этой вершины диагонали блока, а p, q, r — длины диагоналей граней блока, выходящих из той же вершины. Отмечено, что это неравенство равносильно неравенству для векторов $|a + b + c| + |a| + |b| + |c| > |a + b| + |b + c| + |c + a|$, названному Бляшке (РЖМат, 1956, 4723К) неравенством Хорниха (Hornich) и Главки (Hlawka). Ю. М. Гайдук

6216. О высотах тетраэдра. Тебо (Sur les hauteurs d'un tétraèdre. Théballt Victor), Mathesis, 1957 **66**, № 10, Suppl., 1—8 (франц.)

Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы основания высот тетраэдра располагались на замечательных прямых треугольников граней.

Например: Если основание D' высоты DD' тетраэдра $ABCD$ расположено на прямой Эйлера треугольника грани ABC и по величине и знаку $O_dD' : D'H_d = k$, где O_d центр описанной окружности, а H_d—ортоцентр его, то:

$$(1 + k)\cdot DA^2 + k\cdot BC^2 = (1 + k)\cdot DB^2 + k\cdot CA^2 = (1 + k)DC^2 + k\cdot AB^2,$$

и обратно. Если основание высоты DD' тетраэдра T на прямой O_dI_d, где I_d — центр окружности, вписанной в ABC, и по величине и знаку $O_dD' : D'I_d = k$, то:

$$(1 + k)\cdot DA^2 - k\cdot AB\cdot AC = (1 + k)\cdot DB^2 - k\cdot BA\cdot BC = (1 + k)\cdot DC^2 - k\cdot CA\cdot CB$$

и обратно, и т. д. С. К. Шакулова

6217. О первой точке Лемуана в тетраэдре. До (Sur le premier point de Lemoine d'un tétraèdre. Deaux R.), Mathesis, 1956, № 4-6, 279—281 (франц.)

Первой точкой Лемуана в тетраэдре называется центр квадрики, проходящей через основания высот (см. РЖМат, 1958, 1489), Дано геометрическое доказательство при помощи полярного соответствия следующей теоремы, доказанной Гурматаем аналитически. Центр E квадрики Σ — эквицентр пары тетраэдров (A) $A_1A_2A_3A_4 \equiv \equiv \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, (B) $B_1B_2B_3B_4 = \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ обратных (инверсных) относительно квадрики. С. И. Зетель

6218. О паре точек, из которых одна инверсна данной точке относительно треугольника, а другая относительно окружности, описанной около треугольника. Бланшар (Sur les inverses d'un point dans un triangle et dans le cercle circonscrit à ce triangle. Blanchard René), Mathesis, 1958, **67**, № 1-3, 55—56 (франц.)

Показано, что в треугольнике ABC, вписанном в круг (O, R), отрезок $M'M''$, где M' и M'' — точки, инверсные произвольной точке M относительно треугольника и окружности, равен

$$\frac{R\cdot MA\cdot MB\cdot MC}{MO\,(R^2 - OM^2)}.$$

Для получения приведенного соотношения используется равенство, данное Гурматаем

$$\frac{M'M''}{OM'} = \frac{\omega\varphi}{O_9\omega},$$

где O_9 — центр круга Эйлера (круга девяти точек), ω — центр окружности, описанной около подерного треугольника точки M относительно данного треугольника ABC и φ — ортополюс OM в треугольнике ABC.

С. И. Зетель

6219. Общее уравнение изогональной инверсии. Дo (Equation générale de l'inversion isogonale. Deaux R.), Mathesis, 1957, **66**, № 7-9, 252—260 (франц.)

В изогональной инверсии в треугольнике ABC прямой AP, где P — произвольная точка в плоскости треугольника — соответствует прямая AP' так, что биссектриса угла BAC есть одновременно биссектриса угла PAP'. Для построения точки M', соответственной в изогональной инверсии данной точке M, необходимо и достаточно построить прямые BM' и AM', изогональные BM и AM.

Ф. Морлей и Ф. В. Морлей дали уравнение, ставшее классическим, изогональной инверсии в плоскости Гаусса в треугольнике ABC, когда начало координат есть центр круга, описанного около треугольника, а радиус равен единице. В настоящей заметке выводится уравнение в комплексных числах изогональной инверсии в треугольнике PQR, отнесенной к произвольным прямоугольным осям OX и OY, и рассматриваются некоторые частные случаи, связанные с особым расположением треугольника PQR относительно основного треугольника ABC. Например, PQR — дополнительный, антидополнительный, тангенциальный треугольник для треугольника ABC.

Выведено уравнение изогональной инверсии в частном случае, когда начало координат лежит на окружности, описанной около основного треугольника.

Особо рассматривается случай двух изогональных точек, из которых одна расположена на окружности, описанной около треугольника, а другая — в этом случае несобственная точка.

В заключение исследуются общие изогональные точки треугольников PQR и $P_1Q_1R_1$, вписанных в круг (Ω,ρ) и (Ω_1,ρ_1).

Находятся необходимые и достаточные условия существования хотя бы одной такой пары точек (собственных или несобственных). Показано существование двух изогональных точек одновременно в треугольнике ABC и в его тангенциальном и антидополнительном треугольниках. Эти точки — фокусы кривой второго порядка, вписанной в два последних треугольника с центром в точке M, $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{KH}$, где O, H, K — соответственно центр описанной окружности, ортоцентр и точка Лемуана треугольника ABC.

С. И. Зетель

6220. Геометрия на сфере и сферическая тригонометрия. Коновалова Н. А., Сб. студ. научн. работ Марийск. Гос. пед. ин-та, 1957, вып. 1, 92—100

Определяются площади сферических фигур. Доказаны теоремы, позволяющие вычислить площадь сферического двухугольника, сферического треугольника и площадь обходимой области, ограниченной несамопересекающимся сферическим многоугольником. Векторно выводятся основные формулы сферической тригонометрии: формула синусов, формула косинусов, формула пяти элементов и др.

С. И. Зетель

6221. Доказательство теоремы Помпейю в n-мерном пространстве. Хумал А. К., Изв. АН ЭстССР, Сер. техн. и физ.-матем. н., 1958, **7**, № 2, 154—155

Теорема Помпейю утверждает, что расстояния от вершин равностороннего треугольника до любой точки его плоскости удовлетворяют условию

$$|u - v| < w < u + v.$$

Координатным методом показано, что теорема справедлива для n-мерного пространства, причем во всяком пространстве, кроме двумерного, имеем $|u - v| < w < u + v$ (случай равенства исключается). На плоскости случай равенства имеет место для точек, лежащих на окружности, описанной около равностороннего треугольника.

С. И. Зетель

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6222. Аксиоматическое определение векторного произведения. Вебер (Une définition axiomatique du produit vectoriel. Weber M.), Bull. Assoc. professeurs math. enséign public, 1956, **36**, № 180, 127—130 (франц.)

Для векторного произведения двух векторов U и V, в евлидовом пространстве трех измерений, автор предлагает определение, основанное на следующих предложениях:

1) $W = U \times V$ — линейная векторная функция, кососимметричная относительно U и V.

2) Если U, V и W прилагаются к общему началу и если U', V' получаются из U и V движением (необходимо вращением около оси $O\Delta$), то вектор $W' = U' \times V'$ должен получаться из $W = U \times V$ тем же перемещением.

3) W — непрерывная функция U и V.

Очевидно, эти предложения не будут независимыми; даже с точки зрения педагогической интерес к такому представлению очень скромный.

I. Barbălat.

6223. К вопросу о векторном произведении. Вебер (A propos du produit vectoriel. Weber M.), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public., 1957, **36**, № 185, 354 (франц.)

Две поправки к предыдущей статье автора (реф. 6222).

1. Из двух доказательств того, что вектор $W = U \times V$ не лежит в плоскости векторов U и V, первое — ошибочно

2. Используемая в статье аксиома о непрерывной зависимости компонент векторного произведения от компонент сомножителей является излишней, так как вытекает из других аксиом.

В. К. Иванов

6224. Точка Брокара. Светлаков С. И., Сб. студ. научн. работ Марийск. гос. пед. ин-т, 1957, вып. 1, 118—132

Дано определение нормальных и трилинейных координат точки относительно основного треугольника и определяются нормальные и трилинейные координаты центра окружности, вписанной в треугольник, и центра окружности, описанной около треугольника. Приводится уравнение трилинейной поляры произвольной точки треугольника. Определены нормальные и трилинейные координаты точки Лемуана и дано уравнение ее трилинейной поляры — прямой Лемуана. Вычислены нормальные и трилинейные координаты точек Брокара. Выведено уравнение прямой Брокара. Кроме точек Брокара, рассматриваемых в геометрии треугольника, вводится пара точек, определенным образом соответствующих произвольной точке треугольника и называемые первой и второй точками Брокара относительно выбранной точки. Показано, что первая и вторая точки Енжебека являются соответственно первой и второй точками Брокара относительно центра вписанной окружности. С. И. Зетель

6225. О конических сечениях, вписанных в треугольник. Гурматай (Sur les coniques inscrites à un triangle. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1957, **66**, № 10, 374—378 (франц.)

Рассматривается пара вписанных конических сечений у которых фокусы первой получаются из фокусов второй параллельным переносом данного вектора. Изучение этой пары приводит к некоторым интересным заключениям.

Из резюме автора

6226. Одна теорема о диаметрах параболы и ее применения. Стефанссон (En saetning om parabeldiametre med anvendelser. Stefánsson Sigurkarl), Nord. mat. tidskr., 1956, **4**, № 4, 189—194 (датск.)

Статья предназначена для облегчения изучения свойств параболы. Пользуясь уравнением параболы в прямоугольных координатах, автор доказывает теорему: Если взять произвольно точку O и прямую, проходящую через O и пересекающую параболу в точках A и B, имеем $OA \cdot OB = OP^2 = OP_1^2$, где P и P_1 — точки пересечения секущей с парой диаметров, связанных с точкой O.

Этим термином автор обозначает: а) если O вне параболы, — прямые, параллельные оси параболы и проходящие через точки касания с параболой касательных, проведенных из O; б) если O внутри параболы — диаметры, проходящие через концы хорды, серединой которой служит O.

Доказав эту теорему, автор применяет ее для построения вершины параболы и ее оси по четырем данным элементам параболы (1) по 4 точкам — 2 решения; 2) по 3 точкам и касательной — 4 решения; 3) по 2 точкам и 2 касательным — 4 решения; 4) по точке и 3 касательным — 2 решения; 5) по 4 касательным — одно решение. Автор лишь формулирует конструкции, не давая доказательств и не исследуя условий существования решения. Работа может представлять интерес для составителя задачника по коническим сечениям.

Р. И. Пименов

6227. Об одной теме конкурсного экзамена для учителей. Газапина (Sopra un tema di concorso per i licei. Gasapina Umberto), Period. mat., 1958, **36**, № 3, 199—208 (итал.)

Изложено решение задачи, предложенной на последнем конкурсном экзамене на замещение должностей преподавателей математики в лицеях и учительских институтах. Тема задачи — исследование поверхности тора, образованного вращением окружности $x = (y - a)^2 + z^2 - r^2 = 0$ $(a > r)$ вокруг оси Oz, и ее сечений плоскостями, параллельными этой оси. Тема включает также определение площади и поверхности некоторой части тора.

Ю. М. Гайдук

6228. Один способ приведения общего уравнения конического сечения к каноническому виду. Булатович (Један начин свођења опште једначине коничних пресека на канонични облик. Булатовић Зарија), Весн. Друшт. матем. и физ. Н. Р. Србије, 1956, **8**, № 1-2, 61—64 (сербо-хорв.; рез. англ.)

Доказывается, что общее уравнение конического сечения при $AC - B^2 \neq 0$ можно записать в виде

$$\left(\sqrt{\frac{A}{2} + \lambda}\cdot x + \beta\sqrt{\frac{C}{2} + \mu}\cdot y + p\right)^2 + \varepsilon\left(\sqrt{\varepsilon\left(\frac{A}{2} - \lambda\right)}x - \right.$$

$$\left. - \beta\sqrt{\varepsilon\left(\frac{C}{2} - \mu\right)}y + q\right)^2 + F - p^2 - \varepsilon q^2 = 0,$$

где p и q получены из решения некоторой линейной системы. Отсюда приходим к канонической форме

$$k_1^2\xi^2 + \varepsilon k_2^2\eta_1^2 + f = 0.$$

Р. И. Пименов

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

6229. Одно кинематическое свойство шарнирного четырехугольника. Данкан (A kinematic property of the articulated quadrilateral. Duncan W. J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, № 2, 222—225 (англ.)

Сформулировано и доказано следующее кинематическое свойство плоского шарнирного четырехугольника: когда такой четырехугольник движется в своей собственной плоскости таким образом, что нормали к траекториям двух его противоположных вершин пересекаются на диагонали, соединяющей другую пару вершин четырехугольника, то нормали к траекториям этих последних вершин пересекаются на диагонали, соединяющей первую пару вершин. Это свойство имеет место также для сферического четырехугольника, движущегося по поверхности сферы.

Характеристические свойства плоского и сферического инверсора Поселье являются частными случаями свойства, рассматриваемого в статье.

Ю. М. Гайдук

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6230. Решение двух задач на построение, связанных с коническими сечениями, с помощью теоремы Дезарга. Шмидт (Lösung zweier Kegelschnittkonstruktionen mit Hilfe des Satzes von Desargues. Schmidt W.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **11**, № 4, 178—179 (нем.)

Для конического сечения, заданного тремя точками и центром, рассматривается построение касательных в данных точках. Для параболы, заданной тремя касательными и направлением оси, рассматриваются два способа построения фокуса.

Е. Г. Гонин

6231. Циклографическое отображение в плоскости. Медек (Cyklografické zobrazenie v rovine. Medek Václav), Mat-fyz. časop., 1958, **8**, № 2, 73—80 (словацк.; рез. русск., нем.)

В этой статье автор занимается частным случаем отображения точек проективной плоскости ρ на упорядоченные пары точек прямой линии p. Всякой прямой линии плоскости отвечает потом некоторое проективное соответствие точек прямой линии p. В плоскости существуют линии второго порядка, обладающие тем же свойством. Исследуются пучки прямых линий и этих кривых второго порядка и соответствующие пучки проективных соответствий прямой линии p. Резюме автора

6232. Конфигурации. Тамаева Л. Г., Сб. студ. научн. работ. Марийск. гос. пед. ин-та, 1957, вып. 1, 133—149

Дано определение плоской конфигурации и приведена схема конфигурации. Приведены три условия, необходимые для того, чтобы схема была геометрически реализуемой, эти условия не являются достаточными. Доказана геометрически и аналитически невозможность конфигурации (7_3), далее показана невозможность конфигурации (8_3). Дано аналитическое исследование схемы, приводящее к системе уравнений, решение которой возможно только в комплексной форме, о чем без доказательства указано в книге Д. Гильберт и С. Кен-Фоссен «Наглядная геометрия». В статье показано, что система имеет комплексные решения. Дано исследование конфигурации (9_3), показаны три возможные схемы конфигураций, среди которых важнейшей является конфигурация Брианшона — Паскаля.

С. И. Зетель

6233. Прямая Паскаля и ее обобщения. Фокс (The Pascal line and its generalizations. Fox Charles), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 3, 185—190 (англ.)

Для того чтобы шестиугольник можно было вписать в кривую 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы 3 точки пересечения трех пар противоположных сторон шестиугольника лежали на одной прямой, называемой его прямой Паскаля. Рассматриваются обращение этой теоремы Паскаля и его обобщения на плоские кривые 3-го и 4-го порядков. Обращением теоремы Паскаля служит

Теорема 1. Если задана кривая F_2 второго порядка и прямая $L = 0$ лежит в плоскости этой кривой, то

всегда можно вписать в F_2 шестиугольник так, чтобы прямая Паскаля совпадала с $L=0$. Множество таких вписанных в F_2 шестиугольников бесконечно. Обобщением этого предложения являются

Теорема 2. Если дана плоская кривая F_3 третьего порядка и прямая $L=0$ лежит в плоскости этой кривой, то существует восьмиугольник, стороны которого определяются прямыми $A_m=a_mx+b_my+1=0$ и $B_n=c_nx+d_ny+1=0$ ($m=1,2,3,4$ $n=1,2,3,4$), такой, что 12 точек пересечения (A_m, B_n), $m\neq n$, лежат на F_3, а 4 точки пересечения (A_m, B_m), $m=1,2,3,4$, лежат на прямой $L=0$.

Теорема 3. Если задана плоская кривая F_4 четвертого порядка и прямая $L=0$ лежит в плоскости этой кривой, то существует десятиугольник, стороны которого определяются прямыми $A_m=0$, $m=1,2,3,4,5$, и $B_n=0$, $n=1,2,3,4,5$ такой, что двадцать точек пересечения (A_m, B_n), $m\neq n$, лежат на F_4, а пять точек пересечения (A_m, B_m), $m=1,2,3,4,5$, лежат на прямой $L=0$.

Дальнейшее обобщение теоремы 1 в том же направлении для кривых 5-го и более высокого порядка оказывается невозможным, — в плоскости кривой F_n ($n\geqslant 5$) не существует прямой, которая была бы обобщенной прямой Паскаля для многоугольника, вписанного в F_n. Обобщением теоремы Паскаля для линейчатых поверхностей 2-го порядка (однополостные гиперболоиды и гиперболические параболоиды) служит теорема Сальмона: Три прямые пересечения трех пар противоположных граней шестигранника, вписанного в линейчатую поверхность 2-го порядка, компланарны.

Доказано обращение теоремы Сальмона: Если даны линейчатая поверхность $H=0$ второго порядка и плоскость $P=0$, то можно построить шестигранник, грани которого определяются плоскостями $P_m=a_mx+b_my+c_mz+1=0$, $m=1,2,3$, и $Q_n=d_nx+e_ny+f_nz+1=0$, $n=1,2,3$, такой, что шесть прямых (P_m, Q_n), $m\neq n$, пересечения плоскостей P_m и Q_n являются образующими поверхности $H=0$, а три прямые (P_m, Q_m), $m=1,2,3$, лежат в плоскости $P=0$. Для данных $H=0$ и $P=0$ существует только конечное число вписанных в $H=0$ шестигранников. С. А. Пясецкий

6234. Точечные преобразования между двумя проективными пространствами, имеющие в некоторой паре соответствующих точек неопределенные характеристические направления. Кантони (Le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi in una coppia a direzioni caratteristiche indeterminate. Cantoni Lionello), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 1, 79—83 (итал.; рез. англ.)

Пусть T — точечное преобразование между двумя проективными пространствами S_n, $\bar{S}_n$ и $(O, \bar{O})$ — регулярная пара соответственных точек с неопределенными характеристическими направлениями. Используя понятие соприкасающейся гомографии Ω к T в паре $(O, \bar{O})$, можно ввести в O и $\bar{O}$ некоторые проективные реперы, относительно которых автор и записывает уравнения преобразования. Формулируется целый ряд предложений. Например, если r — некоторая прямая, исходящая из O, то ей в $\bar{O}$ соответствует кривая C, элемент которой E_4 (с перегибом в точке $\bar{O}$), вообще говоря, не является плоским, если же этот элемент плоский, то прямая r оказывается образующей некоторого одномерного (в линейчато-геометрическом смысле конуса Γ Для этого конуса приводятся его уравнения и указывается его порядок.

В гомографии Ω конусу Γ соответствует некоторый конус $\bar{\Gamma}$, на каждой из образующих которого инвариантным способом может быть получена определенная точка B (Bompiani E., Boll. Unione mat. ital. 1926, (1), 5, 118—126). Место таких точек есть алгебраическая кривая γ порядка $(4^n-1)/3$, имеющая в точке O кратность $(3^n-1)/2$. Касательные к γ в $\bar{O}$ суть характеристические прямые, исходящие из $\bar{O}$. Приводятся уравнения для $\bar{\gamma}$.

Пусть T и T' — два точечных преобразования между S_n и $\bar{S}_n$, совпадающие с точностью до окрестности порядка μ ($\mu\geqslant 1$). Тогда между прямыми, исходящими из O, может быть известным способом установлено линеаризованное соответствие (РЖМат, 1956, 7360). Пусть r и r^* — пара соответственных прямых в этом соответствии пусть $\bar{r}^*$ — прямая, соответствующая r^* в какой-нибудь гомографии, касательной к T и T' в (O, O'), а $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}'$ — кривые, соответствующие r в T и T'. Если S — произвольная точка прямой $\bar{r}^*$, то два конуса, проектирующие из нее кривые $\bar{\gamma}$ и $\bar{\gamma}'$, имеют вдоль $S\bar{O}$ аналитическое касание лишь $\mu+1$-го порядка. Если же на прямой $\bar{r}^*$ имеется такая точка, для которой касание повышается до $\mu+2$-го порядка, то соответствующие прямые r оказываются образующими некоторого одномерного (в линейчато-геометрическом смысле) конуса K. Записываются уравнения этого конуса и указывается его порядок. Если T' есть гомография Ω, соприкасающаяся с T, то конус K совпадает с конусом Γ.

Доказательства высказанных в реферируемой статье предложений даны автором в другой его работе с тем же названием (Atti Accad. sci. Bologna, (11)5, 1957—58). Н. И. Кованцов

6235. Точечные преобразования проективных пространств, соприкасающиеся с квадратичными преобразованиями третьего вида. Мастроджакомо (Trasformazioni puntualitra spazi proiettivi osculabili con trasformazioni quadratiche di terza specie particolari. Mastrogiacomo Pasquale), Rend. mat. e applic., 1953, **12**, № 3-4, 285—298 (итал.)

Автор исходит из кремоновской классификации рациональных преобразований пространства (Cremona L., Sulle trasformazioni razionali dello spazio — Opere matematiche di L. Cremona. Pubbl. sotto gli auspici dell'Accad. Naz. dei Lincei T. III, pp. 318—319) и его работа является непосредственным развитием работ Вилла (Villa M., Sull'approssimazione delle trasformazioni puntuali tra due spazi mediante trasformazioni cremoniane. Rend. mat., 1942, Ser. V, **3**, p. 126) и Коссу (Cossu A., Trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi osculabili con trasformazioni quadratiche Mem. Rend. mat., 1951, Ser. V, **10**, fasc. 3—4).

Согласно этой классификации преобразования третьего вида делятся на пять типов. Обозначая через $\varphi_i(x_1, x_2, x_3)$ билинейную, а через $\psi_i(x_1, x_2, x_3)$ трилинейную форму, а через [4] члены выше третьего порядка, автор пишет уравнения общего точечного преобразования T двух проективных пространств S и $\bar{S}$:

$$\bar{x}_i=x_i+\varphi_i(x_1,x_2,x_3)+\psi_i(x_1,x_2,x_3)+[4]. \qquad (1)$$

Члены до второго порядка определяют прямолинейную базу системы ∞^2 кубических конусов с уравнениями:

$$\lambda_1(x_2\varphi_3-x_3\varphi_2)+\lambda_2(x_3\varphi_1-x_1\varphi_3)+\lambda_3(x_1\varphi_2-x_2\varphi_1)=0. \qquad (2)$$

Доказываются 5 теорем:

1) Если конусы системы (2) имеют одну двойную прямолинейную базу, вдоль которой они касаются одной и той же плоскости, и две различные простые прямолинейные базы, то преобразование T соприкасается с ∞^3 квадратичных преобразований третьего вида первого типа.

2) Если конусы системы (2) имеют одну двойную прямолинейную базу, вдоль которой они касаются двух различных плоскостей, а другая прямолинейная база простая, то T соприкасается с ∞^3 преобразований второго типа.

3) Если эти конусы имеют одну двойную прямолинейную базу, одну простую и касаются вдоль другой прямой одной и той же плоскости, то T соприкасается с ∞^3 преобразований третьего типа.

4) Если конусы имеют общую касательную плоскость вдоль двойной прямолинейной базы, а вдоль другой простой базы касаются другой плоскости, то T соприкасается с ∞^3 преобразований четвертого типа.

5) Если, наконец, конусы имеют двойную прямолинейную базу и соприкасаются по образующей, отличной от упомянутой двойной прямой, то T соприкасается с ∞^3 преобразований пятого типа.

Для всех теорем, заявляет автор без доказательств, верны обратные утверждения. Библ. 6 назв. (исключительно итальянских авторов). Р. И. Пименов

6236. Метод параследов в задачах векторной алгебры. Залетин Л. И., Научн. тр. Одесск. ин-та инж. морск. флота, 1958, вып. 17, 133—143

Статья примыкает к предыдущей работе того же автора (РЖМат, 1956, 6074), в которой излагается метод параследов и дается приложение этого метода к решению некоторых задач векторной алгебры и механики. В настоящей статье рассматривается применение метода параследов к решению векторных уравнений и систем уравнений, в которых неизвестный вектор входит под знаком скалярного или векторного произведения

П. Г. Колобов

6237. Теорема Дезарга в муфанговой плоскости. Бурде (Der Satz von Desargues in der Moufang-Ebene. Burde Gerhard), Math. Ann., 1958, **135**, № 4, 352—353 (нем.)

Два пучка параллельных прямых $y=ax+b$ и $y=a'x+b'$ (a, a' фиксированы и $\neq 0$, b и b' — параметры) муфанговой плоскости (проективной плоскости, в которой имеет место малая теорема Дезарга) называются ортогональными, если $aa'=-1$. Пучки прямых, параллельных осям координат, также считаются ортогональными. Доказывается, что из теоремы о „высотном" дезарговом четырехугольнике (образованном вершинами треугольника и точкой пересечения его высот) вытекает справедливость общей теоремы Дезарга. Доказательство основывается на установлении „квадратичной" ассоциативности умножения: $(a^2b)\,c = a^2(bc)$. А. Г. Школьник

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6238. Об одном обобщении метода Е. С. Федорова в начертательной геометрии. Прянишникова З. И., Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 2. М., АН СССР, 1956, 142

6239. Параллельное проектирование прямоугольной пространственной системы координат на плоскость. Таммi (On parallel projection of a rectanqular space coordinate system on to a plane. Tammi Olli. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 254, 24 pp., ill.) (англ.)

На плоскости Π задан трехвекторник $O'X'Y'Z'$ с длинами векторов e_ν и углами φ_ν между ними, причем $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=2\pi$. В работе приводится аналитическое доказательство теоремы Польке (Pohlke) о существовании ортогонального трехвекторника $OXYZ$, составленного из векторов одинаковой длины, параллельная проекция которого на плоскость Π есть $O'X'Y'Z'$.

Автор дает явные формулы, выражающие длину e векторов пространственного трехвекторника $OXYZ$ и углы, определяющие направление проектирования, через величины e_ν φ_ν ($\nu=1,2,3$). Попутно решается задача об экстремуме e при изменении φ_ν и фиксированных e_ν. Экстремум достигается тогда и только тогда, когда существует треугольник со сторонами e_ν^2. Значения φ_ν, дающие экстремум, равны углам между биссектрисами этого треугольника, а e_{max} равно его полупериметру.

В некоторых формулах есть опечатки в индексах и показателях степени. Ю. Д. Бураго

6240. Удвоение куба по Архиту и изучение связанных с вопросом кривых. II. Скоф (Duplicazione del cubo secondo Archita e studio delle curve connesse al problema. Parte II. Skof Fulvia), Period. mat., 1958, **36**, № 2, 76—92 (итал.)

Изучаются кратные точки кривых — проекций на координатные плоскости полярных пересечений поверхностей, о которых шла речь в первой части работы РЖМат, 1959, 3099). Г. И. Дринфельд

6241. Ковариантность плоской аффинной дуги. Николеску (Covariantа arcului afin plan. Nicolescu A.). Lucrările consfăt. geom. diferent. 1955. Timişoara Acad. RPR., 1956, 155—160 (рум.; рез., русск., франц.)

Посредством интегрирования некоторых систем уравнений в частных производных автор доказывает, что проективные преобразования на плоскости — наиболее общие преобразования, которые сохраняют аффинную дугу плоской кривой. J. Elianu

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

6242. О внешних биссектрисах треугольника в геометрии Бойаи—Лобачевского. Патер (Despre bisectoarele exterioare ale unui triunghi în geometria lui Bolyai-Lobacevschi. Pater Z.), Gas. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 3, 143—144 (рум.; рез. русск., франц.)

Доказывается эквивалентность пятому постулату Евклида теоремы о пересечении в одной точке двух внешних биссектрис и биссектрисы третьего угла треугольника. С. И. Зетель

6243. Отображение поверхностей второго порядка на плоскость. Скопец З. А., Матем. просвещение, вып. 3, 1958, 167—171

С невырожденной поверхностью второго порядка F_2, проходящей через кривую второго порядка φ_2 данной плоскости π и имеющей две данные прямолинейные образующие, перпендикулярные к π, связывается отображение, относящее точкам A_1 и A_2 плоскости π точку пересечения A_0 плоскости π с прямой, проходящей через точки A_1' и A_2' — проекции точек A_1 и A_2 на поверхность F_2 прямыми, перпендикулярными к π. Показана независимость отображения от выбора F_2 из однопараметрического семейства поверхностей, определяемых указанными условиями. Даны примеры приложений рассматриваемого отображения.

Если точка A_1 зафиксирована, то отображение T_2 ($A_2 \to A_0$) является квадратичным преобразованием — обобщением преобразования инверсии. Последнее получается, если F_2 представляет параболоид вращения с осью, перпендикулярной к π, пересекающий π; автор не отмечает, что A_1 должна быть центром сечения φ_2.

Е. Г. Гонин

6244. Общее уравнение конических сечений в плоской гиперболической геометрии. II. Фладт (Die allge-

meine Kegelschnittsgleichung in der ebenen hyperbolischen Geometrie. II. Fladt Kuno), J. reine und angew. Math., 1958, **199**, № 3-4, 203—207 (нем.)

Ч. I см. РЖМат, 1958, 3198.

В гиперболической плоскости вводится система x_1, x_2, x_3 однородных точечных и система X_1, X_2, X_3 однородных тангенциальных координат. Рассматриваются уравнения абсолюта плоскости

$$\varkappa (x_1^2 + x_2^2) + x_3^2 = 0, \tag{1}$$

$$X_1^2 + X_2^2 + \varkappa X_3^2 = 0 \tag{1a}$$

и произвольного конического сечения

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + \\ + 2a_{31} x_3 x_1 + 2a_{12} x_1 x_2 = 0, \tag{2}$$

$$A_{11} X_1^2 + A_{22} X_2^2 + A_{33} X_3^2 + 2A_{23} X_2 X_3 + \\ + 2A_{31} X_3 X_1 + 2A_{12} X_1 X_2 = 0, \tag{2a}$$

где A_{ik} есть алгебраическое дополнение элемента a_{ik} определителя $|a_{ik}|$. Задав кривую (1) параметрическими уравнениями:

$$\rho x_1 = 1 - t^2, \ \rho x_2 = 2t, \ \rho x_3 = \sqrt{-\varkappa}\,(1 + t^2) \tag{3}$$

и введя выражения (3) в (2), получим уравнение

$$a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4 = 0, \tag{4}$$

коэффициенты которого выражаются через a_{ik}. Пусть

$$a_0 a_2 - a_1^2 = \alpha, \ a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 = g_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix} = g_3,$$

$$a_0^2 g_2 - 12\alpha^2 = \beta, \ g_2^3 - 27 g_3^2 = \delta.$$

Относительно корней уравнения (4) возможны следующие случаи:

1. Все четыре корня различны: $\delta \neq 0$.

1 а. Четыре вещественных корня: $\delta > 0$ и

$$\alpha < 0, \ \beta < 0. \tag{A}$$

1 б. Четыре мнимых корня: $\delta > 0$, но (A) не выполняются одновременно.

1 в. Два вещественных и два мнимых корня: $\delta < 0$.

2. Два из 4 корней равны между собой: $\delta = 0$.

2 а. Два других корня — вещественные: $\alpha < 0, \ \beta < 0$.

2 б. Два других корня — мнимые: (A) не выполняются одновременно.

3. Второй случай, когда два из 4 корней равны между собой:

$$\beta = 0, \ 2a_1^3 - 3a_0 a_1 a_2 + a_0^2 a_3 = 0.$$

Два различных корня — вещественные (мнимые), если $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$).

4. Три корня из 4 равны между собой: $g_2 = g_3 = 0$.

5. Все четыре корня равны между собой: $\alpha = a_0 a_3 - a_1 a_2 = a_0 a_4 - a_1 a_3 = 0$.

Отсюда определяется характер общих точек кривых (1) и (2).

Аналогично, задав кривую (1а) параметрическими уравнениями:

$$\rho X_1 = \sqrt{-\chi}\,(1 - T^2), \ \rho X_2 = \\ = \sqrt{-\chi}\cdot 2T, \ \rho X_3 = 1 + T^2 \tag{5}$$

и введя выражения (5) в (2 а), определяем характер общих касательных данного конического сечения и абсолюта.

Основываясь на этих соображениях и на результатах 1-й части своей работы (РЖМат, 1958, 3193), автор дает полную классификацию невырождающихся конических сечений гиперболической геометрии.

А. С Смогоржевский

6245. Геометрия m-евклидовых пространств. Чахленкова Т. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1956, № 1, 174—183

Изучаются n-мерные пространства R_n^m с проективной метрикой, которые можно определить как вещественное проективное пространство P_n, в котором задан абсолют, состоящий из мнимого конуса второго порядка

$$\sum_a x^{a^2} = 0 \ (a,b,\ldots = 0,1,\ldots, m)$$

(„абсолютный конус"), роль вершины которого играет $(n - m - 1)$-мерная плоскость $x^a = 0$ („абсолютная плоскость"), и мнимой квадрики

$$\sum_n x^{u^2} = 0 \ (u, v,\ldots = m + 1,\ldots, n)$$

(„абсолютная квадрика") на абсолютной плоскости. Обычное евклидово пространство R_n и пространство, соответствующее пространству R_n по принципу двойственности, — частные случаи пространства R_n^m при $m = 0$ и $m = n - 1$ (ранее под разными названиями изучались пространства R_n^m при $n = 3$, наиболее распространенное название этих пространств — квазиэллиптические пространства).

Определяются преобразования подобия пространств R_n^m — коллинеации, переводящие в себя абсолют — и движения — частный случай преобразований подобия, произведения инволюционных преобразований подобия, переводящих в себя гиперплоскость (отражения от гиперплоскостей). Определяются расстояния между точками, углы между гиперплоскостями и более общие инварианты p-мерных плоскостей; для определения последних доказывается, что две p-мерные плоскости при $p \leqslant n - p - 1$ определяют $p + 1$ прямую, пересекающие обе плоскости; в том случае, когда эти прямые не пересекают абсолютной плоскости или целиком лежат в ней, они определяются как трансверсали данных плоскостей и их поляр относительно абсолюта; в том случае, когда эти прямые пересекаются с абсолютной плоскостью, они определяются вершинами общего автополярного симплекса двух мнимых квадрик на абсолютной плоскости — абсолютной квадрики и квадрики, получаемой проективным отображением квадрик, по которым абсолютный конус пересекается с данными плоскостями. Определяются паратактичные прямые, у которых оба метрических инварианта совпадают; показывается, что все прямые, паратактичные между собой, образуют конгруэнцию прямых, называемую паратактической конгруэнцией.

Аналогично определяются комплексные m-евклидовы пространства $U_n^m(i)$ — комплексное проективное пространство $P_n(i)$, в котором задан абсолют, состоящий из мнимого эрмитова конуса $\sum_a x^a \bar{x}^{\bar{a}} = 0$, роль вершины которого играет плоскость $x^a = 0$, и мнимой эрмитовой квадрики $\sum_u x^u \bar{x}^{\bar{u}} = 0$ в этой плоскости. В этом пространстве получаются результаты, аналогичные результатам геометрии в пространствах R_n^m.

Показывается, что моделью пространства $U_n^m(i)$ может служить паратактическая конгруэнция прямых в пространстве R_{2n+1}^{2m}. Б. А. Розенфельд

6246. Замечание о гильбертовом обосновании гиперболической геометрии плоскости. Сас (A remark on Hilbert's foundation of the hyperbolic plane geometry. Szász Paul), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, 9, № 1-2, 29—31 (англ.)

Предложенная Д. Гильбертом (Основания геометрии, ГТТИ, М.—Л., 1948, 232 — 233) аксиома параллельности геометрии Лобачевского выводится из аксиом:

IV_1. Пусть P, Q — две различные точки плоскости и QY — полупрямая на одной стороне прямой PQ, тогда на той же стороне прямой PQ всегда существует такая полупрямая PX, не пересекающая QY, что каждая полупрямая PZ, лежащая внутри $\angle QPX$, пересекает QY.

IV_2. В плоскости существуют прямая s_0 и не лежащая на ней точка P_0, через которую проходят две различные прямые, не пересекающие s_0. Е. Г. Гонин

6247. Непосредственное введение вейерштрассозых однородных координат в гиперболической плоскости на основе гильбертова исчисления концов. Сас (Unmittelbare Einführung Weierstrassscher homogenen Koordinaten in der hyperbolischen Ebene auf Grund der Hilbertschen Endenrechnung. Szász Paul), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, 9, № 1-2, 1—28 (нем.)

На основе гильбертова исчисления концов прямых гиперболической плоскости вводятся смешанные координаты (t, σ) точки P плоскости; здесь σ — конец прямой $P\Omega$, отличный от Ω (∞ по Гильберту), а t — отрезок оси $O\Omega$ от O до точки P', симметричной P относительно прямой $\frac{\sigma}{2}\Omega$. Вейерштрассовы координаты (x_1, x_2, x_3) точки P, удовлетворяющие условиям $x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1$; $x_3 > 0$, вводятся формулами

$$x_1 = S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t); \quad x_2 = \sigma E(-t); \quad x_3 = C(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 E(-t),$$

где $E(t)$ — положительный конец прямой, перпендикулярной к оси $O\Omega$ и отсекающей на ней отрезок $OA = t$, и

$$C(t) = \frac{1}{2}[E(t) + E(-t)]; \quad S(t) = \frac{1}{2}[E(t) - E(-t)].$$

Вейерштрассовы однородные координаты (u, v, w) прямой с концами ξ и η, отличными от Ω, ориентированной от η к ξ, определяются формулами

$$u = (\xi\eta - 1)/(\xi - \eta); \quad v = (\xi + \eta)/(\xi - \eta); \quad w = (\xi\eta + 1)/(\xi - \eta),$$

а для прямой с концами η и Ω, ориентированной от η к Ω, — формулами

$$u = \eta; \quad v = 1; \quad w = \eta.$$

Координаты прямой связаны соотношением $u^2 + v^2 - w^2 = 1$, уравнение прямой имеет вид $ux_1 + vx_2 - wx_3 = 0$.

На основе заново доказанной в приложении формулы, выражающей конец прямой после движения как дробно-линейную функцию конца до движения, устанавливается, что при любом движении координаты прямой подвергаются линейному преобразованию с детерминантом $D = 1$; координаты точки подвергаются линейному преобразованию с той же матрицей в случае собственного движения и с противоположной матрицей в случае зеркального движения.

Расстояние d между точками P и $\overline{P}$ и расстояние t точки P от прямой выражаются формулами

$$C(d) = x_3\bar{x}_3 - x_2\bar{x}_2 - x_1\bar{x}_1; \quad S(t) = ux_1 + vx_2 - wx_3.$$

Ковариант $u_1u_2 + v_1v_2 - w_1w_2$ двух прямых равен: для пересекающихся прямых $T(a) = S(a)/C(a)$, где a — проекция положительного луча одной прямой на другую; для сверхпараллельных прямых $C(a)$, где a — расстояние между прямыми по общему перпендикуляру; для параллельных прямых ± 1. Е. Г. Гонин

6248. Обобщение теорем Шелла и Мангейма для двух взаимных линейчатых поверхностей в эллиптическом пространстве. Матеев (Обобщение на теоремите на Schell и Mannheim за две взаимни праволинейни повърхнини в елиптичото пространство. Матеев А.), Годишник Софийск. ун-т. Физ.-матем. фак., 1953—1954. Кн. 1. ч. 1. София 1954, 17—21 (болг.; рез. франц.)

Взаимными линейчатыми поверхностями трехмерного эллиптического пространства называются такие линейчатые поверхности, между точками стрикционных линий которых установлено взаимно однозначное соответствие, при котором центральные нормали поверхностей совпадают, а значения параметра распределения в соответственных точках равны. Прямые эллиптического пространства в соответствии с интерпретацией Котельникова — Штуди (автор не упоминает авторов этой интерпретации, но упоминает их последователей Зейлигера и Бляшке) изображаются единичными векторами над двойными числами $a + bw$, $\omega^2 = +1$, что равносильно их изображению точками двойной эллиптической плоскости. При этом взаимные линейчатые поверхности изображаются линиями, являющимися обобщениями кривых Бертрана, и для линейчатых поверхностей доказываются формулы, аналогичные формулам Шелля и Мангейма для кривых Бертрана.

Б. А. Розенфельд

6249. Аналог теоремы П. Серре в эллиптическом пространстве. Матеев (Аналог на една теорема на P. Serret в елиптичното пространство. Матеев А.), Годишник Софийск. ун-т. физ.-матем. фак., 1953—1954. Кн. I, ч. I. София, 1954, 23—25 (болг., рез. франц.)

Доказывается аналог теоремы Серре в эллиптическом пространстве: Необходимое и достаточное условие для того, чтобы равноотстоящие линии на нецилиндрической линейчатой поверхности образовали бы систему линий кривизны, состоит в том, что 1) одна из стрикционных линий поверхности — линия кривизны (тогда и вторая стрикционная линия — также линия кривизны), 2) параметр распределения, отнесенный к первой стрикционной линии — постоянное число, по абсолютной величине отличное от 1. Б. А. Розенфельд

6250. Применение геометрического истолкования спинорных представлений групп движений неевклидовых и евклидовых пространств к линейчатой геометрии. Аббасов Н. Т., Элми әсәрләр. Азәрб. унив., Уч зап. Азерб. ун-та, 1958, № 4, 17—31 (рез. азерб.)

Изучаются свойства прямых линий в неевклидовых и евклидовых пространствах, рассматриваемых как метризованные проективные пространства. При этом терминология, обозначения и отдельные исходные результаты почти полностью заимствуются из монографии Б. А. Розенфельда „Неевклидовы геометрии" (РЖМат, 1956, 8247; ссылки на эту книгу отсутствуют). Обозначая через ω_0 и ω_1 стационарные расстояния между двумя прямыми в неевклидовом пространстве (см. Розенфельд, гл. 2, § 8) и учитывая, что точке абсолюта неевклидова пространства ${}^{n+1}S_{2n+1}$ можно поставить в соответствие альтернион, автор доказывает теорему:

Для того чтобы определить метрические инварианты ω_0 и ω_1 двух прямых пространства ${}^{n+1}S_{2n+1}$, следует найти координаты точек пересечения этих прямых с абсолютом, по координатам найденных точек абсолюта най-

ти альтернионы X и Y, U и V, представляющие эти точки, составить двойное отношение $W(Y, V; X, Y)$ этих альтернионов и преобразованием aWa^{-1} привести его к виду $A+Be_{02n-12n\,2n+1}$. Тогда числа ω_0 и ω_1, определяемые из условия $A+Be_{0\,2n-1\,2n\,2n+1}=\cos^2\frac{\omega_1+\omega_0 e_{0\,2n-1\,2n\,2n+1}}{2}$, будут искомыми инвариантами.

Евклидово пространство получается из неевклидова в результате предельного перехода, при котором альтернионы должны переходить в полуальтернионы (см. Розенфельд, гл. 5, § 9). В связи с этим одновременно формулируется теорема, в которой ${}^{n+1}S_{2n+1}$ заменяется на пространство ${}^{n+1}R^{*}_{2n+1}$, двойственное к евклидову пространству, ${}^{n+1}R_{2n+1}$, вместо альтернионов фигурируют полуальтернионы, а ω_0 приобретает смысл угла между данными прямыми. Рассмотрены свойства (полу) альтернионов X, Y, U, V. Показано, что если прямая 2 стремится к прямой 1, то $P=\lim(\omega_0/\omega_1)$ в случае пространства ${}^{n+1}S_{2n+1}$ стремится к $\lim[(A+\sqrt{A^2+B^2})/B]$, а в случае пространства ${}^{n+1}R^{*}_{2n+1}$ к $\lim(B/2A)$. Отмечается, что в результате перехода к комплексным координатам можно получить аналогичные теоремы для комплексных пространств $S_{2n+1}(i)$ и $R^{*}_{2n+1}(i)$, что в свою очередь дает возможность решать задачу о нахождении инвариантов и общих перпендикуляров двух прямых для пространств ${}^{l}S_{2n+1}$ и ${}^{l}R_{2n+1}$ с произвольным l.

Г. А. Зайцев

6251. Геометрическое истолкование спинорных представлений групп движений неевклидовых пространств. Джавадов М. А., Элми эсэрлэр Азэрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-та, 1957, № 11, 3—18 (рез. азерб.)

Предлагается новый способ геометрического истолкования спинорных представлений групп движений неевклидовых пространств, отличный от способа Э. Картана (Теория спиноров М., 1948): если у Картана координаты спиноров интерпретировались как координаты плоских образующих абсолюта максимальной размерности (мнимых у всех неевклидовых пространств, за исключением n-мерных пространств индекса $\frac{n}{2}$ и $\frac{n-1}{2}$), здесь координаты спиноров интерпретируются как координаты точек абсолюта (вещественных у всех неевклидовых пространств, за исключением пространств индекса 0). Способ автора основан на том, что элементы спинорной группы группы ортогональных матриц, представляющих движения n-мерного неевклидова пространства, представляются элементами алгебры альтернионов (чисел Клиффорда) n-го порядка, которые в свою очередь представляются матрицами второго порядка над альтернионами $(n-1)$-го порядка. Эти матрицы можно рассматривать как матрицы линейных представлений в 2-мерном линейном пространстве над альтернионами $(n-1)$-порядка, векторы которого и играют роль спиноров. Показывается, что координаты этих векторов можно рассматривать как координаты точек абсолюта неевклидова пространства (интерпретация Картана основана на том, что альтернионы n-го порядка представляются матрицами над вещественными, комплексными или двойными числами и спинорами являются векторы соответственного вещественного, комплексного или двойного линейного пространства). Движения неевклидовых пространств с положительными определителями матриц представляются линейными преобразованиями

$$'X^0=AX^0+BX^1,\quad 'X^1=CX^0+DX^1 \qquad (1)$$

над альтернионами $(n-1)$-го порядка, движения с отрицательными определителями матриц, имеющие место в пространствах нечетной размерности, имеют вид:

$$X^0=A\widetilde{X}^0+B\widetilde{X}^1,\ 'X^1=C\widetilde{X}^0+D\widetilde{X}^1, \qquad (2)$$

где $X\to\widetilde{X}$ — инволюционный автоморфизм в алгебре альтернионов четного порядка. Вводя обозначение $X=X^0X'^{-1}$, автор заменяет формулы (1) и (2) формулами

$$'X=(AX+BX)(CX+D)^{-1},\quad 'X=(A\widetilde{X}+B)(\widetilde{C}X+D)^{-1}, \qquad (3)$$

Предлагаемая интерпретация является обобщением на неевклидовы пространства любых размерностей и индексов предложенного Ф. Клейном отображения абсолюта 3-мерного пространства Лобачевского на плоскость комплексного переменного, при котором движения пространства Лобачевского представляются преобразованиями (3) плоскости комплексного переменного, где $X\to\widetilde{X}$ — переход к сопряженному комплексному числу.

Б. А. Розенфельд

6252. Бикватернионы Клиффорда-Котельникова и матрицы Эйлера. Осипов П. Н., Тр. Киевск. технол. ин-та пищ. пром-сти, 1957, вып. 17, 229—250

Изложение теории представления ортогональных матриц над дуальными числами $a+b\omega$, $\omega^2=1$ с помощью дуальных кватернионов („бикватернионов"), аналогичное представлению вещественных ортогональных матриц, впервые предложенного Л. Эйлером. Основные результаты теории были получены в „Винтовом счислении" А. П. Котельникова (Казань, 1895), изложение автора отличается от изложения Котельникова в деталях.

Б. А. Розенфельд

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6253. Вопросы действительности в связи с теорией алгебр. Сегре (Questioni di realtà collegate con la teoria delle algebre; Segre Beniamino), Matematiche, 1954, **9**, № 1, 92—94 (итал.)

Краткое изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1956, 3273; 1957, 2617).

6254. Алгебраическое соответствие. Билек (Algebraicke korespondence. Bílek Jan), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 1, 33—40 (чешск.; рез. русск., англ.)

Автор исследует основные свойства алгебраических соответствий между двумя многообразиями над полем произвольной характеристики, используя метод, подробно изученный Вейлем (Weil A., Foundations of algebraic geometry, 1946) в случае бирациональных соответствий и таким образом получает справедливые утверждения для характеристики p, аналогичные некоторым результатам, данным Ван-дер-Варденом (van der Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie, Berlin, 1939) и Ходж-Пидо (РЖМат, 1956, 5454) для характеристики 0.

E. Čech

6255. Замечания к статье Бризака. Д'Оржеваль (Remarque sur la note de M. Brisac. d'Orgeval Bernard), Publs scient. Univ. Alger, 1955, **A2**, № 1, 13 (франц.)

Указывается на связь геометрии Бризака (РЖМат, 1959, 4188) с плоской кубической кривой, а также на возможные обобщения этой геометрии. Л. А. Скорняков

6256. О бирациональном инварианте пересечения двумерного слоя с поверхностью. Спампинато (Sull' invarianza birazionale dell' intersezione di una falda bidimensionale con una superficie. Spampinato Nicolo), Ricerche mat., 1955, **4**, 126—149 (итал.)

В проективном комплексном пространстве S_3 с фиксированной системой проективных координат $y_1,\ldots,y_4$ рассматривается двумерный „слой" (falda), определяемый параметрическими уравнениями:

$$y_1=2\sigma,\ y_2=2\lambda,\ y_3=\sigma^2+\lambda^2-1,\ y_4=\sigma^2+\lambda^2+1, \qquad (1)$$

и плоскость

$$f(y_i)=ay_1+by_2+c(y_3+y_4)=0, \qquad (2)$$

проходящая через начало $A(0,0,-1,1)$ слоя (1). Подставив в форму $f(y_i)$ выражения (1), получим полином-

$$F(\lambda, \sigma) = 2a\sigma + 2b\lambda + c(2\sigma^2 + 2\lambda^2).$$

Вводится символ μ, обозначающий наименьшую из степеней членов полинома $F(\lambda, \sigma)$. В данном случае $\mu = 1$, если a и b не равны одновременно нулю, и $\mu = 2$, если $a = b = 0$. Бирациональное преобразование

$$y_1 = z_2z_3z_4,\ y_2 = z_1z_3z_4,\ y_3 = z_1z_2z_4,\ y_4 = z_1z_2z_3$$

переводит слой (1) в новый слой, а плоскость (2) — поверхность 3-го порядка. Показано, что μ есть инвариант этого преобразования. Аналогичный факт устанавливается и для некоторых иных слоев.

А. С. Смогоржевский

6257. О неветвящихся накрытиях алгебраических многообразий. Лан, Серр (Sur les revêtements non ramifiés des variétés algébriques. Lang Serge, Serre Jean-Pierre), Amer. J. Math., 1957, **79**, № 2, 319—330 (франц.)

Пусть U, V, W — нормальные алгебраические многообразия над алгебраически замкнутым полем, имеющие равные размерности. Всюду определенное рациональное отображение $f : U \to V$ называется неветвящимся накрытием, если выполнены условия: U полно над каждой точкой из V; если K и L — поля рациональных функций на V и U, то степень n расширения L/K равна числу точек конечного множества $f^{-1}(v)$ ($v \in V$). Число n называется степенью накрытия. Доказывается, что если $f : U \to V \times W$ — неветвящееся накрытие, а многообразие V полно, то существуют такие неветвящиеся накрытия $V^1 \to V$, $W^1 \to W$, что f получается факторизацией накрытия $V^1 \times W^1 \to V \times W$. Отсюда выводится, что всякое неветвящееся накрытие абелевого многообразия есть изогения. Другой результат работы состоит в том, что нормальное полное многообразие обладает лишь конечным числом неветвящихся накрытий заданной степени.

А. Л. Онищик

6258. Циклы и кратные интегралы на абелевых многообразиях. Морикава (Cycles and multiple integrals on Abelian varieties. Morikawa Hisasi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 6, 317—320 (англ.)

Некоторые выкладки с периодическими матрицами приводят к некоторым соотношениям между циклами и кратными интегралами, которые сходны с хорошо известными соотношениями между дивизорами и простыми интегралами на абелевых многообразиях. M. Rosenlicht

Перевод из Math. Revs 1956, **17**, № 5, 533

6259. О классификации пространственных бирациональных инволюторных преобразований. Турри (Sulla classificazione delle trasformazioni birazionali involutorie dello spazio. Turri Tullio), Rend. Seminar. Fac. sci. Univ. Cagliari 1956, **26**, № 3—4, 129—141 (итал.)

Основываясь на своих исследованиях (РЖМат, 1957 8175, 8176, 8178, 8179; 1959, 3122, 5133, 5135), автор дает классификацию бирациональных инволюторных преобразований трехмерного пространства. Они разделяются на три класса: 1) имеющие поверхность слитых точек; 2) не имеющие таковой, но представимые в виде произведения двух преобразований 1-го класса; 3) не имеющие таковой и не представимые в виде произведения двух преобразований 1-го класса. Первые приводятся к двум типам: а) имеющие полную линейную систему размерности не ниже 3 инвариантных рациональных поверхностей (преобразования де-Жонкьера) и б) имеющие полную линейную систему размерности 3 инвариантных регулярных не рациональных поверхностей порядка 4 (этот тип описывается подробно). Разыскание преобразований второго класса приводится к определению коммутирующих преобразований 1-го класса; что касается до преобразований 3-го класса, то приводится пример такого преобразования (построение посредством поляритета относительно сети квадрик), неизвестно, имеются ли иные преобразования этого класса. В. В. Морозов

6260. Обобщенные якобиевы многообразия и сепарабельные абелевы расширения функционального поля. Морикава (Generalized jacobian varieties and separable abelian extensions of function fields. Morikawa Hisasi), Nagoya Math. J., 1957, **12**, 231—254 (англ.)

Рассматривая сепарабельные абелевы расширения L/K поля K/k функций одной переменной над произвольным совершенным полем k, автор получает для них результаты, аналогичные результатам Ланга, относящимся к неразветвленным расширениям (РЖМат, 1958, 3212). Показывается, что всякое такое сепарабельное расширение (регулярное над k) индуцируется обращением сепарабельного гомоморфизма коммутативного многообразия-группы в обобщенное якобиево многообразие, ассоциированное подходящему локальному кольцу. Словами „индуцируется обращением" референт передает термин „comes from a pull back".

На основе „теории обращения" (pull back theory) развивается теория полей классов поля функций одной переменной над совершенным полем; подробно рассматривается случай конечного основного поля.

Полное определение индуцирования обращением таково. Пусть G — группа Галуа для L/K, M_i — набор мест для K/k, содержащий все места, разветвляющиеся в L/k; $\overline{M}_i$ — максимальный идеал кольца валюаций M_i в K/k. Обозначим через u локальное кольцо $k + \bigcap \overline{M}_i^{\nu_i}$ ($\nu_i \geqslant 1$) и пусть C_u — проективная модель K/k, содержащая такую точку M, что u — ее локальное кольцо, а $C_u^* = C_u - M$ всюду регулярно. По способу Чжоу над k строится обобщенное якобиево многообразие I_u, ассоциированное отношению u-эквивалентности на C_u^* и каноническое отображение $\varphi : C_u^* \to I_u$. Пусть, наконец, A — коммутативное многообразие-группа и $\lambda : A \to I_u$ — сепарабельный гомоморфизм. Говорят, что L/k индуцируется обращением сепарабельного гомоморфизма λ коммутативного многообразия-группы A в обобщенное якобиево многообразие I_u поля K/k, если $\lambda^{-1}(0) = G$ и если существует модель L/k, бирационально эквивалентная $\lambda^{-1}(\varphi(C_u^*))$.

В. В. Морозов

6261 К. Схемы и модели сингулярности плоских алгебраических кривых. Кизини (Schemi e modelli per le singolarità delle curve algebriche piane. Chisini Oscar. Bologna, N. Zanichelli, 1957, 27 p., 750 L.), Bibliogr. ital., 1957, **91**, № 679, 670 (итал.)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

6262. Сравнение длин нормального сечения и геодезической линии. Ганьшин В. Н., Изв. высш. учебн. заведений. Геод. и аэрофотосъемка, 1958, № 2, 33—41

Дается приближенное значение разности длин нормального сечения и геодезической линии эллипсоида, соединяющих 2 данные точки эллипсоида, более точное, чем аналогичные выражения в курсах высшей геодезии Ф. А. Слудского и Ф. Н. Красовского.

Б. А. Розенфельд

6263. Характеризующее условие класса поверхностей постоянной средней кривизны и один результат, относящийся к этим поверхностям. Эзкан (Une condi-

tion caractéristique pour la classe des surfaces à courbure moyenne constante et un resultat pour ces surfaces. Özkan Asim), Arch. Math., 1955, № 2, 136—138 (франц.)

Поверхности постоянной средней кривизны и налагающиеся на них подчиняются характеризующему условию функция $\sqrt{H^2-K}$, где K — гауссова кривизна, а $H = \frac{1}{2}(\bar{r}+r)$, $\bar{r}$, r — главные кривизны, осуществляет конформное отображение $ds_1^2 = \sqrt{H^2-K}\,ds$ поверхности $H = \text{const}$ на поверхность, у которой гауссова кривизна $K_1 = 0$; кроме того, поверхности $H = \text{const}$ являются частным случаем поверхностей Вейнгартена.

У поверхности W, отнесенной к линиям кривизны

$$ds^2 = \frac{du^2}{\beta^2} + \frac{dv^2}{\varphi'^2(\beta)}, \qquad \beta = \beta(u, v), \tag{1}$$

$$\bar{r} = \varphi(\beta), \quad r = \varphi(\beta) - \beta\varphi'(\beta).$$

(Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, I, prt. II p. 434).

Автор стремится подобрать φ и β и выделить из класса поверхностей W поверхности $H = \text{const}$.

Формулы (1), уравнение Гаусса и требование $K_1 = 0$ позволяют вывести

$$\varphi = \frac{\beta^2}{2} + H$$

и дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять β:

$$(\log\beta)_{uu} + (\log\beta)_{vv} = \frac{4H^2 - \beta^2}{4\beta^2}.$$

Автор дополняет теорему Бонне — всякая поверхность $H = \text{const}$ наложима на бесконечное множество поверхностей постоянной средней кривизны — доказав, что две поверхности $H = \text{const}$ и $H_1 = \text{const}$ наложимы друг на друга только, если $H = H_1$. К. Н. Тихоцкий

6264. Сети с равным и постоянным геодезическим кручением. Русчор (Rețele cu torsiuni geodezice egale și constante. Ruscior Ștefania), Bul. Inst. politehn. Jași, 1956, 2, № 1-2, 1—7 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор выясняет некоторые свойства сетей с равными геодезическими кручениями или с геодезическими кручениями, равными и постоянными на поверхности в трехмерном пространстве. Используя некоторые результаты Майера (O. Mayer), Крянгэ (S. Creanga) и Георгиева (Gh. Gheorghiev), он исследует случаи поверхностей постоянной средней кривизны и сети Дини (Dini), Чебышева, а также сети $M - M$ Миллера (A. Myller).

J. Elianu

6265. О некоторых конгруэнциях прямых. II. Бика (Asupra unor congruențe de drepte (II). Bica Maria), Bul. științ. și tehn. Inst. politehn. Timișoara, 1956, 1, № 1, 31—40 (рум.; рез. франц., русск.)

Продолжение статьи с тем же названием (РЖМат, 1958, 2371). Пусть x и x' — соответствующие точки двух поверхностей, у которых точка x' лежит на квадрике Дарбу индекса c поверхности (x), а точка x — на квадрике Дарбу того же индекса поверхности (x'). При этом предполагается, что асимптотические линии этих поверхностей соответствуют друг другу. Автор рассматривает, в частности, случай, когда разноименные асимптотические касательные к этим поверхностям пересекаются. В этом случае изучаются свойства конгруэнции (yy'), образованной линиями пересечения касательных плоскостей к поверхностям (x) и (x'). Автор находит фокусы и развертывающиеся поверхности этой конгруэнции. Находится условие того, что конгруэнция (yy') является конгруэнцией W. Это условие оказывается, в частности, удовлетворенным, если поверхности (x) и (x') проективно наложимы друг на друга. В этом последнем случае фокальные поверхности конгруэнции (yy') становятся поверхностями R.

Находятся и сравниваются между собой дифференциальные инварианты фокальных сетей на фокальных поверхностях конгруэнций (yy') и (xx'). Н. И. Кованцов

6266. Относительно некоторого соответствия между конгруэнциями прямых. Крянгэ (Asupra unei corespondențe între congruențe de drepte. Creangă I.), Studii și cercetări științ. Acad. RPR, Fil. Iași, 1955, Ser. 1, 6, № 1-2, 135—142 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор распространяет преобразование параллельными касательными плоскостями, изученное Петерсоном и Миллером (A. Myller), рассматривая в трехмерном пространстве следующее соответствие:

Пусть k_1, k_2 — двеконгруэнции прямых такие, что две соответствующие образующие g_1 и g_2 пересекаются в точке M поверхности Σ, Γ — кривая, которая расположена на поверхности Σ и проходит через точку M; R_1 и R_2 — линейчатые поверхности конгруэнций k_1 и k_2, эти поверхности проходят через линию Γ. Точке M_1, лежащей на образующей g_1 поверхности R_1, сопоставляем точку M_2, лежащую на образующей g_2 поверхности R_2, такую, что касательные плоскости к поверхности R_1 в точке M_1, к поверхности R_2 в точке M_2 и к поверхности Σ в точке M — проходят через прямую δ. Используя векторный метод, автор доказывает, что соответствие между M_1 и M_2 есть гомология и, когда направление касательной в точке M к кривой Γ меняется, центр этой гомологии описывает коническое сечение.

В конце сделаны также и другие замечания.

J. Elianu.

6267. О винтовых линиях линейного комплекса. Тибо (Sur les hélices d'un complexe linéaire. Thybaut A.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 11, 884—897 (франц.)

Автор изучает винтовые линии, касательные которых принадлежат линейному комплексу, называя их коротко винтовыми линиями комплекса. Он не различает линий, полученных из одной линии винтовым движением около центральной оси комплекса.

Отнесем линейный комплекс к прямоугольным осям, направив ось Oz по центральной оси комплекса. Координаты x, y, z точки на кривой (Γ) комплекса удовлетворяют уравнению

$$x\,dy - y\,dx = k\,dz, \tag{1}$$

где $k > 0$ — параметр комплекса.

Возьмем проекцию (γ) кривой (Γ) на плоскость xOy и, вводя время t, напишем

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = k^2, \quad \frac{dz}{dt} = k.$$

Отсюда следует, что всякую кривую (Γ) комплекса можно получить, складывая движение точки по проекции (γ), у которого ускорение постоянно направлено к центру O, а удвоенная секторная скорость равна k^2, и равномерный перенос вдоль Oz.

Построим направляющий конус касательных к (Γ), проводя через O параллели касательным к (Γ), и пусть его уравнение $\varphi(x, y, z) = 0$. Тогда годограф скорости результирующего движения точки M по (Γ) определяется уравнениями $\varphi(x, y, k) = 0$, $z = k$. Та же линия, смещенная в плоскость xOy, служит годографом скорости точки m, проекции M на xOy, в ее движении по (γ).

Взяв поляру годографа скорости m относительно окружности с центром в O и радиуса k, посредством по-

ворота на угол $(-\frac{\pi}{2})$, приходим к траектории (γ) и далее, подсчитывая z квадратурой из соотношения (1), достигаем кривой (Г). Таким образом всякая линия линейного комплекса определяется заданием направляющего конуса ее касательных.

В частном случае направляющему конусу вращения во взятом комплексе соответствует винтовая линия. Автор располагает ось конуса $O\delta$ в плоскости yOz под углом Θ $(0 \leqslant \Theta \leqslant \leqslant \frac{\pi}{2})$ к оси Oz в квадранте yOz, задается угол $\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ наклона образующих конуса к $O\delta$. Оказывается, что траектория (γ)—всегда некоторое коническое сечение, у которого две действительные вершины лежат на оси Ox. Через данные Θ и φ параметры (γ) выражаются

$$e=\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi},\ p=k\operatorname{ctg}\varphi,\ x_1=k\operatorname{ctg}(\Theta+\varphi),\ x_2=k\operatorname{ctg}(\Theta-\varphi).$$

Кривая (γ) при $\Theta<\varphi$ — эллипс, при $\Theta=\varphi$ — парабола, при $\Theta>\varphi$ — гипербола.

Всякая винтовая линия (Г) расположена на некотором цилиндре 2-го порядка, прямым сечением которого является (γ). В данном линейном комплексе K существует единственная винтовая линия, лежащая на данном цилиндре 2-го порядка, если только $k^2 \geqslant (e^2-1)p^2$.

Главные нормали MN в точках M винтовой линии линейного комплекса K принадлежат K и параллельны плоскости P_0, проходящей через K перпендикулярно к $O\delta$. Проведем через MN плоскость P параллельно P_0. Полюс плоскости P относительно K лежит на MN.

Если полюс (пусть это будет N) находится на конечном расстоянии, то при движении M по винтовой линии, которую автор относит к классу (H), полюс N описывает диаметр (D) комплекса. Главные нормали линии (H) порождают коноид с направляющей плоскостью P_0 и ребром (D). Автор доказывает, что винтовая линия принадлежит K, если ее главные нормали определяют коноид. Если $\Theta=0$, то коноид прямой, а (H) намотана на круговом цилиндре.

Когда (D) удаляется в бесконечность, винтовая линия принадлежит к классу (H') и $O\delta$ образует с центральной осью комплекса угол $\Theta=\frac{\pi}{2}$.

Данный линейный комплекс K содержит семейство (H'), зависящее от параметра φ. Проекция (H') на xOy— — гипербола, на yOz — цепная линия. Отсюда: линии (H') представляют собой пространственные развертки трактрис.

Автор останавливается на разнообразных свойствах винтовых линий (H). Мы отметим еще только одно: $\Theta=\varphi$ соответствуют в K кубические винтовые (H). Это единственный случай алгебраических винтовых линий, принадлежащих K. К. Н. Тихоцкий

6268. Биаксиальное пространство параболического типа. Талантова Н. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1957, 117, № 9, 30—34

Рассматривается предельный случай биаксиального пространства, т. е. 3-мерного проективного пространства, в котором в качестве абсолюта задана пара вещественных или мнимосопряженных скрещивающихся прямых, при совпадении этих прямых (поэтому пространство в этом случае, собственно говоря, уже не является биаксиальным, т. е. пространством с двумя осями). Абсолют пространства в этом случае состоит из одной прямой, а фундаментальной группой является группа коллинеаций, переводящих в себя параболическую линейную конгруэнцию прямых, осью которой служит эта прямая. Автор называет фундаментальную группу 8-членной группой движений и выделяет в ней 7-членную подгруппу, которая в дальнейшем и рассматривается как группа движений (по существу 8-членная группа является аналогом не группы движений евклидова пространства, а группы подобий этого пространства). На прямых параболической линейной конгруэнции вводится евклидова метрика. Так как каждая плоскость пространства содержит одну прямую этой конгруэнции, на плоскостях пространства вводится вырожденная проективная метрика, в которой прямая конгруэнции играет роль бесконечно удаленной прямой. В пространстве рассматриваются некоторые поверхности второго порядка, в частности „орисфероид" — поверхность, образованная прямыми параболической конгруэнции, пересекающими прямую общего положения, и линейные комплексы прямых. Показывается, что если отобразить точки рассматриваемого пространства на точки аффинной плоскости над дуальными числами $a+b\omega$, $\omega^2=0$, ставя в соответствие точке (x^1, x^2, x^3, x^4) пространства точку $(x^1+\omega x^3, x^2+\omega x^4)$ плоскости, преобразования 7-членной группы движений изображаются центроаффинными преобразованиями дуальной плоскости, и рассматривается изображение различных геометрических образов пространства на дуальной плоскости.

Б. А. Розенфельд

ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

6269. Заметка о гомотопии кривых в касательных пучках. Оцуки (Note on homotopies of some curves in tangent bundles. Otsuki Tominosuke), Math. J. Okayama Univ., 1957, 7, № 2, 191—194 (англ.)

Доказано, что ограниченная однородная группа голономии $H^0(y)$ регулярной связности пространства касательных направлений дифференциального многообразия $\mathfrak{X}$ в точке $y\in T_0(\mathfrak{X})$, определенная ранее с помощью α-кривых, α-гомотопичных нулю, определяется α-кривыми, гомотопичными нулю, за счет теоремы: Если две кривые $\overline{C}_0$ и $\overline{C}_1$ гомотопичны одна другой, то они также α-гомотопичны одна другой, когда число измерений $\mathfrak{X} \geqslant 3$.

В. И. Шуликовский

6270. Гиперповерхность в пространстве проективной связности. Лаптев Г. Ф., Докл. АН СССР, 1958, 121, № 1, 41—44

При помощи развитого им теоретико-группового метода, автором ранее (РЖМат, 1953, 433) было дано инвариантное построение геометрии гиперповерхности проективного пространства, а также обобщение ее для гиперповерхности пространства проективной связности без кручения. В настоящей работе автору удалось тем же методом построить столь же далеко идущую геометрию гиперповерхности пространства проективной связности с кривизной и кручением. Построение ведется в репере первого порядка (n вершин лежат в касательной плоскости), и в остальном носит вполне инвариантный характер. В частности, оно полностью применимо к гиперповерхности в пространстве метрической или аффинной связности. Строится последовательность полей фундаментальных объектов различных порядков (каждый из них характеризует дифференциальную окрестность соответствующего порядка точки гиперповерхности). Поле фундаментального объекта пятого порядка определяет гиперповерхность с точностью до констант. Найдены выражения через фундаментальные объекты объектов (и их семейств), обобщающих все известные объекты поверхности трехмерного проективного пространства (тензор Дарбу, канонический пучок

квадрики Дарбу, линейный элемент Фубини, его же квадратичные формы, инвариантные связности и др.). Найдено значительное число новых объектов.

А. М. Васильев

6271. О некоторых типах однородных римановых пространств. Гу Чао-хао, Докл. АН СССР, 1958, 122, № 2, 171—174

Если группа H_1 неприводима, но допускает перестановочные с собой вращения, то последние образуют либо однопараметрическую, либо трехпараметрическую группу.

В первом случае метрика приводится к виду

$$ds^2 = ds_0^2(x^a) + e^{-2f(x^a)}[dx^1 + \omega(x^a, dx^a) +$$

$$+ \frac{1}{2} C \sum_{\alpha} (x^\alpha dx^{\alpha+s} - x^{\alpha+s} dx^\alpha)]^2 + e^{-f(x^a)} ds^2_{1,(x^{i_1})}$$

$$(a = 2,\ldots,q;\ s = \frac{n-q}{2};\ \alpha = q+1,\ldots,q+s.$$

$$i_1 = q+1,\ldots,n).$$

Здесь $ds_0^2 = \sum (\omega^a)^2$ — $(q-1)$-мерная метрика, допускающая просто транзитивную группу движений $G^{(1)}$. $dx^1 + \omega(x^a, dx^a)$, ω^a—инвариантные формы группы G_q, состоящей из $G^{(1)}$ и одномерного центра, ds_1^2 — $(n-q)$-мерная метрика с транзитивной группой движений, оставляющей инвариантной внешнюю форму $\sum [dx^\alpha dx^{\alpha+s}]$. Если $f(x^a) \neq 0$, метрика ds_1^2 — евклидова.

Во втором случае метрика приводится к виду

$$ds^2 = ds_0^2(x^a) + g_{pt}\omega^p\omega^t + e^{-f(x^a)} ds_1^2(x^{i_1})$$

$$(p, t, n = 1, 2, 3;\ a = 4, 5,\ldots,q;\ i_1 = q+1,\ldots,n)$$

$ds_0^2 = \sum (\omega^\alpha)^2$ — $(q-3)$-мерная метрика, допускающая просто транзитивную группу $G^{(1)}$, $\omega^p = \varphi_t^p(x^a)[\omega^t(x^u, dx^u) +$ $+ \pi^t(x^a, dx^a) + \sigma^t(x^{i_1}, dx^{i_1})]$, g_{pt} — постоянные, формы $\varphi_t^p(\bar{\omega}^t + \pi^t)$, ω^a являются инвариантными формами группы G_q, ds_1^2 — $(n-q)$-мерная метрика, допускающая группу движений с группой изотропии H_1, которая оставляет инвариантными внешние формы $D\sigma^t$. Если $f(x^a) \neq 0$, ds_1^2 — евклидова.

А. М. Васильев

6272. Парагеодезические пространства и парагеодезические линии подпространства риманова пространства. Прванович (Парагеодезиски простори и парагеодезиске криве потпростора Риманова простора. Прванович Милева), Зб. радова Српска АН, 1956, 50, 117—178 (сербо-хорв.; рез. франц.)

Подпространство V_n подпространства V_m риманова пространства V_l $(n < m < l)$ называется парагеодезическим подпространством подпространства V_m пространства V_L по отношению к конгруэнции кривых, если вектор относительной нормальной кривизны в направлении произвольного вектора коллинеарен с касательным вектором к кривой данной конгруэнции, проходящей через данную точку. Парагеодезическое подпространство является обобщением вполне геодезического подпространства, соответствующего тому случаю, когда конгруэнция состоит из кривых ортогональных подпространству V_m. Специально рассматриваются случаи $n = m - 1$ (парагеодезическая гиперповерхность) и $n = 1$ (парагеодезическая линия).

Б. А. Розенфельд

6273. Относительная риманова геометрия. 1. Аффинная связность. Мацумото (Relative Riemannian geometry. 1. On the affine connection. Matsumoto Makoto), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1958, **A 31**, № 1, 65—82 (англ.)

Для точек $P(x)$ и $Q(y)$ двух n-мерных многообразий M и N вводится, как и в другой работе автора (РЖМат, 1958, 10265), функция расстояния $d(x, y)$ и фундаментальный тензор $g_{i(j)} = \dfrac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^i \partial y^{(j)}}$, $g = -\dfrac{1}{2}(d(x\,y))^2$.

Тензор $T^i_{j\ldots}{}^{k'}_{l'\ldots}(x, y)$ определяется законом преобразования:

$$T^a_{b\ldots}{}^{c'}_{d'\ldots}(\bar{x}\,\bar{y}) = T^i_{j\ldots}{}^{k'}_{l'\ldots} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} \cdots \frac{\partial \bar{y}^{c'}}{\partial y^{k'}} \frac{\partial y^{l'}}{\partial \bar{y}^{d'}} \cdots,$$

где $\bar{x} = \bar{x}(x)$, $\bar{y} = \bar{y}(y)$.

Объект связности

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{jk}(x, y)\,dx^k + C^i_{jk'}(x, y)\,dy'^{\kappa'}$$

определяет аффинную связность в точках пространства M относительно точек пространства N, в которой $dP(x) = dx^i e_i$, $de_i = \omega^j_i e_j$ (e_k — локальный репер). Связующий объект $g^{j'}_i$ устанавливает отображение векторов (и тензоров) касательных пространств точек $P(x)$ и $Q(y)$: $V^{j'} = g^{j'}_i V^i$. Строится теория ковариантного дифференцирования тензоров кривизны и кручения, путей, по аналогии с обычной аффинной связностью. Рассмотрены специальные классы связностей.

В. И. Шуликовский

6274. О преобразованиях, сохраняющих каноническую форму Лагерра—Форсайта. Хоман (On transformations preserving Laguerre—Forsyth canonical form. Homann Frederick A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 3, 408—411 (англ.)

Рассмотрено линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} + C_{n,1}\,p_1(s)\,y^{(n-1)} + C_{n,2}\,p_2(s)\,y^{(n-2)} + \ldots +$$

$$+ C_{n,n}\,p_n(s)\,y = 0, \qquad (1)$$

где $p_i(s)$ — регулярные функции от s, $C_{n,i}$ — биномиальные коэффициенты. n линейно независимых решений уравнения (1) интерпретируются как однородные координаты $y_i(s)$ текущей точки $y(s)$ кривой C, погруженной в $(n-1)$-мерное проективное пространство S_{n-1}. Кривая C определяется однозначно с точностью до проективных преобразований. Для исследования проективных свойств уравнения (1) Лейн и Вильчинский приводили его подходящим преобразованием y и s к канонической форме Лагерра — Форсайта

$$x^{(n)} + C_{n,3}\,p_3(t)\,x^{(n-3)} + C_{n,4}\,p_4(t)\,x^{(n-4)} + \ldots +$$

$$+ C_{n,n}\,p_n(t)\,x = 0. \qquad (2)$$

Это преобразование хотя и не является однозначным, но сохраняет проективные свойства кривой C. В частности, инвариантными остаются линейные соприкасающиеся пространства $S_k(s)$ $(0 < k < n-1)$, базис которых состоит из точек y, $\dfrac{dy}{ds}, \ldots, \dfrac{d^k y}{ds^k}$.

При преобразованиях

$$\bar{t} = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}; \quad \bar{x} = \lambda \frac{d^{\frac{(n-1)}{2}} \bar{t}}{dt^{\frac{n-1}{2}}} x; \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0, \qquad (3)$$

сохраняющих каноническую форму (2), точки $x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^k x}{dt^k}$ не инвариантны. Автор изучает геометрическое место C_k точек $\frac{d^k \bar{x}}{d\bar{t}^k}$ при фиксированном t. Для $\gamma \neq 0$ получено множество поверхностей, дающих в пересечении C_k. При $\gamma = 0$ показано, что производные точки $d^k\bar{x}/d\bar{t}^k$ остаются инвариантными. Доказано, что геометрическое место точек ${}^*C_k$, описанное точками пересечения $S_{n-1-k}(t+\varepsilon)$ и $S_k(t)$, в пределе при $\varepsilon \to 0$ совпадает с C_k. В. С. Малаховский

6275. О формах Дарбу в дифференцируемом многообразии. Канитани (Sur la forme de Darboux relative à une variété différentiable. Kanitani Joyo), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1957, **A30**, № 3, 203—216 (франц.)

Автор приводит один из путей обобщения форм Дарбу гиперповерхности в $(n+1)$-мерном проективном пространстве на пространство проективной связности. Асимптотическая форма $a_{ij}\,du^i\,du^j$ и форма Дарбу $b_{ijk}\,du^i\,du^j\,du^k$ ($i, j, k = 1, 2, \ldots, n$) определяются в пространстве проективной связности с n-мерным базисным многообразием $M(u^i)$ и $(n+1)$-мерными локальными проективными пространствами. Другой путь обобщения форм Дарбу дан в работах Г. Ф. Лаптева, в которых формы Дарбу определяются на гиперповерхности в $(n+1)$-мерном пространстве проективной связности (см., например, реф. 6270). Л. Е. Евтушик

6276. О линейных многообразиях геодезических полей напрявлений в пространстве аффинной связности. Шапиро Я. Л., Матем. сб., 1958, **45**, № 4, 511—528

Пространство аффинной симметричной связности, содержащее m геодезических полей направлений, определяемых векторными полями $\overset{a}{A}{}^\alpha$, расслаивается на ∞^n вполне геодезических подпространств m измерений, каждое из которых отображается (в малом) на m-мерное евклидово пространство так, что геодезические переходят в прямые. Если $\overset{a}{A}{}^\alpha$ — m линейно независимых векторов, определяющих m геодезических полей направлений, и если возможно такое нормирование (путем умножения $\overset{a}{A}{}^\alpha$ на некоторые скаляры), что для любых значений λ_α векторное поле

$$\lambda_1 \overset{1}{A}{}^\alpha + \lambda_2 \overset{2}{A}{}^\alpha + \ldots + \lambda_m \overset{m}{A}{}^\alpha$$

определяет некоторое геодезическое поле направлений, то множество геодезических полей направлений, определяемое векторами

$$\sum_b \lambda_b \overset{b}{A}{}^\alpha \quad (b = 1, 2, \ldots, m),$$

называется линейным многообразием геодезических полей $m-1$ измерений.

В пространстве аффинной связности такое нормирование векторов, определяющих несколько геодезических полей направлений, вообще невозможно. В римановом пространстве такое нормирование всегда возможно. В римановом пространстве любые m геодезических полей направлений принадлежат $m-1$-мерному линейному многообразию геодезических полей направлений.

Рассматривается линейное многообразие геодезических полей направлений в пространстве Лобачевского.

Н. М. Писарева

6277. О связностях в пространствах высших порядков. II. Идэ (On the connections in higher order spaces. II. Ide Saburo), Tensor, 1955, **4**, № 3, 135—140 (англ.)

Пользуясь теми же обозначениями и методом, что и в предшествующей работе (РЖМат, 1957, 855), автор дает видоизмененное определение связности в пространстве $K_1^{(M)}$ линейных элементов порядка M, а затем проводит сравнение введенной им связности со связностью Кавагути в пространстве K_n^m с метрикой

$$s = \int F(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(m)})\,dt, \quad 2m - 1 = M.$$

В. В. Рыжков

6278. Финслеровы пространства постоянной кривизны и вполне экстремальные гиперповерхности. Ван Юньда (Finsler spaces of constant curvature and totally extremal hypersurfaces. Wang Yuen-da), Sci. Rec., 1958, **2**, № 7, 211—214 (англ.)

Финслерово пространство F_n является пространством постоянной кривизны в смысле Бервальда, если тензор кривизны R_{piqj} имеет вид

$$R_{oioj} = R(g_{ij} - l_i l_j),$$

где

$$R = \text{const}, \quad l_i = g_{ik}\,l^k, \quad l^k = \frac{\dot{x}^k}{F}, \quad R_{piqj}\,l^p\,l^q = R_{oioj},$$

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial \dot{x}^i\,\partial \dot{x}^j}$$

(F — основная метрическая функция F_n).

В работе автор доказал, что

1. Если финслерово пространство F_n допускает два ортогональных семейства вполне экстремальных гиперповерхностей постоянной кривизны (R_1 и R_2 соответственно), то эти кривизны равны между собой и само пространство F_n является некоторым финслеровым пространством той же самой постоянной кривизны, т. е. $R_1 = R_2 = R$.

2. Для того чтобы финслерово пространство, допускающее одно семейство вполне экстремальных гиперповерхностей постоянной кривизны, было бы пространством постоянной кривизны, необходимо и достаточно, чтобы кривизна пространства и кривизны гиперповерхностей были одинаковыми. В. И. Близникас

6279 К. О полной системе дифференциальных инвариантов в регулярном пространстве Картана. Рапчак (A differenciálinvariánsok teljes rendszere a reguláris Cartan-terben. Rapcsák András. Kand. értekezés térisei), Budapest, Tud. Minösitö Bizottság, 1955, 51.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 4, 119 (венг.)

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6280. Пересмотр оснований теории относительности. Паласьос (Revisión de los fundamentos de la teoría de la relatividad. Palacios Júlio), Rev. Real acad. cienc. exact., fis. y natur. Madrid, 1956, **50**, № 3, 441—443 (исп.)

Автор задается вопросом об эффекте замедления часов в частной теории относительности. Подход автора скорее популярно философский, нежели математический. Беря двух наблюдателей, он требует, чтобы второй всегда мог в своем начале координат синхронизировать часы с первым наблюдателем. Это требование он выражает так:

$$t' = t \text{ при } x' = y' = z' = 0.$$

Затем выписывается преобразование, сохраняющее основной конус, которое удовлетворяет данному условию. Получаются преобразования, отличающиеся от эйнштейновых наличием множителя $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ в правой части, что дает автору возможность заявить, что им устранен эффект замедления часов. При этом автор считает, что из его уравнений вытекают те же механические следствия, что у Эйнштейна. Р. И. Пименов

6281. **Нелинейная теория векторных полей. Урбах В. Ю.**, Ж. эксперим. и теор. физ., 1958, 35, № 1, 208—215 (рез. англ.)

По аналогии с теорией тяготения Эйнштейна, наличие некоторого физического поля трактуется как искривление некоторого „непифагорового" пространства с метрикой $ds = \gamma_i\, dx^i$, что приводит к нелинейным уравнениям поля, переходящим в линейном приближении (для слабых полей) в обычные уравнения. Несмотря на сингулярность потенциала, полная энергия поля точечного заряда конечна. Резюме автора.

6282. **Опыт новой теории относительности. Палаcьос** (Ensayo de una nueva teoria de la relatividad. Palacios Julio), Bol. Soc. geogr. Lisboa, 1957, 75, № 10-12, 389—398 (исп.; рез. англ.)

Речь профессора Мадридского университета, читанная в Лиссабонском географическом обществе и пытающаяся объяснить некоторые физические выводы из теории относительности, которые сам Эйнштейн в 1914 г. признал удивительными. Признавая, что теория Эйнштейна объяснила многие до того непонятные феномены и предсказала ряд других, автор считает, что понятие „объяснить" может иметь различные значения. Он считает, что парадокс о часах не получает объяснения и в общей теории относительности. В заключение своей статьи автор утверждает, что этот парадокс может быть разъяснен без изменения классической теории абсолютных пространства и времени без логических трудностей некоторой новой теорией относительности. Этой своей теории автор в статье не излагает. И. Я. Депман

6283. **Замечание к CTP-теореме. Йост** (Eine Bemerkung zum CTP-Theorem. Jost Res), Helv. phys. acta, 1957, 30, № 5, 409—416 (нем.)

Автор исходит из двух постулатов: 1) инвариантность относительно преобразований Лоренца без изменения направления времени; 2) существование 4-вектора энергии-импульса P_ν такого, что $i[P_\nu, \psi] = \partial\psi/\partial x_\nu$ для любого поля ψ и все собственные значения P_0 положительны. В этих предположениях доказывается, что *CTP*-теорема эквивалентна следующим перестановочным соотношениям:

$$<\psi_1(x_1)\psi_2(x_2),\ldots,\psi_{n+1}(x_{n+1})>_0 = (-1)^\sigma < <\psi_{n+1}(x_{n+1}),\ldots,\psi_2(x_2)\psi_1(x_1)>_0.$$

Здесь ψ_i — произвольные поля, рассматриваемые в теории, σ — число перестановок полей с полуцелым спином, а скобки означают усреднение по вакууму. Точки $x_1,\ldots,x_{n+1}$ выбраны таким образом, что величина $\xi = \Sigma_i \lambda_i (x_i - x_{i+1})$ $(i = 1,\ldots,n)$ является пространственно-подобным вектором при любых λ_i, удовлетворяющих условиям $\lambda_i \geqslant 0$, $\Sigma_i \lambda_i = 1$. Доказательство проводится на примере скалярного поля. Б. Л. Иоффе

6284. **Законы сохранения и другие тождества в единой теории Боннора. Хусейн** (Conservation laws and other indentities in Bonnor's unified field theory. Husain S. I.), Nuovo cimento, 1956, 4, № 4, 768—778 (англ.; рез итал.)

В единой теории, предложенной Боннором (РЖМат., 1959, 4165), уравнения движения получаются вариационными методами при использовании гамильтониана $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}^{ik} R_{ik} + p^2 \mathfrak{G}^{ik} g_{kl}$, где $\mathfrak{G}^{ik} = \omega g^{ik}$, $\omega = \sqrt{-g}$, $g = \det|g_{ik}|$, R_{ik} — свернутый тензор кривизны и p — реальная или мнимая константа. Система уравнений поля имеет вид $g_{ik;l} \overset{\text{def}}{=} g_{ik,l} - g_{\alpha k}\Gamma^\alpha_{il} - g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{lk} = 0$, $\Gamma^\rho_{l\rho} = 0$, $R_{ik} + p^2 U_{ik} = 0$, $\overset{+}{\underset{\smile}{R}}_{[ik,l]} + p^2 U_{[ik,l]} = 0$, где $U_{ik}\delta\mathfrak{G}^{ik} = \delta(\mathfrak{G}^{ik} g_{ki})$.

Искомые законы сохранения должны выражаться тождествами, доказательство которых вытекает из рассмотрения вариации интеграла $I = \int \mathfrak{H} d\tau$ при наличии уравнений поля. Как показывает автор, для теории Боннора имеют место тождества

$${}^*\mathfrak{T}^r_{rs} + {}^1/_2{}^*\mathfrak{T}_{ik} g^{ik}_{,s} = 0, \mathfrak{T}^r_{r,s} + {}^1/_2\mathfrak{T}_{ik}\, g^{ik}_{,s} = 0,$$

где ${}^*\mathfrak{T}_{ik} = -\sqrt{-g}(W_{ik} - {}^1/_2 g_{ik} g^{\mu\nu} W_{\mu\nu})$, $W_{ik} = R_{ik} + p^2 U_{ik}$ и $\mathfrak{T}_{ik} = -\sqrt{-g}(R_{ik} - {}^1/_2 g_{ik}\, g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})$. Из этих тождеств следуют законы сохранения соответственно в форме

$$({}^*\mathfrak{T}^r_s + {}^*\mathfrak{F}^r_s)_{,r} = 0, \quad {}^*\mathfrak{F}^\alpha_s = {}^1/_2(\delta^\alpha_s H - \frac{\partial H}{\partial g^{ik}_{,\alpha}} g^{ik}_{,s}), \quad \delta\int \mathfrak{B} d\tau =$$

$$= -\delta\int H d\tau (\mathfrak{T}^r_s + \mathfrak{F}^r_s)_{,r} = 0, \quad \mathfrak{F}^\alpha_s = {}^1/_2(\delta^k_s \Lambda - \Lambda^\alpha_{ik}\mathfrak{E}^{ik}_{,s}),$$

$$\Lambda^\alpha_{ik} = \frac{\partial H}{\partial \mathfrak{G}^{ik}_{,\alpha}}, \quad \lambda = H + p^2 \mathfrak{G}^{ik} g_{ki},$$

отсюда следует, что ${}^*\mathfrak{T}_{ik}$ — относительный тензор (псевдотензор плотности). Автор показывает далее, что эти законы сохранения могут быть получены методом, аналогичным методу Шрёдингера в единой теории Эйнштейна. А. З. Петров

6285. **Общая теория относительности. Тензор кривизны в абсолютном пространстве. Гомиш** (Relatividade geral. O tensor de curvatura de um espaço absoluto. Gomes Ruy Luís), Rev. Fac. ciênc. Univ. Lisboa, 1954—1955, A4, № 1-2, 245—262 (порт.)

Рассматривая 4-мерное пространство-время гравитационного поля и полагая, что $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $i, j = 1\ldots,4$ автор называет систему отнесения материальной, если пространственные координаты точек будут x^α и временные x^4. Тогда, как известно, кроме метрики пространства-времени $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$, можно выделить пространственную метрику $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$, где $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{g_{4\alpha} g_{4\beta}}{g_{44}} = g_{\alpha\beta} + \gamma_\alpha \gamma_\beta$, $\gamma_\alpha = \frac{g_{4\alpha}}{\sqrt{-g_{44}}}$ $(g_{44} < 0)$.

По терминологии, предложенной Гёделем (K. Gödel) пространство с материальной системой отнесения называется абсолютным, если система временных координат кривых x^4 допускает однопараметрическое семейство ортогональных гиперповерхностей $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = \lambda$. Необходимым и достаточным условием этого будет обращение в нуль кососимметрического тензора $a_{ijk} \equiv v_i \partial_{[k} v_{j]} + v_j \partial_{[i} v_{k]} + v_k \partial_{[j} v_{i]}$, где v_i можно положить равным g_{4i}. Если $a_{ijk} \equiv 0$, то система не будет вращаться, локально, относительно инерциальной системы, и этот факт, очевидно, инвариантен при преобразовании координат. Доказывается почти очевидная теорема, что за счет преобразования координат можно сделать $g_{4\alpha} = 0$, т. е. придти к системе координат, где $\gamma_\alpha = 0$, $\gamma_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. Далее, в этой системе координат вычисляются символы Кристоффеля для метрики ds^2 и находится их выражение через символы Кристоффеля $\Delta^\alpha_{\beta\gamma}$, отвечающие метрике $d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$, и удвоенный тензор $\varkappa_{\alpha\beta}$ второй формы гиперповерхности $x^4 = \text{const}$. Вычисляются компоненты тензора кривизны и рассматриваются частные случаи, отвечающие случаю $\varkappa_{\alpha\beta} = 0$; вычисляется тензор Риччи. Доказывается теорема: Необходимое и достаточное условие того, чтобы чисто пространственные компоненты

тензора кривизны и тензора Риччи пространства-времени совпадали с соответствующими компонентам тензором кривизны а тензором Риччи, отвечающими пространственной метрике $\gamma_{\alpha\beta}$, сводится к требованиям: 1) все миноры второго порядка матрицы $(\varkappa_{\alpha\beta})$ уничтожаются и 2) $\partial_4 \varkappa_{1\beta} - (1/2) A_\beta \gamma^{\rho\lambda} \varkappa_{1\rho} \varkappa_{1\lambda} = 0$ и $\varkappa_{\rho\lambda} = A_\rho \varkappa_{1\lambda}$, где $\partial_4 A_\rho = 0$. Эта теорема отвечает на вопрос, поставленный в книге Л. Ландау и Е. Лифшица, Теория поля, ОГИЗ, М.—Л., 1948. А. З. Петров

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

6286. **Дифференциальная геометрия. Кёйпер** (Differentiaalmeetkunde, Kuiper N. H.). Eculides (Nederl.), 1958, **33**, № 10, 289—300 (гол.)

Статья воспроизводит содержание лекций, прочитанных автором в рамках каникулярного курса (для преподавателей математики средней школы) при Математическом центре в Амстердаме и посвященных избранным вопросам глобальной дифференциальной геометрии кривых и поверхностей (результаты Фенхеля, Фари и Мильнора, Г. Вейля, Кёйпера, Чжэня и др.) и ее приложений (теорема Стокса, теорема Гаусса-Бонне-Пуанкаре). Новых результатов статья не содержит. Имеется семь задач-упражнений для слушателей. Библ. 12 назв.

Ю. М. Гайдук

6287. **Глобальные дифференциальные свойства пространства аффинной связности. Врэнчану** (Proprietăţi diferenţiale globale ale spaţiilor cu conexiune afină. Vrănseanu Gh.), Lucrările concfăt. geom. diferent. 1955, Timişoara Acad. RPR., 1956, 39—46 (рум.)

Излагаются некоторые результаты по глобальной дифференциальной геометрии пространств аффинной связности, полученные автором и его учеником в секции геометрии Института математики и на кафедре геометрии Бухарестского университета. Эти результаты относятся к следующим проблемам: эквивалентность с глобальной точки зрения локально евклидова пространства A_n аффинной связности с евклидовым пространством, если эта связность будет постоянной или линейной; классификация этих пространств; свойства автопараллельных кривых пространства аффинной связности; определение пространств A_n, обладающих максимальной группой автоморфизмов, и глобальные свойства некоторых симметрических римановых пространств, рассматриваемых как неголономные пространства.

Отмечаются, кроме работ автора, результаты Петреску (Şt. Pethescu), Мокану (P. Mocanu), Постелнику (T. Postelnicu), Телемана (C. Teleman) и Бадя (M. Badea).

Большая часть этих результатов с соответствующей библиографией находится в книге автора (Leçons de géométrie différentielle (vol. II, Bucarest, 1957). J. Elianu

6288. **Теорема разложения для V-многообразий. Бейли** (The decomposition theorem for V-manifolds. Baily Walter L., Jr.), Amer. J. Math., 1956, 78, № 4, 862—888 (англ.)

Сатаке (РЖМат., 1959, 3213) ввел обобщение понятия дифференцируемого многообразия, получившее название V-многообразия. Автор получает для компактных V-многообразий обобщения так называемых теорем регулярности и ортогонального разложения (Kodaira K., Ann. Math, 1949, 50, 587 — 665). Получены также обобщения на компактные V-многообразия теорем Ходжа и Кодаира.

Д. В. Беклемишев

6289. **Симметричные келеровы пространства. Паттерсон** (Symmetric Kähler spaces. Patterson E. M.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 286—291 (англ.)

Следуя ранее опубликованным статьям (см. РЖМат., 1955, 3957), автор рассматривает келеровы пространства с метрикой, не обязательно положительно определенной или эрмитовой.

Прежде всего, он доказывает, что такое пространство симметрично в том и только том случае, если существуют координаты $x^1, \ldots, x^n, \xi_1, \ldots, \xi_n$ и константы X_{ij}^{pq}, удовлетворяющие условию

$$X_{pi}^{st} X_{jk}^{rp} + X_{pi}^{tr} X_{jk}^{sp} - X_{pj}^{2s} X_{ik}^{tp} - X_{pk}^{rs} X_{ij}^{tp} = 0,$$

причем метрика принимает в этих координатах форму

$$ds^2 = X_{ij}^{pq} \xi_p \xi_q dx^i dx^j + 2 dx^i d\xi_i.$$

Затем, в качестве приложения, он находит три канонические формы, дающие всевозможные неприводимые симметричные келеровы метрики в четырехмерном пространстве. W. M. Boothby

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 1005

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

6290. **Аффинные пространства над алгебрами. Джавадов М. А.**, Элми әсәрләр Азәрб. унив., Уч. зап. Азерб. ун-т, 1957, № 7, 3—21 (рез. азерб.)

Определяются n-мерные аффинные пространства над полупростыми алгебрами, m-мерные плоскости этих пространств, при $m = 1$ прямые, и аффинные преобразования — непрерывные взаимно однозначные преобразования, переводящие прямые в прямые. Доказывается, что аффинные преобразования в этих пространствах имеют вид

$$'x^i = \sum_j a_j^i \, f(x^j) + b^i,$$

где $f(x)$—непрерывный автоморфизм алгебры. Выясняются особенности расположения прямых в 2-мерных плоскостях, происходящие от наличия в алгебре делителей нуля: кроме пересекающихся, параллельных и совпадающих прямых, здесь имеются „соприкасающиеся прямые“ (две прямые, проходящие через „особенный вектор“, получающийся из вектора общего положения умножением на делитель нуля) и „расходящиеся прямые“ (переводящиеся переносом в соприкасающиеся прямые). Показывается, что при аффинном преобразовании отношение трех точек A, B, C одной прямой, равное такому элементу λ алгебры, что векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ связаны соотношением $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$, переходит в элемент $f(\lambda)$. Специально рассматриваются аффинные преобразования над алгебрами вещественных, комплексных и двойных матриц и над алгебрами альтернионов (чисел Клиффорда); показывается, что в случае пространств над вещественными матрицами и альтернионами нечетного порядка аффинные преобразования можно определить как взаимно однозначные преобразования, переводящие прямые в прямые и непрерывность этих преобразований является следствием определения этих преобразований. Б. А. Розенфельд

6291. **Геометрия сферы в гильбертовом пространстве. Соса-Паэс, Муньос** (Geometria de la esfera en el espacio de Hilbert. Sosa Páez Susana Z. de, Muñoz Lina N.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, **17**, 279—286 (исп.)

Авторы, работавшие в семинаре, руководимом Рэй Пастором (Rey Pastor), ставят своей задачей изложить тривиальные, но не встречавшиеся им в литературе соображения о переносе основных понятий евклидовой геометрии на гильбертово пространство. Они определяют линейное многообразие E^{-1} ($E^{\infty-1}$) порядка —1

уравнением $ax=\gamma$; гиперплоскость порядка n системой n таких уравнений. Здесь $a, b, \ldots, x$ суть точки; ab—скалярное произведение; $\alpha, \beta, \ldots$—вещественные числа.

Сферическое многообразие или гиперсферическая поверхность S^{-1} определяется уравнением $|x-a|=\rho$. Сфера: $|x-a|\leqslant\rho$ и т. п.

Даются параметрические уравнения гиперплоскости: $x=u\frac{|\lambda a|\cdot|a|}{ua}$, где u — единичный вектор. Определяется гомотетия с центром в начале, степень точки относительно сфер и полярность, радикальные гиперплоскости, инверсия относительно начала, стереографическая проекция все совершенно очевидным образом.

Находится расстояние точки q до гиперплоскости $a_ix=\gamma_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$

$$|x-q|=\sum_{s=1}^{n}a_s\frac{\sum_{r=1}^{n}\gamma_r-\Omega_{rs}}{\delta_1^2\delta_1^2\ldots\delta_n^2\Theta},$$

где

$$\delta_i=|q_i|,\ \Theta=\begin{vmatrix}\cos(a_1a_1)&\ldots&\cos(a_1a_n)\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ \cos(a_na_1)&\ldots&\cos(a_na_n)\end{vmatrix}=|\omega_{ij}|,$$

а Ω_{rs} получается из определителя $|\delta_i\delta_j\omega_{ij}|$ вычеркиванием r-строки и s-столбца.

Рассматривается пересечение n гиперсфер, показывается что можно определить изометрию между этим пересечением и всем гильбертовым пространством.

Р. И. Пименов

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

6292. Проблемы о выпуклых телах. Буземан, Петти (Problems on convex bodies. Busemann H., Petty C. M.), Math. scand., 1956, **4**, № 1, 88—94 (англ.)

Десять проблем о сечении выпуклых тел плоскостями, проходящими через центр симметрии. Эти проблемы имеют и самостоятельный интерес; решение их дало бы следствия существенного значения для теории пространств Минковского. Сформулируем первые восемь проблем, пользуясь следующими обозначениями авторов: V—объем выпуклого центрально симметричного тела K в евклидовом пространстве E^n, $n\geqslant3$; $A(u)$ $(n-1)$-мерный объем сечения $K(u)$ плоскостью, перпендикулярной орту u и проходящей через центр симметрии z. Штрихами помечены буквы, относящиеся к аналогичному телу K'. Ω—единичная сфера, определенная ортами u.

1. Если $A'(u)\leqslant A(u)$ для всех u, то верно ли заключение: $V'\leqslant V$?

2. Найти выпуклое тело, дающее минимум интегралу: $V^{1-n}\int_\Omega(A(u))^n d\omega_u$, $d\omega_u$ —элемент площади на Ω.

3. Найти оценку сверху для V, выраженную через $A(u)$ и такую, чтобы знак равенства характеризовал эллипсоиды.

4. Найти K, дающее $\min_K\max_u A_{(u)}{}^nV^{1-n}$ (сфера дает строгий $\max_K\min_u$).

5. Характеризуются ли эллипсоиды постоянством функции $C(u)$, где $C(u)$—максимальный объем конуса с основанием $K(u)$ и вершиной в K.

6. Найти выпуклое тело, для которого $V^{-1}\max_u C(u)$ дает минимум (Соответствующая max min проблема для $n\geqslant3$ тоже не решена).

7. Найти K, дающее минимум интегралу $\int_{\partial K}A(u)^{-1}ds_u$, элемент ds_u $(n-1)$-мерного объема границы ∂K берется в точке касания касательной плоскости направления u.

8. Характеризуются ли эллипсоиды тем фактом, что гауссова кривизна в точке касания касательной плоскости направления u пропорциональна $A(u)^{-(n+1)}$.

В. А. Ефремович

6293. Кривые со своего рода постоянной шириной. Келли (Curves with a kind of constant width. Kelly Paul J.), Amer. Math. Monthly, 1957, **64**, № 5, 333—336 (англ.)

Рассматриваются самопересекающиеся кривые, имеющие постоянную ширину в смысле постоянства расстояния между параллельными касательными. Для некоторой конструкции, приводящей к этим кривым, наряду с обычными кривыми постоянной ширины, рассматриваются условия выпуклости получающихся кривых.

Ю. Д. Бураго

6294. Многоугольники, которые могут быть вписаны в выпуклые кривые. Лумер (Poligonos inscriptibles en curvas convexas. Lumer G.), Rev. Unión mat. argent. y Asoc. fís. argent., 1955, **17**, 97—102 (исп.)

Автор рассматривает многоугольники, которые могут „поворачиваться" в выпуклой кривой. Многоугольник $P_1P_2\ldots P_n$ может поворачиваться в выпуклой кривой Γ, если существуют однородные непрерывные функции $P_i(t)$ такие, что $t\in[0,1]$, $P_i(0)=P_i(1)$, многоугольник $P_1(t)P_2(t)\ldots P_n(t)$ конгруэнтен многоугольнику $P_1P_2\ldots P_n$ и $P_i(t)$ перемещается по кривой Γ.

Сначала автор указывает пример построения отличной от окружности выпуклой кривой, в которой может поворачиваться квадрат. Для этого квадрат вписывается в окружность радиуса r, а она катится изнутри без скольжения по окружности радиуса $R(r=\frac{4}{5}R)$. Вершины квадрата описывают искомую кривую.

Затем доказывается теорема 1 для равнобедренного треугольника. Обозначим его угол при вершине α. Тогда, если $\frac{\alpha}{2\pi}$ иррационально, то кривая Γ, в которой поворачивается равнобедренный треугольник, необходимо окружность; если же $\frac{\alpha}{2\pi}$ рационально, то существует бесконечное число отличных от окружности выпуклых кривых, в которых поворачивается данный треугольник. Метод доказательства первой части теоремы вызывает некоторые сомнения.

Теорема 2 гласит, что многоугольник, могущий поворачиваться в некоторой выпуклой кривой, может быть вписан в окружность. Для доказательства с помощью интегрирования по Лебегу получается формула

$$S(x',y')=\pi(x'^2+y'^2)+K_1x'+K_2y'+S(0,0),$$

где $S(x',y')$—ориентированная площадь внутри кривой, описанной точкой x',y'.

Теорема 3 утверждает, что выпуклая кривая, в которой может поворачиваться квадрат, в каждой точке имеет касательную.

Используя вышенаписанную формулу для площади и заставляя точку O' вращаться вокруг O в направлении, противоположном вращению квадрата, находим $S=\pi R^2-4\pi(O'-O)^2$, где S—площадь кривой, R—радиус окружности, описанной вокруг квадрата. Аналогичная формула верна для любого правильного многоугольника. Таким образом, существуют кривые с площадью меньшей, чем площадь круга, описанного вокруг правильного многоугольника, поворачивающегося в этой кривой.

Автор выдвигает проблему: найти среди этих кривых те, которые имеют минимальную площадь.
Р. И. Пименов

6295. О деформациях выпуклого многогранного угла. **Волков Ю. А.**, Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 209—210

6296. Бесконечно малые изгибания поверхностей вращения отрицательной кривизны. **Михайловский** (Нескінченно малі згинання поверхень обертання від' ємної кривини. Михайловський В. І.), Наук щорічник. Механ.-матем. фак. Київськ. ун-ту, 1956. Київ, 1957, 558—559 (укр.)

Рассматриваются бесконечно малые изгибания поверхностей вращения отрицательной кривизны. Утверждается, что при таких изгибаниях параболический край может переходить лишь в линии, лежащие на проходящем через этот край цилиндре с образующими, параллельными оси вращения. Обычный край может, вообще говоря, переходить в любую пространственную кривую.

Указывается, что доказательство основано на проводимых теоремах об уравнениях вида $y''+g(x)\,y=0$ типа теоремы Штурма и теоремы сравнений. Доказательства не приводятся.
Р. С. Гутер

6297. Аффинная дифференциальная геометрия и выпуклые тела. **Сантало** (Geometria diferencial afin y cuerpos convexos. Santaló L. A.), Math. notae, 1956, **16**, № 1-2, 20—42 (исп.)

Изложение вопроса профессором университета города Бэунос-Айрес Сантало на основании последних трудов Бляшке, Гротемейера и собственных. Указана новая литература. (13 назв.
И. Я. Депман

См. также: 5379, 5380, 5408 К, 5409 К, 5431, 5529 К, 5973

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

6298. О приближенных решениях дифференциального уравнения Льенара $\ddot{y}+f(\dot{y})+y=0$. **Хеллер** (Über angenäherte Lösungen der Lienard'schen Differentialgleichung $\ddot{y}+f(\dot{y})+y=0$. Heller Bedřich), Acta techn. (Československ.), 1958, **3**, № 3, 157—179 (нем., рез. англ.)

В фазовой плоскости (y, p) автор строит приближенные решения уравнения Льенара

$$pdp/dy + f(p) + y = 0, \text{ где } p = dy/dt. \qquad (1)$$

В окрестности начальной точки ($y = y_0$, $p = 0$) интегральная кривая определяется приближенной формулой

$$p = -(y - y_0)\,\frac{2}{3}\,f'(0) \pm$$

$$\pm \sqrt{(y - y_0)\left[(y-y_0)\,\frac{4}{9}\,(f'(0))^2 - (2f(0) + y + y_0)\right]} \qquad (2)$$

или

$$p \cong -(y - y_0)\,\frac{2}{3}\,f'(0) \pm \sqrt{(y-y_0)(-2f(0) - 2y_0)}\,.$$

При этом знак плюс перед корнем употребляется для $y_0<0$ и минус — для $y_0 > 0$. Если на интегральной кривой известна точка $y=y_1$ и $p = p_1$, то p_2, соответствующее $y_2 = y_1 + \Delta$, находится по формуле

$$p_2 = \sqrt{p^2{}_1 + y^2{}_1 - y^2{}_2 - 2\Delta\,[f(p_1) + \frac{\Delta}{2}\,a(y_1)]}, \qquad (3)$$

где

$$a(y_1) = f'(p_1)\left(-\frac{f(p_1) + y_1}{p_1}\right).$$

Кромс того, отправляясь от начальной точки $(y_0, 0)$, значение $p(y)$ может быть найдено методом последовательных приближений в соответствии с формулой

$$p_n(y) = \sqrt{p^2{}_0(y) - 2\int_{y_0}^{y} dy\, f(p_{n-1}(y))}\,, \qquad (4)$$

где

$$p_0(y) = \sqrt{y_0^2 - y^2}\,.$$

Интегральная кривая $p(y)$ достигает экстремума на кривой $y + f(p)$, делящей фазовую плоскость (y, p) на две области, в каждой из которых произведение pdp/dy имеет строго определенный знак. Доказано, что в фазовой плоскости существует замкнутая интегральная кривая $p(y)$ только тогда, когда область, в которой $pdp/dy > 0$, расположена слева от граничной кривой $y + f(p) = 0$, если последнюю проходить от $y = +\infty$ до $y = -\infty$. Кроме того, показано, что замкнутые интегральные кривые в фазовой плоскости существуют тогда, когда функция $f(p)$ удовлетворяет условию $\oint f(p)dy = 0$. Здесь интегрирование проводится вдоль замкнутой кривой в фазовой плоскости. Если $f(p)=f(-p)$, то интегральная кривая симметрична относительно оси y. Автор подробно рассмотрел также случай, когда в (1) перед $f(p)$ имеется параметр ε ($0 \leqslant \varepsilon < \infty$), а сама функция $f(p) = -p + \frac{1}{3}\,p^3$ (уравнение Ван-дер-Поля). Для малых значений ε ($\varepsilon \ll 1$) получено приближенное решение вида

$$y \simeq 2\cos(1 + \omega_2\varepsilon^2)\,t + \ldots$$

Для больших значений ε($\varepsilon \gg 1$) установлен предельный цикл. Для периода T релаксационных колебаний получено приближенное выражение

$$T = \varepsilon\,(\eta_4 - \eta_2)\left(\frac{1}{p_{\nu_1}} - \frac{1}{p_{\nu_2}}\right),$$

где p_ν — корни функции $f(p) = 0$ и η_2, η_4 — экстремальные значения кривой $\eta = -f(p)$. В приложении приближенные формулы (2), (3), (4) применяются к дифференциальному уравнению Ван-дер-Поля. Результаты численного расчета автор сравнивает с графическим решением по методу Льенара и отмечает удовлетворительное согласие между ними.
Н. Я. Лященко

6299. К вопросу получения периодических численных решений нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. **Салливан** (A procedure for obtaining periodic numerical solutions to simultaneous, non-linear, first order differential equations. Sullivan Richard J.), Industr. Math., 1955, **6**, 17—22 (англ.)

Автор рассматривает вопрос о выборе на быстродействующих электронных машинах начальных условий при $t = 0$ для функций $C(t)$ и $B(t)$, представляющих собой устойчивое периодическое решение нелинейной системы вида

$$\frac{dC}{dt} = f_1(t, C, B), \quad \frac{dB}{dt} = f_2(t, C, B). \qquad (1)$$

При этом предполагается, что при выводе системы (1) пренебрегли случайным затуханием и восстанавливающими силами.

Указанные начальные условия автор находит методом последовательных приближений, сходимость которого строго не исследовалась. Н. Я. Лященко

6300. Преобразования, используемые при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений. Гроссуолд (Transformations used in the numerical integration of systems of differential equations. Grosswald E.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 159—160 (англ.)

Рассматривается система дифференциальных уравнений в векторно-матричном виде $\dot{X} = AX + \sum V_m \exp(\alpha_m t)$, где A — постоянная матрица, V_m — векторы. Если требуются многие решения (соответствующие различным начальным векторам X_0), то можно использовать численную схему интегрирования (S), ошибка которой быстро возрастает с увеличением интервала h. Цель этой статьи указать такие преобразования, зависящие от X_0, A и V_m, чтобы интегрирование (S) не содержало ошибок. Из резюме автора.

6301. Численное нахождение периодических решений в задаче трех тел. Шубарт (Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem. Schubart J.), Astron. Nachr., 1956, 283, № 1, 17—22 (нем.)

См. РЖАстр, 1957, 1827.

6302. Приближенный метод решения граничных задач для некоторых уравнений эллиптического типа. Кунин И. А., Изв. АН СССР. Отд. техн. н., 1958, № 10, 146—150

В области Q, ограниченной замкнутой поверхностью S, рассматривается первая граничная задача для уравнения $\nabla(\nu \nabla \rho) = \rho$. Предполагается, что $\nu(x) > 0$ и непрерывна в области Q со своими производными до второго порядка включительно. Это уравнение с переменными коэффициентами при помощи частных решений однородного уравнения сводится к уравнению с почти постоянными коэффициентами. Решение последнего находится приближенно в виде решения соответствующего уравнения с постоянными коэффициентами.

Приближенное решение исходного уравнения можно построить другим путем, именно путем сведения исходного дифференциального уравнения к интегральному. Приводится приближенный метод его решения.

В качестве приложения рассмотрено решение задачи гидродинамической теории смазки упорной подушки в виде кольцевого сектора при переменной вязкости, меняющейся по линейному закону. Для предельного случая квадратного ползуна и постоянной вязкости проведено сравнение с точным решением, полученным для этого случая Митчелом. Для полной безразмерной нагрузки на упорную подушку расхождение порядка 0,5%. М. Я. Мазеев

6303. О скорости сходимости итерационного процесса разностного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Алексидзе М. А., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 9—12

Рассматривается семейство операторов D_α при $\alpha < 0$

$$D_\alpha u = \frac{1}{1+\alpha}(Du + \alpha u),$$

где

$$Du_{ij} = 1/4\,(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j}),$$

введенное Л. А. Люстерником (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1947, 20, 49) при положительных α. Выводятся оценки скорости сходимости итерационных процессов при использовании оператора D_α ($\alpha < 0$) для решения разностного уравнения Лапласа на электронной цифровой машине. Устанавливается оптимальное значение $\alpha < 0$, дающее миксимальный выигрыш во времени решения. В работе предлагается для оценки числа итераций исходить не из разности начального приближения и неизвестного точного решения разностного уравнения, как это обычно делают, а из невязки (разности начального и первого приближения) с последующим использованием известной оценки Гершгорина. Е. А. Волков

6304. О целесообразности применения альтернирующего метода Шварца на электронных цифровых машинах. Алексидзе М. А., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 2, 231—234

Устанавливается целесообразность применения метода Шварца при решении методом сеток задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае сеточной области, превышающей емкость внутреннего запоминающего устройства электронной вычислительной машины. Выводятся оценки скорости сходимости метода Шварца и оценки времени решения задачи Дирихле через скоростные характеристики вычислительной машины (время выполнения арифметических операций и время обращения к внешнему запоминающему устройству) при использовании метода Шварца с постоянной точностью итераций и переменной точностью итераций, а также при итерационном процессе без применения метода Шварца. В работе имеется неточность. В тех случаях, когда говорится „необходимое число итераций", следует понимать „достаточное число итераций".

Е. А. Волков

6305. Об одном алгоритме автоматизации численного решения плоской задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Алексидзе М. А., Докл. АН СССР, 1958, 119, № 5, 847—850

Даются принципы построения универсальной программы (УП) для решения методом сеток уравнения Лапласа на автоматической вычислительной машине. УП позволяет наиболее полно автоматизировать весь процесс решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Исходной информацией для УП являются закодированные параметрические уравнения границы области и граничной функции. УП осуществляет следующие процессы: а) замену границы области ломаной, состоящей из сторон и диагоналей сетки; б) перенос сеточной области во внутреннее запоминающее устройство машины — линеаризацию области; в) нахождение всех граничных точек и необходимой информации для составления в этих точках нерегулярных разностных уравнений; г) непосредственный счет и вывод окончательных результатов в удобной для расшифровки форме. Е. А. Волков

6306. Теплопроводность в ламинарном течении. Абрамович (Heat transfer in laminar flow. Abramowitz M.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 135 (англ.)

Решение проблемы, полученное методом наименьших квадратов, выражается через неортогональную систему характеристических функций. Эти функции и соответствующие характеристические значения определяются при помощи метода Рунге—Кутта. Из резюме автора.

6307. Метод прямых для решения одной нелинейной краевой задачи в области с криволинейной границей. Будак Б. М., Горбунов А. Д., Докл. АН СССР, 1958, 118, № 5, 858—861

Методом прямых ищется решение уравнения

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

в области G: $0 < x < l_x$, $g(x) < y < l_y$, $|u| < l_u$

$|u_x| \leqslant l_{ux}$, $|u_y| \leqslant l_{uy}$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(x, g(x)) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l_x, \quad u(0, y) = \psi(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant l_y.$$

При некоторых условиях устанавливается существование решения, единственность, непрерывная зависимость от граничных условий. Дается оценка погрешности, допускаемая при замене точного решения приближенным. Н. П. Жидков

6308. Решение задачи о сверхзвуковом осесимметрическом течении на высокоскоростной вычислительной машине. Кларк (High-speed computing machine calculation of supersonic axisymmetric flows. Clark Martha W. BRL Memorandum Rept 1954, № 830, 37 pp., ill.) (англ.)

Довольно подробный отчет о решении на вычислительной машине ОРДВАК (ORDVAC) задачи о сверхзвуковом обтекании газовым потоком тела вращения, имеющего коническое острие, в случае, когда ударный фронт привязан к телу. Область конического течения за ударным фронтом считается известной, и расчету подлежит область, в которой сказалось отклонение формы тела от конической. Для установившегося осесимметрического течения приводятся уравнения как в переменных физической плоскости, так и в характеристических переменных. Весь процесс счета разбивается на три отдельных процесса: расчет внутренней точки, расчет точки на поверхности тела, расчет точки на ударной волне. Для каждого из этих процессов выписаны формулы в разностях для интегрирования вдоль характеристик. Приведено описание порядка действий на машине и блок-схема программы. В. А. Булавский

6309. Метод решения задач безвихревого течения газа с помощью быстродействующих машин. Кога (A method for solving problems of irrotational gas flow by means of high-speed digital computers. Koga Toyoki), J. Appl. Mech., 1957, **24**, № 4, 497—500 (англ.)

Для расчета смешанных плоских безвихревых установившихся течений идеального газа предлагается метод трубок тока. Предполагается, что вдоль некоторой линии тока I задано распределение давления p и в одной ее точке m известны q_m, p_m, ρ_m (q — скорость p — давление, ρ — плотность) и S_m — ширина трубки тока. Из уравнения адиабатичности $p\rho^{-\gamma} = p_m \rho_m^{-\gamma}$ одного из уравнений движения

$$q^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left\{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}$$

(индекс „0“ относит параметры к точке торможения, а $\gamma = c_p/c_v$) и уравнения непрерывности $\rho qS = \rho_m q_m S_m$ определяются последовательно ρ, q, S вдоль I, а значит и координаты соседней линии тока II. Второе уравнение движения, $\frac{\rho q^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial \eta}$, записанное в местной прямоугольной системе координат (с началом в данной точке линии тока и с осью ζ, касательной, а осью η, нормальной к линии тока) позволяет вычислить $\partial p/\partial \eta$ по известным ρ, q и r (r — радиус кривизны линии тока в данной точке). Далее по формуле $p_{II} = p_I + \partial p/\partial \eta S$ давление переносится на соседнюю линию тока и процесс повторяется. Метод применим и для осесимметрических течений.

Приведен пример расчета этим методом течения газа в плоском сопле, включая и область дозвукового течения, на вычислительной машине. Указывается на возможность применения метода и в случае, когда условия задаются на бесконечности (внешнее обтекание тела). О том, как в этом случае рассчитывать критические точки, никаких указаний нет. Г. С. Росляков

6310. О методе Ньютона. Шрёдер (Über das Newtonsche Verfahren. Schröder Johann), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1957, **1**, № 2, 154—180 (нем.)

Для решения уравнения

$$u = \lim_{n\to\infty} T(u, x_n) \tag{1}$$

применяется интеративный процесс вида

$$u_{n+1} = T(u_n, x_n). \tag{2}$$

К такому процессу, в частности, сводится обобщенный метод Ньютона:

$$\left[u_{n+1} = u_n - [G'_{(x_n)}\right]^{-1} Gu_n \tag{3}$$

для решения уравнения

$$Gu = 0. \tag{4}$$

Производная $G'_{(x_n)}$ берется в некоторой точке x_n, определяемой по u_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Пусть пространство K обобщенно нормировано посредством элементов полуупорядоченного пространства N, являющегося одновременно банаховым, $F \subset D \subset K$. Пусть $T(u, x)$ отображает множество пар (u, x), $u \in D$, $x \in F$, в K и имеется „мажорантный“ оператор $\widetilde{T}(\rho, \xi)$, отображающий пары (ρ, ξ), $\rho \in \widetilde{D}$, $\xi \in \widetilde{F}$, $\widetilde{F} \subset \widetilde{D} \subset N$, в N; T и $\widetilde{T}$ удовлетворяют неравенствам

$$|T(u, x) - T(v, y)| \leqslant \Phi[|u - v|, |u - w|, |v - w|; |x - y|, |x - w|, |y - w|; |u - x|, |v - y|, |T(v, y) - u|, |T(v, y) - v|],$$

$$\widetilde{T}(\rho, \xi) - \widetilde{T}(\sigma, \eta) \geqslant \Phi[\rho - \sigma, \rho, \sigma; \xi - \eta, \xi, \eta; \rho - \eta; \widetilde{T}(\sigma, \eta) - \rho, \widetilde{T}(\sigma, \eta) - \sigma].$$

Здесь $u, v \in D$, $x, y \in F$, $\rho, \sigma \in \widetilde{D}$, $\xi, \eta \in \widetilde{F}$. Φ означает монотонную функцию от 9 положительных аргументов из N со значениями в N; w — некоторый фиксированный элемент F.

При выполнении перечисленных и еще некоторых условий в § 2 доказывается, что сходимость процесса: $\rho_{n+1} = \widetilde{T}(\rho_n, \xi_n)$, $\rho_0 = 0$, к решению ρ^* уравнения

$$\rho^* = \lim_{n\to\infty} \widetilde{T}(\rho^*, \xi_n)$$

влечет сходимость (2) к решению (1), причем: $|u^* - u_n| \leqslant \rho^* - \rho_n$. Точки x_n и ξ_n выбираются так, чтобы: $|u_n - x_n| \leqslant \rho_n - \xi_n$. В § 3 исследуется сходимость процесса (3) к решению (4). Если $H(u) \equiv [G'_{(w)}]^{-1} Gu$ и $\widetilde{H}(\rho)$ — „мажоранта“ для $H(u)$, удовлетворяющая соотношениям:

а) $\widetilde{H}(0) = 0$, $\widetilde{H}'_{(0)} = 0$;

б) $0 \leqslant (\widetilde{H}'_{(\rho+\sigma)} - \widetilde{H}'_{(\rho)})\tau \leqslant (\widetilde{H}'_{(\rho'+\sigma')} - \widetilde{H}_{(\rho')})\tau$

для $0 \leqslant \rho \leqslant \rho'$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma'$, $\tau \geqslant 0$;

в) $|(H'_{(u)} - H'_{(v)})h| \leqslant (\widetilde{H}'_{(|u-v|+|v-w|)} - \widetilde{H}'_{(|v-w|)})|h|$;

показывается, что сходимость (3) вытекает из сходимости аналогичного „мажорантного“ процесса. В §§ 4, 5 теория применяется к задаче определения собственного

числа и вектора линейного оператора A в пространстве K' типа (B). Решение системы:

$$A\varphi = \lambda\varphi, \quad l\varphi = 1,$$

где l — некоторый функционал, сводится к решению (4), где $Gu \equiv u' - u''Au'$. C переводит элемент $u \equiv \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ в элемент из K'. Приводятся числовые примеры для матриц 4-го и 8-го порядка. В §§ 5, 6 описываются приемы, позволяющие в некоторых случаях упростить процесс. Библ. 27 назв. А. Н. Балуев

6311. Приближенное решение системы нелинейных уравнений. Микеладзе Ш. Е. Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1958, **20**, № 6, 647—653 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1958, **20**, № 6, 647—653

Продолжение ранней работы автора (Изв. Тбилисск. индустр. ин-та, 1934, **1**, 21—47). Вместо системы уравнений

$$F_k(w_1, w_2, \ldots, w_m) = 0, \quad (k = 1,2,\ldots,m) \qquad (1)$$

рассматривается система равенств

$$F_k(w_1, w_2, \ldots, w_m) - F_k(w_{10}, w_{20}, \ldots, w_{m0}) = \lambda_k(t - t_0) \quad (k = 1,2,\ldots,m), \qquad (2)$$

где t — параметр, $t_0, w_{10}, w_{20}, \ldots, w_{m0}$ — фиксированная система чисел, λ_k определяются из условий: $\lambda_k(t_1 - t_0) = -F_k(w_{10}, w_{20}, \ldots, w_{m0})$. Здесь $t_1 \neq t_0$ фиксировано. Указан способ получения разложения $w_k(t)$, определяемых (2), по степеням t. $w_k(t_1)$ дает решение системы (1). Н. П. Жидков

6312. О механической кубатуре. Танимото (On the mechanical cubature. Tanimoto Bennosuke), J. Shinsku Univ. (Engl. Ed.) 1954, № 4, 73—95 (англ.)

Для интеграла

$$I = \int_a^{a'}\int_b^{b'} f(x, y)dxdy \qquad (1)$$

строятся формулы механических кубатур, основанные на замене функции f интерполяционными многочленами стирлингова и бесселева вида.

А. В плоскости xy берется прямоугольная сетка с шагами h и k с таким расчетом, чтобы одна из точек сетки (x_0, y_0) поместилась в центре прямоугольника $[a, a'; b, b']$. Принимая точку (x_0, y_0) за начальную, автор интерполирует $f(x, y)$ по каждому аргументу при помощи формулы Стирлинга. Сохраняя в интерполяционном многочлене несколько первых членов, он вносит его в интеграл (1) и получает формулу приближенной кубатуры вида

$$I \approx hk \sum_{r,\,s} \frac{C_r}{(2r)!}\frac{C_s}{(2s)!}\Delta_{2r2s}. \qquad (2)$$

Указаны правила вычисления коэффициентов формулы (2) и приведены небольшие вспомогательные таблицы. Пусть $a' - a = 2\nu h$, $b' - b = 2\nu k$. Вычисления выполнены при $\nu = 1$ (область интегрирования есть прямоугольник $2h \times 2k$) для различных случаев, когда в (2) берутся разности второго и четвертого порядков; при $\nu = 2$ (интегрирование по прямоугольнику $4h \times 4k$), когда берутся разности до восьмого порядка и при $\nu = 1/2$ (область интегрирования — прямоугольник $h \times k$), когда берутся разности второго и четвертого порядка. Приведены примеры вычислений с хорошей точностью результатов. Для функций частного вида кубатурные формулы вида (2) могут быть упрощены. Такое упрощение проделано на примере функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $\nabla^2 f + C = 0$.

Б. Пусть сетка выбрана так, что центр прямоугольника $[a, a', b, b']$ помещается в центре сеточного прямоугольника, например, пусть $(a + a')/2 = x_0 + \frac{1}{2}h$, $(b + b')/2 = x_0 + \frac{1}{2}k$. Тогда выполняется интерполирование $f(x, y)$ по обоим аргументам при помощи формулы Бесселя и строятся для этого случая приближенные кубатуры, аналогичные описанным выше. Автор указывает также на очевидную возможность построения сходных формул для вычисления интегралов более высокой кратности. В. И. Крылов

6313. Асимптотические квадратуры со специальным разложением разности между верхним и нижним пределами интеграла в геометрическую прогрессию. Дзюбенко С. Т. Научн. тр. Укр. с.-х. акад., 1957, **9**, 407—420

Длина промежутка интегрирования $b(\omega)$ рассматривается как монотонная и непрерывная функция некоторого параметра ω и разлагается в геометрическую прогрессию:

$$b(\omega) = \frac{1}{\omega^{\varphi(n)}} \cdot \frac{1}{\omega/T(\omega) - 1} = \frac{1}{\omega^{\varphi(n)}} \sum_{\nu=1}^{\infty} [T(\omega)/\omega]^{\nu} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu(\omega, n) = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(\omega, n) = r_n,$$

где $$\frac{T(\omega)}{\omega} = \frac{b(\omega)\,\omega^{\varphi(n)}}{1 + b(\omega)\,\omega^{\varphi(n)}} < 1,$$

$\varphi(n)$ монотонна, непрерывна и положительна. Члены этой прогрессии принимаются за промежутки между смежными узлами

$$X_\nu = a + \sum_{k=1}^{\nu} \lambda_k(\omega, n), \quad X_{\nu - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(X_{\nu-1} + X_\nu).$$

Для вычисления интеграла $\int_a^{a+b(\omega)} f(x)\,dx$ применяется формула прямоугольников, трапеций или Симпсона к каждому из промежутков и полученные формулы складываются. Считая $f(x)$ монотонной и имеющей в промежутке интегрирования непрерывные производные второго или четвертого порядка, автор получает соответственно три квадратурные формулы. Приведем первую формулу прямоугольников:

$$\int_a^{a+b(\omega)} f(x)\,dx = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu(\omega, n) f(X_{\nu - \frac{1}{2}}) + r_n f[a + b(\omega) - r_n/2] + R_n,$$

где

$$R_n = 1/24 \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^3(\omega, n) f''(\eta_\nu) + r_n^3 f''(\eta_r) \right\} =$$

$$= f''(\xi)/24 \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^3(\omega, n) + r_n^3 \right\},$$

$$X_{\nu-1} < \eta_\nu < X_\nu, \quad a + b(\omega) - r_n < \eta_r < a + b(\omega).$$

Приводится необходимый и два достаточных признака асимптотичности полученных формул, когда при фиксированном n имеем $\lim_{\omega \to \infty} \omega^n R_n = 0$. Дается видоизменение полученных квадратурных формул для интегралов с постоянными пределами. В вычисления вводятся некоторые преобразования, не изменяющие требуемой точности — округление многозначных промежутков между узлами, сдвиг абсцисс и др. Приводится числовой при-

мер. В работе не выяснен вопрос, в каких случаях полученные автором формулы выгоднее, чем обычные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

А. Х. Турецкий

6314. О сходимости интерполяционных формул Лагранжа и Эрмита с равноотстоящими узлами. Рунк (Über das Konvergenzverhalten der Interpolationsformeln von Lagrange und Hermite mit äquidistanten Knoten. Runck P. O.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 67 (нем.)

Для формулы Лагранжа $L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k)$ с равноотстоящими в $(-1, +1)$ узлами x_k показывается, что имеется от n зависимый подынтервал $\tau_n = (-t_n, +t_n) \subset (-1, +1)$ с $t_n = rn^{-1/3}$ (r — постоянная), в котором для функции $\Lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{n} |l_k(x)|$ имеет место соотношение $\Lambda_n(x) < A \log n + B$ (A, B — постоянные). Это дает оценки для отклонения $|L_k(x) - f(x)|$ в τ_n. Для формулы Эрмита в $H_n(x)$ с равноотстоящими узлами имеют место в τ_n соответствующие оценки.

Из резюме автора

6315. Вычисление выражений, содержащих полные эллиптические интегралы. Гровер (The numerical evaluation of expressions involving complete elliptic integrals. Grover Frederick W.), Commun. and Electronics, 1958, № 38, 496—502 (англ.)

Вычисление выражений, содержащих полные эллиптические интегралы, может быть сведено к вычислению одного из двух так называемых „стандартных" интегралов P и Q или в худшем случае к вычислению их суммы $(P + Q)$. Вычисление интегралов

$$P = \int_0^{\pi/2} \frac{s_0 \cos^2\varphi + r_0 p \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + p\sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + n_0^2 \sin^2\varphi}}$$

$$Q = \int_0^{\pi/2} (z_0 \cos^2\varphi + w_0 \sin^2\varphi) \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + n_0^2 \sin^2\varphi}},$$

автор сводит к вычислению некоторых сходящихся последовательностей. Так для вычисления интеграла P требуется вычислить совокупность последовательностей

$$m_{i+1} = \frac{m_i + n_i}{2},\ n_{i+1} = \sqrt{m_i n_i},\ c_{i+1} = \frac{m_i - n_i}{2},$$

$$t_{i+1} = \frac{n_{i+1}}{4m_{i+1}}\left(t_i + 2 + \frac{1}{t_i}\right),\ r_{i+1} = \frac{s_i + r_i t_i}{1 + t_i},$$

$$s_{i+1} = \frac{s_i + r_i}{2};$$

тогда

$$P = \frac{\pi \cdot s_\infty}{2 \cdot m_\infty}.$$

Выражения используемых при этом преобразований и доказательства сходимости вышеуказанных последовательностей в работе не приводятся. Автор приводит ряд примеров, в том числе задачу о вычислении взаимоиндуктивности двух коаксиально расположенных соленоидов, на которых показывает преимущества данного метода, указывая на возможность программирования на машинах.

В. М. Беляков

6316. О равномерном распределении псевдослучайных чисел. Франклин (On the equidistribution of pseudo-random numbers. Franklin J. N.), Quart. Appl. Math., 1958, **16**, № 2, 183—188 (англ.)

Выбирают начальное число x_0 и множитель N. Каждое из этих чисел представляется в цифровом счетчике командой с фиксированным числом цифр, например с s цифрами. Произведение Nx_0 содержит $2s$ цифр, из которых s последних значащих цифр представляют x_1. Затем x_2 представляется последними s значащими цифрами произведения Nx_1 и т. д. В цифровом счетчике число x_0 рационально, а последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ периодическая. В настоящей статье рассматриваются последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, в которых x_0 иррационален. С помощью эргодической теоремы доказывается, что почти все такие последовательности являются равномерно распределенными. Рассматриваются последовательности вида

$$x_n = Nx_{n-1} + \Theta - [Nx_{n-1} + \Theta] \quad (n = 1, 2 \ldots),$$

где Θ фиксированное, $0 \leqslant \Theta < 1$, N — целое, > 1; $[a]$ — наибольшее целое, $\leqslant a$. Для $N = 1$ получаем классический случай, разобранный Вейлем (Weyl H., Math. Ann., 1916, **77**, 313).

Е. П. Ожигова

6317. Об интерполяции табличных величин. Вебер (Zur Interpolation von Tafelwerten. Weber Otto), Fluchtstab, 1958, **9**, № 3-4, 26—27 (нем.)

Погрешность линейной интерполяции сравнивается с погрешностью вычисления по формуле, полученной из интерполяционной формулы Ньютона как среднее арифметическое между вариантами ее для интерполирования „вперед" и „назад", причем предполагается, что можно пренебречь третьими разностями табличных величин.

А. Б. Штыкан

6318. Замечание об эмпирических границах для рекуррентного соотношения, при помощи которого получаются функции Бесселя. Ранделс, Ривс (Note on empirical bounds for generating Bessel functions. Randels James B., Reeves Roy F.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1958, **1**, № 5, 3—5 (англ.)

При пользовании формулой $J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$ для $n > x$ может возникнуть большая вычислительная ошибка, так как вычисления становятся неустойчивыми. С помощью машины ИБМ-650 автор осуществил способ, позволяющий избежать накопления ошибок.

Я. И. Алихашкин

6319. Применение запертого двоичного счетчика к задаче о случайных блужданиях по отрезку с поглощающей и задерживающей границами. Фейген, Лерер (Random walks with restraining barrier as applied to the biased binary counter. Fagen R. E., Lehrer T. A.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, **6**, № 1, 1—14 (англ.)

Выводятся простые асимптотические формулы для вычисления средней продолжительности работы запертого двоичного счетчика. Счетчик работает в режиме моделирования случайных блужданий по прямой частице, вышедшей из начальной точки и двигающейся шагами равной длины влево и вправо (с вероятностями p и q соответственно) до тех пор, пока частица не достигнет одной из граничных точек. Выведенные формулы применяются к задаче по расчету счетчика, который дает сигнал через микросекунду, когда вероятность p становится равной 0,7 вместо нормального значения 0,5, и который дает ложные сигналы в среднем реже, чем один раз в сутки (при этом предполагается, что генерация случайных цифр происходит со скоростью 10^6 цифр в 1 сек.). Авторы отмечают, что выведенные в работе формулы помогают при конструировании запертого двоичного счетчика.

В. Я. Евфанов

6320. Рассеивание электронов высоких энергий и распределение заряда в ядре. Ренье (Diffusion d'électrons de haute énergie et répartition de la charge électrique du noyau. Reignier Jean), Nucl. Phys., 1958, **7**, № 5, 526—551 (франц.; рез. англ.)

Отставание по фазе η_j парциальной волны j зависит от распределения заряда в ядре только через значение на границе ядра некоторой функции $\gamma_j(r)$. Обычно $\gamma_j(r)$ получают решением радиальных уравнений Дирака, что

представляет значительные вычислительные трудности, а связь с распределением зарядов остается скрытой. В этой работе $\gamma_1(r)$ автор подсчитывает непосредственно, не решая радиальных уравнений. Приводятся два метода расчета этой функции. Эти методы обеспечивают быструю сходимость и дают хорошие приближения $\gamma_1(r)$ после одной, двух итераций. М. Я. Мазеев

6321. Биномиальная бумага. Шиндовский, Шюрц (Das Binomialpapier. Schindowski E., Schürz O.), Fertigungstechnik, 1957, **7**, № 10, 465—469 (нем.)

На примерах из разных областей промышленности авторы показывают удобства использования биномиальной бумаги для анализа статистических данных. Например, возможность быстрого наглядного суждения о качестве поставляемых партий изделий, о значимости расхождения между результатами двух опытов, об изменениях в производственных процессах и т. д.

А. П. Хусу

6322. О корнях уравнения $Y_1(mx)[xJ_1(x) - BJ_0(x)] - J_1(mx)[xY_1(x) - BY_0(x)] = 0$. **Липов, Цвик** (On the roots of the equation: $Y_1(mx)[xJ_1(x) - BJ_0(x)] - J_1(mx)[xY_1(x) - BY_0(x)] = 0$. Lipow M., Zwick S. A.), J. Math. and Phys., 1956, **34**, № 4, 308—315 (англ.)

Помещена таблица корней указанного в заголовке уравнения для $m = 0{,}2;\ 0{,}4;\ 0{,}6;\ 0{,}8$ и для $B = 0{,}01;\ 0{,}05;\ 0{,}10;\ 0{,}20;\ 0{,}50;\ 1{,}0;\ 2{,}0;\ 5{,}0;\ 10;\ 50;\ 100$; причем $x < 25$. Далее указано, как можно вычислять корни высокого и низкого порядков, используя известные формулы для функций Бесселя. Я. И Алихашкин

6323. О численном преобразовании Фурье при помощи шаблонов Липсон-Биверса. Фелгетт (On numerical Fourier transformation, with special reference to Lipson-Beevers strips. Fellgett P.), J. Scient. Instrum., 1958, **35**, № 7, 257—258 (англ.)

На примерах экспериментально выяснилось, имеет ли место эффект Гиббса при восстановлении функции путем выполненного дважды численного преобразования Фурье. Последнее осуществлялось при помощи шаблонов Липсон-Биверса. В статье эти шаблоны не описаны, а сделаны ссылки на прежние публикации (Lipson H., Beevers C. A., Proc. Phys. Soc. (London), 1936, **48**, 477). Автор утверждает, что эффект Гиббса не наблюдается.

Ф. А. Шелковников и А. Б. Штыкан

6324 К. Прикладной анализ. Ланцош (Applied analysis. Lanczos Cornelius. Englewood Cliffs., N. J., Prentice-Hall, Inc., 1956, XX, 539 pp.) (англ.)

В книге имеется 7 глав. Каждая глава снабжена краткой исторической справкой. В конце каждой главы приведена литература.

В гл. I „Алгебраические уравнения" рассматриваются некоторые методы решения уравнений третьей, четвертой и высших степеней. Решение кубического уравнения сводится к преобразованию уравнения к новому уравнению, имеющему корни в интервале (0,1), и использованию полиномов Чебышева для понижения степени преобразованного уравнения на единицу. Приводится метод Ньютона решения уравнений с учетом как первой, так и второй производной, а также так называемый метод подвижной полоски. Для вычисления значения полинома в окрестности некоторой точки применяется схема Горнера—схема искусственных делений. При этом полином представляется в виде разложения в ряд Тейлора без непосредственного вычисления его производных. Излагается метод моментов для решения уравнений степени выше четвертой и дается удобная схема для вычисления моментов. С помощью моментов проводится оценка абсолютной величины наибольшего корня. Вводится в рассмотрение единичный круг для отделения близких комплексных корней и метод взаимных радиусов, играющий большую роль в вопросах устойчивости. Все изложенные приемы иллюстрируются числовыми примерами.

В гл. II „Матрицы и проблемы собственных значений" излагаются основные свойства матриц, дается геометрическая интерпретация собственных значений матрицы. Отмечается инвариантность матричных уравнений относительно ортогональных, а также произвольных линейных преобразований. Излагается метод исключения Гаусса для обращения матриц. Рассматриваются вопросы ортогонализации матриц, обращение треугольных, а также произвольных комплексных матриц, приведение матриц к треугольному виду, вопросы совместности линейных систем и др.

В гл. III рассматриваются линейные системы больших размеров, решение которых приводится не точным обращением матриц, а итерационными методами, что приводит к исследованию полиномиальных операций над матрицами. Здесь приводится ряд способов нахождения собственных значений, в частности так называемый p, q-алгорифм и спектроскопический метод. Особое внимание уделяется вопросу нахождения наименьшего собственного значения. Рассматривается определение методом возмущений комплексного собственного значения, исходя из достаточно хорошего первого приближения.

Гл. IV „Гармонический анализ" посвящена применению рядов Фурье. Здесь доказывается основная теорема о разложении функции в ряд Фурье. Рассматривается разложение в ряд только по синусам и по косинусам, дифференцирование рядов Фурье и т. п. Дается тригонометрическое представление дельта-функции с введением некоторых σ-множителей, сглаживающих явление Гиббса. Этот же прием значительно сглаживает колебания Гиббса и в применении к произвольным дифференцируемым рядам Фурье. Рассматривается интерполяция функций, заданных дискретно, как тригонометрическим рядом общего вида, так и рядом только по синусам или по косинусам. Изучается ошибка тригонометрической интерполяции. Рассматривается интерполяции экспоненциальными функциями и разыскание скрытых периодичностей. Подробно излагается ряд вопросов, связанных с преобразованием Лапласа и его обращением.

В гл. V рассматриваются вопросы приближения произвольных функций, заданных в дискретной последовательности точек. Приводится интерполяционная формула Ньютона-Грегори, использующая простые разности, а также формулы Стирлинга и Бесселя, использующие, центральные разности. Рассматриваются два способа сглаживания функций сглаживания в малом, когда привлекаются только соседние точки, и сглаживание в большом усечением рядов Фурье в разумно выбранном месте. Описывается метод, преобразующий ряды Фурье в ряды более быстрой сходимости. Рассматривается интерпояции ортогональными полиномами.

В гл. VI изучаются вопросы численного интегрирования функций. Приводятся формулы Симпсона и трапеций, исследуется точность этих формул. Рассматривается также метод Гаусса. Дается незначительная модификация этого метода, делающая его более удобным для практического применения. Эта модификация состоит в исключении иррациональных абсцисс путем замены их округленными значениями. Идеи метода Гаусса переносятся также на случай, когда функция и ее производные до некоторого порядка заданы на концах интервала. Полученная при этом формула может быть использована для решения предельных задач и проблем собственных значений, связанных с обыкновенными дифференциальными уравнениями. Имеются числовые примеры.

В гл. VII рассматриваются вопросы приближения функций полиномами, причем имеются в виду разложения

быстро сходящиеся и с небольшим числом членов. Это осуществляется путем некоторой перегруппировки членов ряда с помощью полиномов Чебышева. Другой метод (τ-метод) использует дифференциальное уравнение, коэффициенты которого являются рациональными функциями независимой переменной. Решение такого уравнения ищется в виде конечного степенного разложения с равномерно распределенной ошибкой. Для определения коэффициентов получаются некоторые рекуррентные соотношения. В этом случае существенную роль играют также полиномы Чебышева. По сравнению с рядами Тейлора ошибка таких представлений оказывается значительно меньшей.

В приложении приведен ряд численных таблиц, в частности таблицы коэффициентов некоторых ортогональных полиномов. Г. И. Бирюк

См. также: 5438, 5600, 5602, 5921, 6087

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

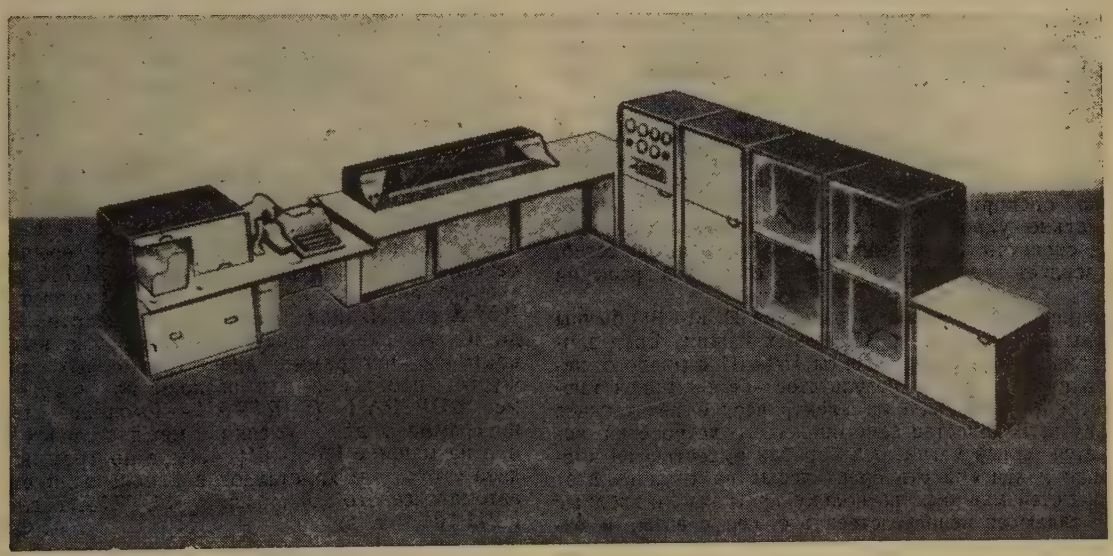
6325. Вычислительная машина ТРАНЗАК-S-2000 фирмы «Филко» (Philco TRANSAC-S-2000), J. Mach. Account., 1958, **9**, № 3, 20—21 (англ.)

Фирма «Филко» (Philco Corp.) выпустила высокоскоростную электронную вычислительную машину ТРАНЗАК-*S*-2000 (TRANSAC-S-2000) (см. фото), предназначенную как для коммерческих, так и для научных целей. ТРАНЗАК-S-2000—двоичная, параллельная машина, работающая с фиксированной запятой. Режим работы асинхронный, каждая операция начинается непосредственно после окончания предыдущей.

Максимальное время сложения 6,3 мксек, не считая времени выборки из памяти, среднее время сложения барабане емкостью 32 768 чисел и временем выборки 17 мсек.

Внешнее запоминающее устройство на магнитной ленте по своим данным превосходит устройства, известные в настоящее время. Скорость протяжки ленты при записи и чтении 381 *см/сек*, скорость перемотки 762 *см/сек*. Плотность записи на ленту 24 буквы на 1 *мм*. Общая емкость катушки длиной 1100 *м* составляет 21 500 000 букв или 129 000 000 двоичных цифр.

Всего к машине может быть подключено 256 таких устройств, причем возможна одновременная работа нескольких устройств чтения с магнитной ленты с арифметическим устройством.



1 мксек, для умножения и деления в среднем требуется 28 мксек, а максимальное время 245 мксек. Высокая скорость работы обеспечивается специальным построением логической схемы машины и применением высокочастотных поверхностно-барьерных полупроводниковых триодов.

Машина имеет 16 индексных регистров, облегчающих программирование и используемых для модификации адреса, накопления, пересчета и т. д. Оперативное запоминающее устройство выполнено на магнитных сердечниках, имеет емкость 4096 чисел, но может быть увеличено введением дополнительных блоков до 65535 чисел. Время обращения к запоминающему устройству 13 мксек. Имеется также запоминающее устройство на магнитном

Входные и выходные устройства машины работают независимо от арифметического устройства, возможно одновременное чтение перфокарт на магнитную ленту со скоростью 200 карт в 1 мин., и пробивание перфокарт с магнитной ленты со скоростью 100 карт в 1 мин. Высокоскоростное печатающее устройство в 1 мин. печатает 900 строк по 120 букв в строке.

Машина имеет относительно небольшой размер, требует для установки площадь 95,5 $м^2$ и потребляет мощность 7—10 *квт*.

Стоимость подготовки помещения для установки системы около 10 000 долл. Машина предназначена как для продажи, так и для сдачи в аренду. Срок изготовления машины 18 месяцев. О. В. Бачин

6326. **Вычислительная машина на полупроводниковых триодах** (Transistorized computer), Instrum. and Automat., 1957, **30**, № 5, 928 (англ.)

Сообщается о вычислительной машине S-1000 Транзак (S-1000 Transac) фирмы „Филко" (Philco Corp.).

6327. **Малогабаритные вычислительные машины. Семков Б. Ф.**, Вестн. АН УССР, 1958, № 1, 60—64

Дается краткая техническая характеристика быстродействующих математических цифровых машин М-2 и М-3, разработанных в лаборатории управляющих машин и систем АН СССР. Машина М-2 работает уже более 3 лет. На ней решено много разнообразных задач. Опыт эксплуатации показывает, что М-2 может использоваться в большинстве научно-исследовательских учреждений и вузов.

Машина М-3 построена Научно-исследовательским институтом электропромышленности в 1956 г. Она занимает площадь 3 $м^2$ и содержит 770 ламп и около 4000 диодов. При работе с магнитным барабаном скорость работы составляет около 45 двухадресных операций в 1 сек. При подключении более совершенных видов памяти скорость работы может быть увеличена в 50 раз, так как арифметический узел машины имеет большой запас по скорости выполнения операций. Так как машина построена по автономному принципу, то модернизация любого из узлов не ведет к переделкам в других. Годичный опыт эксплуатации М-3 показал, что она весьма удобна для отраслевых научно-исследовательских институтов. Постройка машин М-3 посильна многим научно-исследовательским учреждениям и вузам.

Б. Н. Малиновский

6328. **Новая модель в классе малых вычислительных машин** (New entry in small computer field), Engng News-Rec., 1957, **159**, № 20, 75 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой ИБМ новой машины модели 610—малой электронной цифровой вычислительной машины с „автоматической запятой", т. е. с автоматическим учетом порядков обрабатываемых чисел. Машина оперирует с десятичными числами и имеет максимально упрощенную систему программирования. Низкая скорость вычислений имеет то преимущество, что позволяет оператору вмешиваться в ход решения задачи.

Принципы построения и управления ИБМ-610 обычны для малых универсальных цифровых машин. Ввод данных производится с перфоленты И/ИЛИ с ручного наборного пульта. Вывод результатов—на цифропечатающее устройство И/ИЛИ на электрическое печатающее устройство. В качестве запоминающего устройства используется малый магнитный барабан емкостью 84 числа. Такая малая емкость практически не ограничивает возможностей машины, поскольку программа и входные данные задаются непосредственно с перфоленты, и барабан используется в основном только как внутреннее оперативное запоминающее устройство.

Сообщается, что стоимость новой машины составляет 55 000 долл., месячная арендная плата—1 150 долл.

А. А. Крупский

6329. **Фирма «ИБМ» на всемирной выставке в Брюсселе** (IBM auf der Weltausstellung in Brüssel), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 3, 191—192 (нем.)

В павильоне США фирмой «ИБМ» был показан ряд образцов выпускаемых ею вычислительных машин. В отделе счетно-аналитических машин были выставлены перфоратор ИБМ-26, электронная сортирующая ИБМ-83 и быстродействующий табулятор ИБМ-421. В отделе электронных машин средней величины действующая машина ИБМ-650 решала типичные технические задачи. Демонстрировались специальные запоминающие устройства емкостью до 5 млн. знаков на магнитных лентах и емкостью до 6 млн. знаков на магнитных пластинках. Из крупных машин были выставлены модели машин серии ИБМ-700.

Впервые для широкого обозрения были выставлены малогабаритные машины: электронный вычислитель ИБМ-610, имеющий автоматический контроль вычислений, и фактурная электронная машина ИБМ-632, характерная комбинацией вычислительных и печатающих устройств.

А. Ф. Смирнов

6330. **Электронные вычислительные устройства и их применение в измерительной технике. Халлер** (Elektronische Rechenanlagen und ihre Anwendungen im Vermessungswesen. Haller Jakob), Schweiz. Z. Vermessung, 1958, **56**, № 4, 98—107 (нем.)

Отмечается быстрое внедрение вычислительных машин в науку и технику благодаря их точности, быстродействию и надежности работы при выполнении многочисленных расчетов. Описываются основные этапы решения технических задач на электронных вычислительных машинах: математическая формулировка технической или физической проблемы, выбор численного метода решения, составление блок-схемы вычислений, детальная разработка и отладка программы, проведение всего комплекса вычислений, интерпретация и оценка результатов.

Особого внимания заслуживает введение на всех машинах, выпускаемых фирмой «ИБМ», начиная с модели 650 и кончая строящейся машиной СТРЕТЧ (STRETCH) на 800 000 умножений, системы автоматического программирования ФОРТРАН (FORTRAN— formular translating). Образец небольшой программы, составленной по этой системе, приводится в конце статьи. В заключение перечисляется большое количество (около 60) отдельных возможных областей применения вычислительной техники.

А. Ф. Смирнов

6331. **Конференция по использованию вычислительных машин для структурного анализа кристаллов. Банд** (Conference on the use of the IBM 704 computer for crystalstructure analysis. Vand V.), Acta crystallogr., 1958, **11**, № 4, 311—314 (англ.)

Обзор докладов, заслушанных на конференции по применению вычислительной машины ИБМ-704 для структурного анализа кристаллов, состоявшейся в ноябре 1957 г. при Национальном бюро стандартов США. Среди докладов были следующие: программа вычерчивания контуров; программа для трехмерных разложений Фурье; программа для разложения Фурье в системе ФОРТРАН (FORTRAN — formular translating); программа для оценки междуатомных расстояний на машине ИБМ-704; четыре программы для анализа структуры кристаллов с использованием системы автоматического кодирования ФОРТРАН для машины ИБМ-704 и т. д.

А. Ф. Смирнов

6332. **Принципы действия электронной вычислительной машины ИБМ-650. Мальдаг** (Principes de fonctionnement de l'ordinateur électronique IBM, type 650. Maldague R.), Bull. Soc. Belge photogramm., 1958, № 51, 9—22 (франц.)

6333. **Электронное вычислительное устройство фирмы «Буль» ГАММА-ЕТ** (Elektronische Rechenanlage von BULL GAMMA-ET.—ORDONNATEUR), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 2, 125—126 (нем.)

Сообщение о выпуске французской компанией «Буль» новой вычислительной машины, обладающей магнитным барабаном на 196 608 десятичных разрядов.

Н. П. Жидков

6334. **Программирование для вычислительной машины с магнитным барабаном ГАММА-ЕТ** (Programmierung des BULL-Magnettrommelrechners Gamma-ET), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 3, 193—194 (нем.)

Разработанная на основе серийной машины ГАММА новая модификация этой машины отличается применением магнитного барабана в качестве запоминающего устройства большой емкости. Это позволяет решать производственные задачи, характерные обилием данных. Состав команд не изменился, и весь опыт программирования может быть использован на новой модели. Новым в устройстве управления является возможность пересчета команд, что облегчает выполнение итерационных процессов. Для отладки программы введена команда под названием «Работа по этапам». По этой команде промежуточные результаты печатаются и поступают в распоряжение программиста, сверяющего их с контрольными данными непосредственно на своем рабочем месте. Большое внимание уделяется подпрограммам.

На машине уже осуществлены методы автопрограммирования путем введения целого ряда новых команд, формирующих программу. Кроме автопрограмм, имеется ряд специальных программ для вычисления матриц, в частности для обращения матрицы. На машине широко используется так называемая программа с символическими адресами. Программист пишет вместо цифровых адресов их буквенные символы. Машина сама распределяет адреса чисел. Это облегчает составление программы и уменьшает количество ошибок. Все эти новшества дают возможность пользоваться машиной более широкому кругу неспециалистов. А. Ф. Смирнов

6335. Электронные и магнитные схемы машины ЕРМЕТХ. Шай (Die elektronischen und magnetischen Schaltungen der ERMETH. Schai A.), Scientia electr., 1957, **3**, № 4, 127—140 (нем.; рез. англ., (франц.)

Описывается машина ЕРМЕТХ (ERMETH), созданная в Швейцарском технологическом институте под руководством проф. Штифеля (E. Stiefel). ЕРМЕТХ—цифровая вычислительная машина на элементах с повышенной надежностью. Устройством хранения информации служит магнитный барабан. Это определило частоту синхронизирующих импульсов в 32 *кгц*. Количество ламп в машине 1900, диодов 7000, «1» представлена напряжением—7 *в*, «0»—напряжением—29 *в*. Такой перепад достаточен, чтобы полностью открыть или полностью закрыть лампу. Логическая часть машины построена в основном на трех схемах: отрицания, логического сложения (ИЛИ—ИЛИ) и логического умножения (И—И). Показано, что с помощью названных схем можно выполнять все остальные логические функции, необходимые для вычислений. Приведены принципиальные схемы инвертора, триггера, катодного повторителя, входных и выходных цепей. Из схем магнитного устройства описаны усилители записи и чтения, схема выборки магнитных головок и питающий ее формирователь.

А. Ф. Смирнов

6336. Некоторые особенности дрезденской автоматической вычислительной машины Д-1. Бахман (Einige Besonderheiten des dresdener Rechenautomaten D1. Bachmann Karl-Heinz), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 90—91, Diskuss. 91221 (нем.; рез. англ.)

Дается сжатое изложение основных принципов устройства вычислительной машины Д-1, с памятью на магнитном барабане, построенной в Институте прикладной математики Дрезденской высшей технической школы. При построении машины преследовалась цель достичь наибольшей скорости без значительного усложнения схемы. Основные исходные данные были таковы: а) скорость машины — 100 операций в 1 сек.; б) количество ламп при заданной емкости запоминающего устройства должно быть в пределах 700; в) обслуживание машины должно быть возможно более простым. Составление программ облегчается благодаря 3-индексным регистрам, используемым в качестве оперативного запоминающего устройства; наличию команд для повторения операции; устройству для перевода двоичных чисел в десятичные и маркировке некоторых чисел и приказ в. Тип кода для приказов выбирается с учетом наилучшего согласования его с формулой для вычислений, подлежащей программированию. Приводится дискуссия по некоторым из затронутых вопросов.

Г. К. Москатов

6337. Сообщение об окончании постройки вычислительной машины G-2. Эльман (Bericht über Fertigstellung der G2. Öhlmann Hermann), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 97—98, 225 (нем.; рез. англ.)

Кратко охарактеризованы основные дополнительные устройства, внесенные после окончания постройки машины. Расширены возможности изменения адресов при направлении программы в устройства памяти, имеется несколько критериев для принятия возможных решений, предусмотрена возможность выделения некоторых чисел и пр. Т. А. Шмаонов

6338. Дальнейшее развитие командного кода G-2. Пизула (Die Weiterentwicklung des Befehlscodes der G2. Pisula Karl), Nachrichtentechn., Fachber., 1956, **4**, 165—167, 225 (нем.; рез. англ.)

Изложены практические способы упрощения командного кода с целью облегчения его использования и сокращения времени программирования. Показано, что изменения привели к уменьшению числа ошибок во вводимой в машину программе. Т. А. Шмаонов

6339. Расширение коммутационной техники на машине Z-5, проведенное на основе опыта эксплуатации. Уль (Erweiterte Schalttechnik an der Z5 auf Grund der Erfahrung. Uhl Wolfgang), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 101, 226 (нем.; рез. англ.)

Кратко охарактеризована модернизация машины Цузе-5 (*Z*-5) с целью приспособления ее к решению специфических задач для оптических расчетов на заводе фирмы «Лейтц» в Ветцларе. Например, путем добавления новых реле и использования контактных групп некоторых старых смонтированы цепи ряда новых операций, позволившие уменьшить время расчета хода лучей в оптической системе в среднем на 10%.

Т. А. Шмаонов

6340. «Лепрехаун» («Leprechaun»), Bell Labs. Rec., 1957, **35**, № 7, 272—273 (англ.)

См. РЖМат, 1958, 9289—9293.

6341. Малый электронный мозг (Small electronic brain), Mech. Engng, 1957, **79**, № 7, 660—661 англ.)

См. РЖМат, 1958, 9289—9293; реф. 6340.

6342. «Лепрехаун» — новое достижение в вычислительной технике. Штукки-Кирххофер (Der Leprechaun — eine Neuentwicklung im Rechen-Automatenbau. Stucki-Kirchhofer F.), Techn. Rundschau, 1958, **50**, № 15, 13 (нем.)

6343. Триггеры на поверхностно-барьерных кристаллических триодах для электронных цифровых машин. Рапп, Ван (Transistor flip-flops for digital computers. Rapp A. K., Wong S. Y.), Electronics Buyers' Guide Issue, 1957, **30**, № 6C, R24—R25 (англ.)

Описываются триггеры на кристаллических поверхностно-барьерных триодах, собранные по следующим трем основным схемам: а) с непосредственной связью базы каждого из триодов триггера с коллектором другого триода, б) с резистивными коллекторно-базовыми связями и в) с коллекторно-базовыми связями через эмиттерные повторители.

Обсуждается время задержки и время перехода из одного состояния в другое для этих трех схем, а

также влияние нагрузки на указанные характеристики. Отмечается, что время перехода из одного состояния в другое у схемы с непосредственными связями на 18% больше, чем у схемы с резистивными связями, и на 70% больше, чем у схемы со связями через эмиттерные повторители. Схема со связями через эмиттерные повторители обладает независимостью от нагрузки в широких пределах и имеет очень малое время перехода (около 22 миллимикросекунды). Г. Г. Рабинович

6344. Новый элемент с двумя устойчивыми состояниями для использования в цифровых вычислительных машинах (Часть I). Флорида (A new bistable element suitable for use in digital computers. (Part 1). Florida C. D.), Electron. Engng, 1958, **30**, № 360, 71—77 (англ.)

На основании определенных технических условий изложена разработка триггерной схемы на

Технические условия:

Время переключения	<0,2мксек
Время спада выходного напряжения при нагрузке на 5 подобных схем	<0,2мксек
Время нарастания выходного напряжения при нагрузке на 5 схем	<0,5мксек
Выходной ток	>30 *ма*
Выходное сопротивление	<20 *ом*
Разрешающая способность	<1,5 мксек

полупроводниковых триодах типа *p-n-p* и *n-p-n*. Схема имеет малое время переключения, но характерна прежде всего большими переключаемыми токами и, следовательно, способностью питать несколько подобных схем. В двух математических приложениях дан подробный анализ переходных процессов включения-выключения при подаче на вход отрицательного фронта напряжения. В выбранной методике процессы разбиваются на ряд участков. Расчетные и экспериментальные данные совпали с точностью 10%. При расчете учитывались определенные параметры схемы и нагрузка триггера на 5 таких же схем.

Рис. 1

Исходная цепь для построения триггера, указанная на рис. 1, в процессе разработки приобретает вид рис. 2. В этой схеме диоды D_1 и D_3 служат для стабилизации напряжений на коллекторах, а диод D_7—уровня выходного напряжения. Для ограничения насыщения триодов

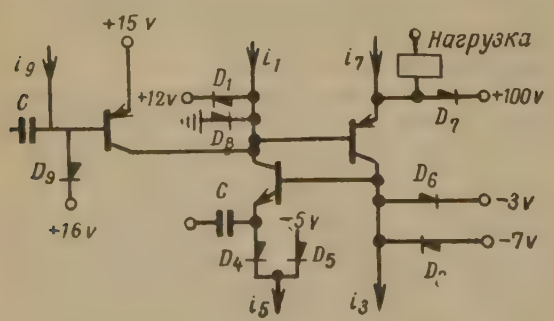


Рис. 2

поставлены диоды D_8 и D_6. Включение триггера производится через емкость на эмиттер триода *n-p-n*. Диоды D_4 и D_5 стабилизируют потенциал на эмиттере. Выключение производится через дополнительный триод типа *p-n-p*. По мере открытия этого триода перестает проводить диод D_8 и открывается диод D_1, тем самым резко закрывая выходной триод. Диод перестает проводить и база триода *n-p-n* оказывается под растущим отрицательным потенциалом, что приводит к быстрому закрытию триода *n-p-n*. А. Ф. Смирнов

6345. Новый элемент с двумя устойчивыми состояниями для использования в цифровых вычислительных машинах. Часть 2. Флорида (A new bistable element suitable for use in digital computers. Part 2. Florida C. D.), Electronic Engng, 1958, **30**, № 361, 148—153 (англ.)

Продолжение анализа новой схемы триггера (ч. 1 см. реф. 6344). Рассматривается процесс выключения. Приводится полная практическая схема. Исходные данные: граничная частота триодов 8 *мгц*, емкость база—коллектор 10 *пф*, фронт входного напряжения 10 *в* в 0,2мксек, входной конденсатор 100 *пф*, выходной конденсатор (нагрузка) 500 *пф*.

Расхождение расчета с экспериментом объясняется неполным соответствием формул реальным элементам и неучтенными обратными токами диодов. Диаграммы расчетных и экспериментально полученных токов совмещены для сравнения. А. Ф. Смирнов

6346. Арифметическое устройство современной вычислительной машины. Гецке (Das Rechenwerk eines modernen programmgesteuerten Rechenautomaten. Götzke Horst), Wiss. und Fortschr., 1957, **7**, № 10, 357—360 (нем.)

Изложены основные правила двоичной арифметики. Введены условные обозначения элементов для выполнения различных функций: схемы с запретом, схемы совпадения, задержки, комбинированной схемы несоответствия. Составлены логические схемы сумматоров параллельного и последовательного типа на указанных элементах (без триггеров). Для каждого из двух типов сумматора рассмотрены три возможных случая сложения, иллюстрирующие получение импульсов суммы и переноса в данном разряде и роль импульса переноса в образовании суммы и переноса в следующем разряде сумматора. А. Ф. Смирнов

6347. О проверке сумматора. Питерсон (On checking an adder. Peterson W. W.), IBM J. Res. and Developm., 1958, **2**, №2, 166—168 (англ.)

Изложены предварительные соображения по проверке работы сумматора вычислительной машины с помощью независимого контрольного устройства. Складываемым числам соответствуют символы, которые, в частности, могут быть образованы из некоторой части или остатка числа. В контрольном устройстве над этими символами производится операция проверки, например, сложение по выбранному модулю b. Выведено условие изменения символа-кода в случае переполнения сумматора. В заключение даются некоторые рекомендации по выбору метода проверки. А. Ф. Смирнов

6348. Десятичный накапливающий сумматор произведений. Хор (A decimal product accumulator. Hoge Robert R.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1958, **18**, № 2, 125—132. Discuss., 133 (англ.)

Автокорреляционная функция

$$\varphi_{11}(\tau) = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_1(t) f_1(t+\tau)\, dt,$$

где $f_1(t)$ — вообще апериодическая функция времени t,

может быть представлена в виде суммы произведений двузначных чисел p_i и q_i:

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i q_i.$$

Вычисление последней, ее оценки и корреляционного коэффициента момента произведения

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \bar{p}\,\bar{q}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - (\bar{p})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i^2 - (\bar{q})^2}}$$

сводится к вычислению сумм следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i, \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \text{ и } \sum_{i=1}^{n} p_i. \qquad (1)$$

В статье описывается специально изготовленная настольная вычислительная машина, оперирующая в десятичной системе чисел, предназначенная для быстрого вычисления сумм (1), в которых p_i и q_i — двузначные числа, заключенные между 00 и 99 включительно, и приводятся способы вычисления этих сумм.

Данные для вычисления вводятся в вычислительную машину одновременно на двух перфорированных пятидорожечных лентах. Каждая цифра представляется комбинацией двух отверстий из пяти.

В декодирующем устройстве данные считываются с перфоленты с помощью фотоэлектрических устройств и с помощью импульсного генератора и селекторных декатронов, соответствующие цифрам импульсы направляются в регистр множимого и регистр множителя. Из последних импульсы направляются в шестизначный накапливающий сумматор, где происходит суммирование произведений. Регистр множимого, регистр множителя и накапливающий сумматор также состоят из систем декатронов.

Для увеличения скорости вычисления произведение каждой пары чисел производится в асинхронном режиме. Машина накапливает 100 произведений в 1 мин.

И. А. Ковалев

6349. Запоминающее устройство на ферритовых платах с управлением на полупроводниковых триодах. Ньюхаус, Корнфилд, Кауфман (A transistorized ferrite plate memory. Newhouse V. L., Kornfield N. R., Kaufman M. M.), Proc. Nat. Electronics Conf. Vol. 13. Chicago, Nat. Electronics Conf., Inc., 1958, 641—652 (англ.)

В лаборатории фирмы RCA (Радио Корпорэйшн оф Америка) разработано новое запоминающее устройство на ферритовых платах.

Ферритовая плата (рис. 1), имеющая 256 отверстий, прессуется и обрабатывается теми же методами, которые применяются при изготовлении ферритовых сердечников. Размер платы 21×21 *мм*, диаметр каждого отверстия 0,635 *мм*, расстояние между центрами отверстий 1,27 *мм*. Стенки отверстий, а также верхняя и нижняя поверхности платы, за исключением выдающихся гребешков, металлизируются (рис. 2). Металлическое покрытие образует эквивалент обмотки, пронизывающей последовательно все отверстия платы, а также придает плате прочность.

Характеристика изменения магнитного потока вокруг отверстия в плате в зависимости от приложенной магнитодвижущей силы имеет линейный характер, начиная от 0,175 ампервитков. Магнитодвижущая сила меньше, чем 0,175 ампервитка, не вызывает существенного изменения магнитного потока. Однако величина магнитодвижущей силы не может быть выбрана более 0,5 ампервитка во избежание влияния тока в одном отверстии на состояние материала вокруг другого отверстия.

Следует отметить, что в отличие от переключения потока в сердечниках, время переключения потока вокруг отверстия перестает уменьшаться с ростом магнитодвижущей силы после величины 0,25 ампервитка и становится равным 1,7 мксек.

К реф. 6349

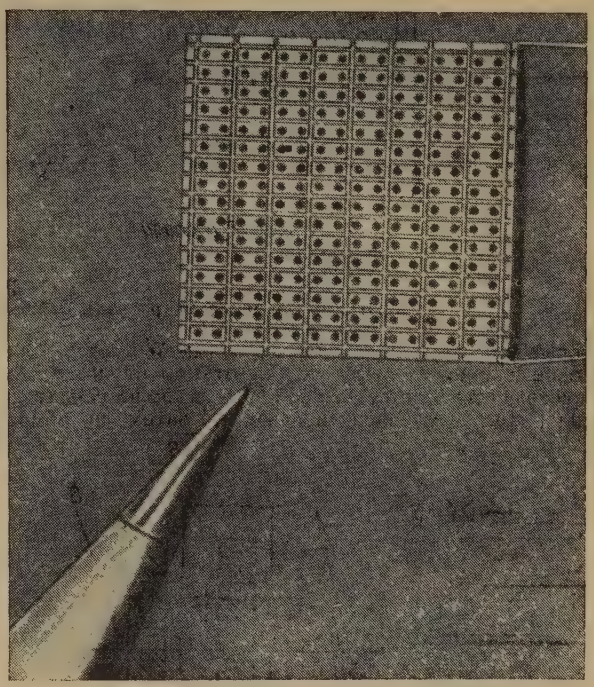


Рис. 1

Существенным недостатком ферритовых плат является недостаточно высокая однородность материала, что затрудняет использование варианта запоминающего устройства на совпадающих токах, особенно в устройствах большого объема.

В разработанном запоминающем устройстве был применен метод прямого выбора информации с выполнением магнитного дешифратора на таких же точно ферритовых платах. Для уменьшения требований к ферритовой плате был принят вариант использования 2 плат для запоминания каждого разряда, что позволило также применить распознавание информаций по полярности сигнала, а не по амплитуде.

Через каждое отверстие запоминающей платы проходит всего 2 обмотки: обмотка выборки от магнитного дешифратора, пронизывающая все разряды числа, и обмотка записи, которая также является обмоткой чтения, и выполняется металлизацией платы. Обмотки чтения — записи 2 плат, образующих разряд, соединяются последовательно так, что направление обмоток в отверстиях на одном проводе выборки противоположно. В то время, когда по проводу выборки подается импульс тока считывания, в пространствах вокруг отверстий, через

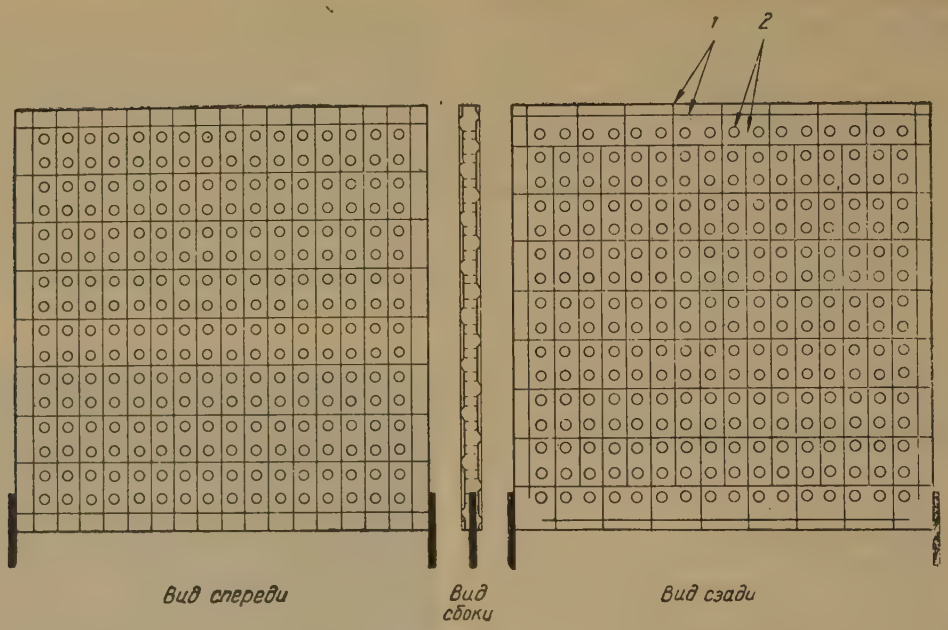


Рис. 2

1. Непокрытые металлом гребешки. 2. Металлическое покрытие, включая стенки отверстий

которые проходит этот провод, устанавливается одинаковое направление потока. В этот момент импульсы напряжения по обмотке чтения поступают на усилители чтения. Импульс записи, подаваемый затем по обмот-

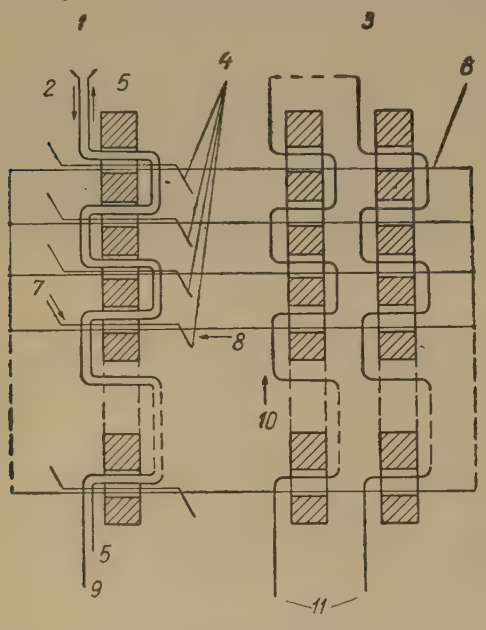


Рис. 3

Плата дишифратора. 2. Ток смещения. 3. Разрядные платы. 4. Обмотки столбцов. 5. Ток ряда. 6. Обмотка выборки. 7. Ток столбца. 8. Ток выборки. 9. Обмотка смешения. 10. Разрядный ток записи. 11 Обмотка чтения-записи.

ке записи, противоположен по полярности импульсу считывания, однако по величине недостаточен для изменения направления потока вокруг отверстий. В этот же момент по обмотке чтения-записи подается импульс тока, который складывается с током записи в отверстии одной платы разряда и вычитается в другой. В зависимости от полярности этого импульса в одной плате устанавливается состояние «0», а в другой «1». Но так как обмотка чтения-записи пронизывает платы в разных направлениях, а усилитель чтения реагирует лишь на одну полярность, то тем самым достигается запись нужной информации в разряде.

Магнитный дешифратор набирается из плат по одной плате на разряд и имеет 16 обмоток рядов, 16 обмоток столбцов и одну обмотку смещения, пронизывающую все отверстия дешифратора, по которой подается постоянный ток 350 *ма*. Работа такого магнитного дешифратора широко известна.

Генератор тока ряда или столбца включен в коллекторную цепь 16 полупроводниковых триодов типа 2 N 140 В базу одного из них, выбираемого диодным дешифратором, подавался импульс тока, приводящий триод в насыщенное состояние. В коллекторную цепь этого триода при этом подавался импульс тока амплитудой 50 *ма* длительностью 5 мксек и фронтами 1 мксек. Через трансформатор с отношением витков 10 : 1 ток 500 *ма* подавался в обмотку ряда или столбца дешифратора. Использование полупроводниковых триодов в состоянии насыщения в качестве переключателей позволило снизить потребляемую мощность устройства и сохранить малую длительность фронтов импульса тока.

Использование различения информации по полярности, а не по амплитуде позволило в усилителе считывания отказаться от амплитудного дискриминатора на входе. Благодаря этому усилитель чтения выполнен по схеме с потенциальными связями, чем достигается отсутствие забивания усилителя паразитным сигналом при записи, который может достигать 1 *в*, в то время как амплитуда полезного сигнала не превышает 20 *мв*. Во время такта записи первый каскад усилителя запирается во избежание насыщения триода.

Генератор тока записи разряда построен по пушпульной схеме и дает ток записи порядка 100 *ма*. В случае, когда ток постоянного смещения и токи ряда и столбца дешифратора выбирались равными 1 *а*, ток записи разряда мог меняться от 25 *ма* до 150 *ма*, однако

выходной импульс при токе записи разряда 25 *ма* уменьшался до 10 *ма*.

Цикл обращения к памяти складывается из 2 мксек, требуемых для выбора адреса, 1 мксек переднего фронта импульсов тока дешифратора, 2 мксек длительности изменения потока вокруг сердечника, 2 мксек требуемых петлей регенерации, 1 мксек задержки на генераторах разрядного тока записи и 2 мксек изменения потока при записи и равен 10 мксек. Однако запись и выбор нового адреса могут проходить одновременно, что сокращает цикл до 8 мксек.

К реф. 6349

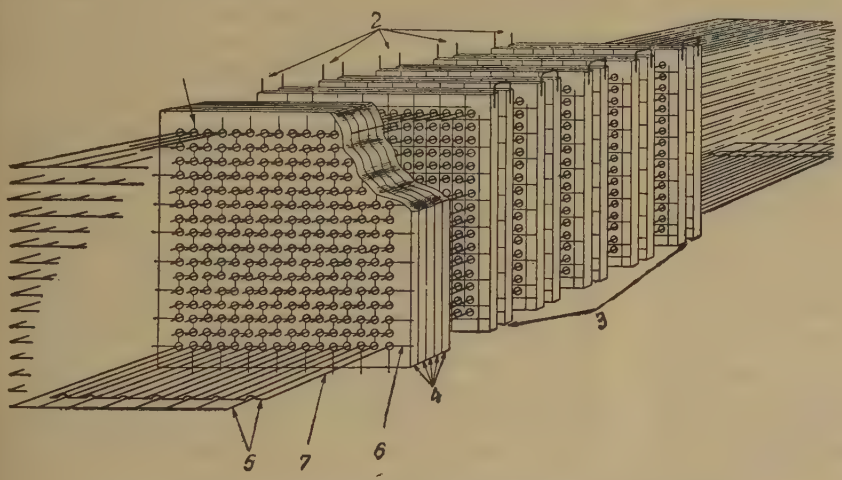


Рис. 4. 1.Вход переключателя столбца. 2. Чтение и запись разряда. 3. Пары запоминающих плат. 4. Дешифратор. 5. Общая шина проводов выборки. 6. Вход переключателя ряда. 7. Провода выборки.

Работа описанного запоминающего устройства показала что метод, использующий 2 платы на разряд, позволил получить память, имеющую широкие допуски на переключающие и записывающие токи. При этом не возникало проблемы регенерации, задержек, межобмоточных емкостей, что также объяснялось компактностью запоминающего устройства. В некоторых отношениях система «подожженного конца» (fire-end, по терминологии авторов) превосходит систему совпадающих токов, например по соотношению сигнал-помеха. Следует отметить, что система прямой выборки широко применяется и в запоминающих устройствах на магнитных сердечниках.

В заключение авторы утверждают, что при помощи ферритовых плат можно снизить размеры и стоимость запоминающих устройств на миллионы чисел, а описанная система построения запоминающего устройства позволит разрешить практические проблемы, связанные с построением памяти такого объема. О. В. Бачин

6350. Опыт использования радиоламп и других деталей в немецких электронных вычислительных машинах. Штольце (Bisherige Erfahrungen mit Röhren und anderen Bauelementen, welche in elektronischen Rechenmaschinen deutscher Fabrikation verwendet wurden. Stolze Fritz), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 132—133, 226. Diskuss., 133—134 (нем.; рез. англ.)

Сравниваются данные по надежности немецких и американских радиоламп. Несколько большая надежность американских ламп объясняется лучшим качеством производства. Через 1000 час. эксплуатации из строя вышли 0,13% сопротивлений и 0,1% конденсаторов.

Т. А. Шмаонов

6351. Специальные требования, предъявляемые к осциллографам, применяемым при разработке, испытании и эксплуатации электронных вычислительных машин. Клейн (Spezielle Forderungen an Oszillographen für die Entwicklung, Prüfung und Überwachung von elektronischen Rechenmaschinen. Klein Paul E.), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 135—138, 223. Diskuss., 138—140 (нем.; рез. англ.)

В работе собраны требования, предъявляемые к отдельным блокам осциллографов, сводящиеся в основном к следующему:

1. Трубка. Плоский экран диаметром 75—130 *мм*. Возможность наблюдения несимметричных напряжений при подаче их непосредственно на отклоняющие пластины (с исключением при этом трапецеидальных искажений).

2. Отклонение по оси *X*. Развертка пилообразная периодическая и ждущая со скоростью 1 *см/сек*—10^5 *см/сек*. Синхронизация импульсами положительной и отрицательной полярности, а также синусоидой.

3. Отклонение по оси *Y*. Полоса серийных осциллографов 10 *мгц*. В отдельных случаях до 100 *мгц*. Коэффициент усиления в первом случае до 1000.

4. Ось *Z* (модуляция луча). Требования обычные.

Отмечена необходимость хорошей магнитной экранировки всего прибора, так как вблизи некоторых вычислительных машин имеются большие поля рассеяния.

Т. А. Шмаонов

6352. Математический анализ взаимоотношения человека и машины. Ломичка, Олдридж (Mathematical man—machine analysis. Lomicka Roy F., Allderige John M.), J. Industr. Engng, 1957, **8**, № 3, 157—164 (англ.)

Выводятся формулы для подсчета времени простоя оператора и машины на примере фотопечатного устройства. Указывается, что применение выведенных формул позволило повысить производительность труда.

Н. Н. Поснов

6353. Моделирующее устройство «Джинн». Жирер, Риотт (Le calculateur analogique «Djinn». Girerd J., Riotte A.), Onde électrique, 1956, **36**, № 353-354, 780—786, 44 (франц.)

Рассматриваются технические характеристики и основные схемы моделирующего устройства «Джинн» модели 31 А, выпускаемой французской фирмой «Лаборатории Дерво» (Laboratoires R.Derveaux.)

В состав машины входят 80 операционных элементов (усилителей, функциональных устройств, множительных устройств и генераторов функций), конструктивно оформленных в стандартизованных выдвигающихся шасси с переходными разъемами штеккерного типа. Блоки объединены по секциям машины. Все внутри- и междублочные соединения на лицевой стороне блоков и на панели управления выполняются пружинными штеккерами.

30 операционных усилителей машины — 4-каскадные, с двойной компенсацией дрейфа и автоматической установкой нуля, собранные по схеме с прямыми гальваническими связями. Лампы двух первых каскадов (по симметричной схеме) поставлены в режим сильного недокала (4,5 *в* вместо номинальных 12 *в* — тип 12AX7), что снижает сеточный ток до 10^{-11} *а* и практически исключает влияние на предыдущие каскады. Автоматическая подстройка нуля на время каждого рабочего цикла (3—5 мин.) производится с помощью предвари-

тельного заряда конденсатора большой емкости и с высоким сопротивлением цепи разряда.

Общий коэффициент усиления усилителей составляет 500 000 при нагрузке 150 *ком* и 150 000 при полной нагрузке (10 *ком*), выходное напряжение в пределах линейной части характеристики от + 100 до — 100 *в* при мощности 1 *вт*. Благодаря высокому качеству монтажа и тщательной экранировке цепей, помехи и микрофонный эффект в усилителях практически исключаются. Уровень шумов на выходе не превышает 0,2 *мв*.

Прецизионные потенциометры и функциональные элементы машины «Джинн» располагаются на 3 отдельных панелях и снабжены шкалами и верньерными устройствами. Точность намотки потенциометров — 0,1 %, линейность — 0,5 %. Нелинейные потенциометры, используемые в качестве функциональных генераторов, сконструированы в виде поворотных цилиндров, на поверхности которых фотографическим способом нанесена проводящая кривая (движущийся контакт). Вращаясь, цилиндр касается своей образующей потенциометра с линейной намоткой. Нелинейные коэффициенты могут быть нанесены на цилиндр простым фотографированием их графиков в функции от некоторой переменной, без математического выражения.

Множительные устройства «Джинн» делятся на электромеханические (миниатюрный мотор типа Сплит с мощностью на валу 10 *вт*, тахогенератор и 5 линейных потенциометров) и электронные (диодные аппроксиматоры).

Условия решения той или иной задачи набираются на центральной панели. Благодаря высокой наглядности, ошибки в соединениях минимальны. Панели съемные (что позволяет во время решения одной задачи готовить к решению следующую на запасной панели). Имеются стандартные панели двух типов: 1) для решения систем линейных дифференциальных уравнений и 2) для моделирования ядерного реактора.

С помощью специальной приставки — «хроноскопа» типа СТ-1 результаты решения могут «запоминаться» на время, равное 1—2 циклам решения. Это обстоятельство используется для контроля: задача решается дважды, и результаты сравниваются на сравнивающем устройстве высокой точности, смонтированном в той же приставке. В машине используются номиналы — 250, — 100, + 100, + 250, + 400 *в* постоянного напряжения и 24 (для реле), 6,3 и 4,5 *в* (для накала) переменного напряжения.

Приводятся фото общего вида, панелей, блоков и устройств машины, а также основные рабочие схемы.

А. А. Крупский

6354. Получение тригонометрических функций в моделирующих устройствах при помощи множительных элементов. Хау, Гилберт (Trigonometric resolution in analog computers by means of multiplier elements. Howe R. M., Gilbert E. G.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 2, 86—92, 124—125 (англ.)

Метод состоит в решении уравнения

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + x = 0.$$

При начальных условиях $x(0) = 0$ и $\frac{dx}{d\theta}(0) = 1$ решением будет $x = \sin\theta$, $y = \cos\theta$. Однако, поскольку электронный дифференциальный анализатор может интегрировать только по времени, необходимо перед интегрированием умножать подынтегральное выражение на $d\theta/dt$. Тогда $\int z\left(\frac{d\theta}{dt}\right)dt = \int z\,d\theta$. Благодаря утечкам конденсаторов, динамической погрешности множительных устройств, дрейфу интеграторов и т. д., процесс решения будет затухать или расходиться так, что после нескольких периодов $x^2 + y^2 \neq 1$. Для устранения этого явления вычисляется $e = 1 - (x^2 + y^2)$ и в соответствующей фазе подается на входы интеграторов. Дан полный анализ статической и динамической погрешностей метода.

И. К. Волков

6355. Автоматическое определение траекторий электронов. Каэн (Le tracé automatique des trajectoires d'électrons. Cahen Olivier), Onde électr., 1957, **37**, № 369, 1098—1103 (франц.; рез. англ.)

Разработка и исследование электронных приборов требуют трудоемкого расчета многочисленных траекторий электронов. Для автоматического определения траекторий в Национальном исследовательском центре связи (Centre National d'Études des Télécommunications, Франция) разработано вычислительное устройство. Определение траектории делится на две части: 1) нахождение распределения электростатического потенциала в исследуемом приборе, 2) расчет траектории электрона. Распределение потенциала определяется посредством электролитической ванны, в которую погружен макет электронного прибора. Данные с зонда ванны передаются в специальное моделирующее устройство. При расчете учитываются поправки на пространственный заряд и магнитное поле, что позволяет сразу получить траекторию с достаточной точностью. Работа ведется на переменном токе 425 *гц*. Функции задаются нелинейными потенциометрами. Для передачи данных использованы сервосистемы с тахогенераторами. Вычислительное устройство может определять траектории в приборах, имеющих симметрию вращения; траектория приводится к меридиональной плоскости. Устройство изготовлено Обществом автоматики и электроники.

И. В. Лебедев

6356. Полуавтоматическая машина непрерывного действия для получения преобразования Фурье функции двух переменных. Азаров (Semiautomatic, two-dimensional Fourier analog computer. Azároff Leonid V.), Rev. Scient. Instrum., 1958, **29**, № 4, 317—318 (англ.)

Для получения преобразования Фурье функции двух переменных $p(x, y) = \sum_h \sum_k F_{hk} \cos 2\pi (hk + ky) =$

$$= \sum_h \left[\sum_k F_{hk} \cos 2\pi ky\right] \cos 2\pi hx - \sum_h \left[\sum_k F_{hk} \sin 2\pi ky\right] \sin 2\pi hx$$

используются две математические машины непрерывного действия, позволяющие получать преобразование Фурье функций одной переменной. На одной машине вычисляется выражение в первых квадратных скобках, на второй — во вторых квадратных скобках, затем осуществляется суммирование по h. Все результаты суммирований записываются на самописце, а также могут быть прочитаны по вольтметру. Коэффициенты F_{hk} устанавливаются вручную на каждой машине. Функции $\sin 2\pi nx$ и $\cos 2\pi nx$ получаются с поворотных трансформаторов. Основной вал имеет угловую скорость $2\pi x$, а для образования частот $2\pi nx$ применяются шестерни, передающие вращение на оси трансформаторов с передаточным отношением $n = 0, 1, 2, \ldots, 30$.

Точность машины ограничена точностью считывания результатов, составляющей 1% от максимальной величины, а также тем, что коэффициенты могут иметь только целые значения от 0 до 100. Время вычисления одной функции составляет 2—3 часа.

А. Н. Чуйкин

6357. Метод гидравлической аналогии для изучения протекания газа по трубопроводу при переменных условиях. Ренуар (Procédé d'analogie hydraulique pour l'étude de l'écoulement du gaz en régime variable dans une conduite. Renouard M. P.), Actes. Jour-

nées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles. 1956, 518—520. Duscuss., 520 (франц.; рез. англ.)

Процесс протекания газа по трубопроводу при переменных условиях описывается дифференциальными уравнениями в частных производных:

$$1)\ \partial P^2/\partial x = -A(Q^2/D^5),$$
$$2)\ \partial P/\partial t = -(B/D^2)(\partial Q/\partial x),$$

где P — абсолютное давление, Q — масса потока, D — диаметр, x — длина, t — время.

Для изучения изменения давления газа вдоль трубы при заданных изменениях масс потока на каждом ее конце создано моделирующее устройство, в котором газовая струя заменена протеканием воды по последовательно соединенным резервуарам. Каждый резервуар моделирует определенный участок трубопровода; уровень воды в резервуаре соответствует давлению газа. Резервуары соединяются флянцами с диафрагмами. Передняя и боковые стенки каждого резервуара сделаны плоскими, а задняя — профилирована по определенному закону. Н. Н. Михайлов

6358. Техника использования специализированных центров, оборудованных моделирующими устройствами. Дзиви (Techniques in employing specialized analog computing facilites. Zivi Samuel M.), Midwest Res. Inst. Publs (1956), № 185, 185—187 (англ.)

Указывается ряд преимуществ и возможностей, которые представляются в том случае, когда промышленные предприятия, не имеющие моделирующих устройств, обращаются за помощью в вычислительные центры. При этом с помощью электромоделирующих установок могут быть с успехом проведены исследования таких динамических систем, которые не имеют полного математического описания. В этих случаях с помощью электронной модели системы может быть поставлен статистический эксперимент с целью определения ранее неизвестных параметров или характеристик системы, обеспечивающих необходимые процессы. В постановке подобного эксперимента существенную помощь могут оказать специалисты-математики, обслуживающие электромоделирующие устройства. Сама по себе постановка исследования системы на электромоделирующей установке всегда вносит „свежую струю". В процессе исследований системы часто выявляются многие ранее непредвиденные трудности. Все это может быть получено в дополнение к требуемому решению заданных задач, их анализу и формулировке рекомендаций на будущее.

Далее подчеркивается, что важным достоинством электромоделирующих устройств является возможность проведения обширных вычислений, имеющих поисковый характер и направленных на определение оптимальных параметров системы. Это оказывается возможным благодаря исключительному быстродействию моделирующих устройств и наглядному представлению результатов решения.

В заключение рассматривается выгода использования электромоделирующих установок, работающих в истинном масштабе времени совместно с отдельными устройствами исследуемой системы. Г. М. Петров

6359. Элементы параметрической вычислительной машины. Херш, Холден (Computing techniques for the sampling parametric computer. Hirsch C. J., Hallden F. C.), IRE Trans. Electronic Comput., 1957, **6**, № 2, 108—119, 125 (англ.)

Описано новое электронное параметрическое моделирующее устройство, использующее экспоненциальный разряд конденсаторов для решения многочисленных задач. Узлы машины являются электрическими аналогами шкал и ползунка логарифмической линейки.

Приводятся конкретные примеры осуществления операций умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня, логарифмирования, потенцирования, вычисления суммы степенных рядов, дифференцирования и интегрирования. Возможны другие применения, как, например, вычисление $\sin(nx+\theta)$ по заданному $\sin x$, генерирование сложных функций и т. д.

Решение может быть получено в явном или неявном виде, причем $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ вычисляются с одинаковой легкостью. Приведены электрические схемы узлов машины. И. К. Волков

6360. Применение комбинации малых счетных машин и электронных моделирующих устройств для решения задач автоматического регулирования. Обрадович (L'application combinée des machines tournantes et de calculateur analogique électronique dans la résolution des problèmes de régulation automatique. Obradovic I.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1956, Bruxelles, 1956, 175—177. Discuss., 177 (франц.; рез. англ.)

Описывается электронное моделирующее устройство, состоящее из ряда идентичных блоков, включающих в себя усилители постоянного тока и комбинации сопротивлений и емкостей. Посредством таких блоков воспроизводятся передаточные функции различных составляющих системы регулирования.

Выходные элементы блоков содержат тиратронные усилители, посредством которых можно регулировать ток возбуждения или другие параметры малых электрических двигателей. Используя эту аппаратуру, можно исследовать сложные проблемы, возникающие при параллельной работе машин различных типов, и другие задачи. Н. Н. Михайлов

6361. Автоматическая вычислительная машина, служащая для определения спектральной кривой распределения мощности. Смит, Мак-Клур, Бостик (An automatic power spectrum computer. Smith H. W., McClure R. M., Bostick F. X.), IRE Trans. Instrum., 1957, **6**, № 4, 228—231 (англ.)

Дается описание принципов работы и некоторых результатов испытаний вычислительной машины, осуществляющей построение кривой распределения мощности для медленных процессов, имеющих случайный характер. Основу прибора составляют устройства считывания и записи на магнитную ленту и электронные операционные блоки моделирующих устройств.

С помощью магнитной ленты производится запоминание исследуемой кривой и последующее воспроизведение в ускоренном масштабе времени.

Вычисление точек на кривой распределения мощности осуществляется непосредственным определением мощности сигнала на соответствующих участках рабочей полосы частот. Для этого в схеме установки используются безынерционные блоки перемножения, прецизионные генераторы синусоидальных колебаний, интеграторы и фильтры, содержащие операционные усилители с отрицательной обратной связью.

Кривая распределения мощности строится автоматически в виде графика на бумаге по ста точкам. Время, необходимое для вычисления одной кривой, составляет 20 мин. Г. М. Петров

6362. Новый способ вычисления с помощью токов высокой частоты. Часть 2. Генерирование функций. Уфлер, Тюбёф (Sur un nouveau procédé de calcul par courants de haute fréquence. 2e partie. Génération des fonctions monovariables. Uffler H. J., Tubeuf J.), Ann. radioélectr., 1957, **12**, № 48, 140—151 (франц.; рез. англ.)

Часть 1 см. РЖМат, 1958, 4304. Воспроизведение в описываемом вычислительном устройстве простой функциональной зависимости осуществляется с помощью специальных конденсаторов переменной емкости. При необходимости введения в машину более сложной зависимости используются заранее отработанные, так называемые «базовые функции», линейная комбинация которых позволяет с большей степенью точности воспроизводить требуемую зависимость.

Коэффициенты этой линейной комбинации, отличные для каждой из «базовых» функций, воспроизводятся регулируемыми конденсаторами, что позволяет отображать в любой стадии исследования необходимую зависимость. А. А. Крюков

6363. Применение моделирующих устройств для исследования операций. Грант (The application of the analog computer to operations research. Grant Robert B.), Midwest Res. Inst. Publs (1956, № 185, 48—66 (англ.)

В популярной форме рассматриваются возможности решения задач планирования производства и транспортных задач методами линейного программирования. На числовом примере решения транспортной задачи показываются преимущества, которые имели бы устройства гибридного (непрерывно-цифрового) типа перед чисто дискретными в решении задач линейного программирования. Автор предлагает использовать моделирующее устройство для определения замкнутых цепочек в матрице выбора перевозок. Реализация этой операции на универсальных цифровых машинах представляет наибольшие трудности. В заключение высказывается совершенно очевидная идея о целесообразности создания специализированного моделирующего устройства для решения всех задач линейного программирования. Однако, по словам автора, ему неизвестно, чтобы такое устройство было бы осуществлено хотя бы для простейших случаев. Г. Г. Рабинович

6364. Комбинированные непрерывно-цифровые системы управления. Нотман (Combined analog-digital control systems. Nothman Michael H.), Electr. Manufact., 1958, **61**, № 6, 78—86 (англ.)

Отмечается, что системы управления требуют как решения задачи «в истинном масштабе времени», что обеспечивается использованием моделирующих устройств, так и наличия вычислительных возможностей, присущих цифровым машинам. Логика системы управления может потребовать использования как непрерывной, так и дискретной информации со взаимными преобразованиями одной формы в другую.

Указывается, что системы дискретного действия, обладая точностью и разрешающей способностью, недостижимой для устройств непрерывного действия, применимы только тогда, когда можно считать, что за время одного цикла вычислений изменение физических параметров управляемой системы пренебрежимо мало. Эффективная полоса пропускания дискретных систем управления с учетом быстродействия вводных и выводных устройств составляет от 2 до 20 циклов в 1 сек. Совершенно очевидно, что этого недостаточно для многих систем, которые в остальном выиграли бы от использования дискретных устройств. Поэтому много усилий было направлено на создание непрерывно-цифровых систем, сочетающих преимущество решения задачи в истинном масштабе времени с высокой точностью.

Для обмена информаций между частями системы служат специальные преобразователи.

Излагается принцип действия преобразователей из непрерывной формы в дискретную (метод с использованием реверсивного счетчика и метод поразрядного вычитания) и преобразователей из дискретной формы в непрерывную (схема Шеннонна, схемы с использованием суммирующих усилителей по току и по напряжению и схема потенциометра с цифровым управлением).

Описываются отдельные узлы гибридных устройств, получающие непрерывно-цифровую информацию, выполняющие определенные операции над этой информацией и выдающие результаты непосредственно в заданной форме: 1) множительное устройство для умножения непрерывной величины на цифровую с выдачей произведения в непрерывной форме, 2) множительное устройство для перемножения двух дискретных величин с выдачей произведения в непрерывной форме, 3) функциональное устройство для образования заданной функции от дискретного аргумента с помощью функционального потенциометра с электронным цифровым управлением.

Показано построение функциональных узлов: 1) деление непрерывной величины на дискретную с выдачей результата в непрерывной форме и 2) нахождение квадратного корня из суммы квадратов двух дискретных чисел с выдачей результата в дискретной форме.

Описываемые устройства использовались в навигационном приборе, в узле преобразования координат (фирма „Gilfillan Brothers, Inc“., Лос-Анжелос, США). Г. Г. Рабинович

6365. Сервомеханизмы. Хайнс (Servomechanisms. Hynes R. W.), Austral. J. Instrum. Technol., 1958, **14**, № 1, 29—39 (англ.)

Кратко осветив историю разработки электромеханических следящих систем, автор рассматривает общие вопросы построения электромеханизмов для выполнения вычислительных операций умножения и интегрирования, а также для генерирования нелинейных функций одной переменной. Приводится вывод передаточной функции следящей системы и анализ устойчивости по критерию Найквиста. Даются общие положения о методах повышения устойчивости системы за счет применения корректирующих (стабилизирующих) средств и особенно за счет введения скоростной обратной связи.

Рассмотрение вопросов устойчивости нелинейных систем проводится с использованием фазовой плоскости. Автор считает, что для расширения полосы пропускания частот в вычислительных устройствах целесообразно применять быстродействующие гидравлические сервомеханизмы, и в качестве примера приводит вычислительную машину ТРИДАК, в которой применено 6 электрических и 9 высокоскоростных гидравлических сервомеханизмов.

В заключение обсуждаются вопросы совместного применения вычислительных машин дискретного счета и сервомеханизмов для автоматизации металлорежущих станков. И. Д. Алимов

6366. О построении простых счетно-решающих устройств с электромеханическими элементами для целей измерения и регулирования. Цейлингер (Beitrag zum Aufbau einfacher Analog-Rechengeräte mit elektromechanischen Bauelementen für die Meß- und Regeltechnik. Zeilinger Karl), Elektronik, 1958, **7**, № 5, 135—139 (нем.)

Описывается принцип действия и область применения счетно-решающих устройств непрерывного действия. Подробнее изложены требования к отдельным составным частям этих устройств. В большой таблице помещены сводные данные по точным потенциометрам с линейной характеристикой. В другой таблице приводятся данные по функциональным потенциометрам, в том числе характеристики точности, номинальных углов и сопротивлений, допустимых напряжений и т. д. Приведено также несколько упрощенных схем получения произведения и частного на мостовых схемах. А. Ф. Смирнов

6367. Устройство для вычисления частотных характеристик функции передачи. Идзава, Моринага (Izawa Keisuke, Morinaga Tomoaki), Дзидо сэйго, Automatic Control, 1956, **3**, № 1, 17—20 (японск.; рез. англ.)

6368. Электроинтегратор для решения задач динамики механических систем. Головко М. Д., Насыров Р. А., Вестн. Всес. н.-и. ин-та ж.-д. трансп., 1956, № 1, 53—54

6369. Моделирующее устройство для решения дифференциальных уравнений. (Analogonrekenmachine voor differentiaalvergelijkingen.). Bedrijf en echn., 1957, **12**, № 286, Electronica, 159 (голл.)

6370. Использование моделирующего устройства для решения проблем управления производством. Уэрли, Франкс, Пинк (Process-control problems yield to the analog computer. Worley C. W., Franks R. W. E., Pink J. F.), Control Engng, 1957, **4**, № 6, 97—104 (англ.)

Статья общего характера.

6371. Моделирующее устройство используется экономистами. Уэйнберг (The analog computer as a tool of the business economist. Weinberg Robert Stanley), Midwest Res. Inst. Publs 1956, № 185, 136—151. Discuss., 151—153 (англ.)

6372. Использование моделирующих устройств в проектировании. Уэрли (Analogue computers in process design. Worley Charles W.), Automat. Control, 1957, **7**, № 5, 64—67 (англ.)

6373. Принцип устройства и применение моделирующих устройств. Мертенс (Prinzip und Anwendung der Analog—Rechenmaschine. Mertens H.), Elektronik, 1958, **7**, № 5, 130—134 (нем.)

Статья общего характера.

6374. Некоторые соображения о точности линейных моделирующих устройств. Фукс (Some considerations of the accuracy of linear analogue computors. Fuchs H.), Revue E, 1956, **1**, № 11, 273—275 (англ.; рез. франц., флам.)

6375. Производство и применение электронных моделирующих устройств. Вос (Aufbau und Anwendung elektronischer Analog-Rechner. Vos J. de), Werkstattstechnik und Maschinenbau, 1958, **48**, № 2, 131—132 (нем.)

Статья общего характера.

6376. О некоторых применениях моделирующих устройств. Хершель (Über einige Anwendungen von Analog—Rechenmaschinen. Herschel R.), MTW-Mitt., 1958, **5**, № 3, 139—152 (нем.)

Статья общего характера.

6377. Использование моделирующих устройств в ядерной технике. Джонсон, Грейс (Analog computation in nuclear engineering. Johnson S. O., Grace J. N.), Nucleonics, 1957, **15**, № 5, 72—75 (англ.)

6378. Применение моделирующих устройств в химической промышленности. Мертенс (Die Anwendung von «analogen» Rechenmethoden in der chemischen Industrie. Mertens H.), Chem. Ind., 1958, **10**, № 5, 227—229, A 298 (нем.; рез. англ.)

6379. Применение перфорированных карт при проведении аналитических операций в лаборатории и контроле за их выполнением. Аддисон, Спенсер, Чарлетт (Analytical laboratory operation and control utilizing business machine punched card procedures. Addison L. M., Spencer E. H., Charlet E. M.), Analyt. Chem., 1958, **30**, № 5, 885—891 (англ.)

Описывается опыт применения перфокарт системы ИБМ в лаборатории «Esso Standard Oil Co.» При поступлении в лабораторию каждая проба снабжается «основной» перфокартой, на которой кодируется: описание образца, тип образца, его номер, дата поступления и группа, ответственная за выполнение анализа. Пользуясь «основной» перфокартой как шаблоном, готовят «аналитические» перфокарты по числу тех операций, которые должны быть выполнены для каждой данной пробы. Употребляются «аналитические» перфокарты двух образцов —для простых и сложных ответов. На каждой из таких карт печатаются и перфорируются по коду названия аналитических операций и их трудоемкость. На перфокартах имеется место для обозначения результатов анализа, условий анализа, точности. Эта информация наносится на перфокарту непосредственно аналитиком путем зачеркивания карандашом соответствующим образом отмеченных участков, а затем эта запись преобразуется в перфорацию. Пользуясь перфокартами, удобно составлять различного рода сводки для учета работы, выдачи результатов анализа и пр. С помощью перфокарт легко можно найти анализ по любому признаку—номеру пробы, описанию пробы, результату анализа и т. д. Использование перфокарт значительно сокращает труд, затрачиваемый на документацию материала, и облегчает управление лабораторией.

В. В. Налимов

6380. Изготовление карт устойчивости и демпфирования для регулирующих устройств с помощью счетно-аналитических машин. Буковиц, Шпиндельбергер (Herstellung von Stabilitäts- und Dämpfungskarten für Regelanordnungen mit Hilfe von Lochkartenanlagen. Bukovics E., Spindelberger W.), MTW-Mitt., 1957, **4**, № 3, 141—160 (нем.)

6381. Ввод перфокарт в машину (L'avènement des machines à cartes perforées), Usine nouvelle, 1958, **14**, № 15, 97—98 (франц.)

Статья общего характера.

6382. Прибор для определения коэффициентов Фурье. Доморяд А. П., Тр. Среднеаз. ун-та, 1956, вып. 66, 29—32

Дана схема прибора для одновременного определения коэффициентов a_0, a_k и b_k в разложении периодической функции $f(x)$ в ряд Фурье. Идея прибора близка к идее предложенного автором прибора для решения систем алгебраических уравнений (РЖМат, 1956, 6928).

6383. Программы для решения полиномов, степенных рядов и извлечения корней с помощью вычислительных машин с ручным приводом. Шильт (Programme für die Berechnung von Wurzeln, Polynomen und Potenzreihen mit Handrechnungen. Schilt H.), Schweiz. Bauzeitung, 1958, **76**, № 21, 319—323 (нем.)

Дается краткое описание миниатюрной вычислительной машины КУРТА (РЖМат, 1953, 492) с ручным приводом, иллюстрированное фотографиями общих видов машины и узлов механизма счета. Дана методика выполнения элементарных операций на этой машине. Приведены программы для извлечения корня степени n, вычисления значений полинома и степенного ряда. Программы сопровождаются числовыми примерами.

Н. П. Вашкевич

6384. Новая датская счетная машина (En ny dansk regnemaskine), Tidsskr. ind., 1957, № 17, 313 (датск.)

6385. Приспособление для умножения комплексных чисел (Pomůcka pro násobení komplexních čísel. Kš.), Sdělovací techn., 1958, **6**, № 5, 178—179 (чешск.)

6386. Счетная линейка для перевода молярных процентов в весовые и наоборот в двойных и многокомпонентных системах. Бюкле (Rechenschieber zur Umwandlung von Molprozenten in Gewichtsprozente und umgekehrt in Zwei- und Mehrstoffsystemen. Bücklе Helmut), Z. Metallkunde, 1958, **49**, № 3, 144—146 (нем.; рез. англ.)

Счетная линейка фирмы „Aristo" для пересчета весовых процентов в молярные (и обратно) в многокомпонентных системах имеет круговую форму и состоит из трех концентричных вращающихся колец, центрального диска и вращающегося вокруг центра прозрачного визира с радиальной риской. На кольцах и диске нанесены шкалы атомных весов с указанием всех элементов и отношений атомных процентов к весовым. Линейка обеспечивает при двойных системах возможность непосредственного отсчета требуемых величин в пределах 0,005—99,995%. Расчеты для многокомпонентных систем требуют нескольких последовательных операций. Диаметр наружной шкалы линейки 20 *см*. Н. К.

6387. **Развитие и использование систем нумерации. Браун** (Developing and using numbering systems. Brown Russel V.), Mach. Design., 1956, **28**, № 10, 106—108, 110 (англ.)

Обсуждается важность вопросов числового кодирования для современных промышленных предприятий. На простых примерах показываются различные типы цифрового кодирования сырьевых материалов и продукции индустриальных предприятий, наименований книг в библиотеке, а также применение мнемонических символов и алфавитно-цифровых кодов. А. А. Красилов

6388. **Системы кодирования данных. Аткинсон** (Digital codes in data-processing systems. Atkinson M. P.), Trans. Soc. Instrum. Technol., 1957, **9**, № 4, 124—130 (англ.)

Статья общего характера.

6389. **Численные расчеты с точки зрения двоичных электронных вычислительных машин. Хаусхолдер** (Numerical mathematics from the viewpoint of electronic digital computers. Householder Alston Scott), Nachrichtentechn. Fachber., 1956, **4**, 21—25, 223 (англ.; рез. нем.)

Обзорный доклад, посвященный новым направлениям, возникшим в связи с появлением быстродействующих электронных вычислительных машин. В связи с этим отмечается большое значение качественной теории уравнений, а также метода Монте-Карло. Далее рассмотрены новые аспекты теории ошибок. Подчеркиваются большие возможности, открываемые так называемой «экспериментальной математикой». Т. А. Шмаонов

6390. **Вычислительный центр AEG** (AEG-Rechenzentrum), AEG-Mitt., 1958, **48**, № 2-3, 130 (нем.)

Вычислительный центр AEG на турбинной фабрике в Берлине оборудован вычислительной машиной с магнитным барабаном ИБМ-650. В конце 1958 г. во Франкфурте-на-Майне должен был вступить в эксплуатацию второй вычислительный центр AEG. Он имеет такое же оборудование, как в Берлине.

6391. **Быстродействующая электронная счетная машина Академии наук СССР. Лебедев** (The high-speed electronic calculating machine of the Academy of Sciences of the U. S. S. R. Lebedev S. A.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 129—133 (англ.)

6392. **Электронное вычислительное устройство** (Räknemästaren utan hjärna. Elektroniken i praktiken), Tekn. alla, 1957, **18**, № 19, 12—13 (шведск.)

Краткая статья общего характера о машине Facit EDB в Осло.

6393. **Чехословацкие счетные и счетноаналитические машины. Александров Е. А.**, Приборостроение, 1956, № 1, 28—30

6394. **Развитие вычислительной техники в Америке. Эрист** (Die Entwicklung der Rechenmaschinen in Amerika. Ernst D.), Regelungstechnik, 1958, **6**, № 3, 89—92 (нем.; рез. англ.)

6395. **Тренажер. Пьолле** (Le simulateur de vol. Piollet Ludy), Air, 1958, **39**, № 739, 17—20 (франц.)

Статья общего характера. Приведены фото французских тренажеров LMT и PSV-LMT 141.

6396. **Симпозиум по вычислительным машинам** (Symposium on Computers. Austral. Soc. Instrum. Technol., Mt. Eliza, Victoria, 3rd 6th Dec. 1957), Austral. J. Instrum. Technol., 1958, **14**, № 1, 5—11 (англ.)

6397. **Будущие вычислительные машины. Бауден** (The next computers. Bowden B. V.), Technology, 1957, **1**, №10, 350, 352 (англ.)

6398. **Мир электронных вычислительных машин. Дюкрок** (Le monde des cerveaux électroniques. Ducrocq Albert), Suisse horlog., 1957, **72**, № 4, 73—81 (франц.)

Рассматриваются общие вопросы вычислительной техники. Приводятся характеристики цифровых машин и машин непрерывного действия, а также экспериментальных «кибернетических» моделей, сконструированных автором («электронная лиса» и т. п.). Приводятся краткие сведения об авторе статьи. А. А. Крупский

6399. **Инженерные задачи. Автоматизация решения с помощью цифровых машин. Клейн, Вильямс, Морган** (Digital automation. Engineering problems. Klein Martin L., Williams Frank K., Morgan Harry C.), Instrum. and Automat., 1957, **30**, № 5, 889—890 (англ.)

Статья общего характера о решении вычислительных инженерных задач на цифровых вычислительных машинах На примере вычисления полинома четвертой степени рассказывается о схеме расчетов, о программировании и, в частности, о программе для машины АЛЬВАК. А. А. Красилов

6400. **Машинный счет. Фергусон** (Pushbutton accounting. Ferguson J. W.), Paint and Varnish Prod., 1957, **47**, № 10, 50—51, 109 (англ.)

Статья общего характера.

6401. **Основные понятия обработки информации при помощи электронных машин. Лепин** (Grundbegriffe der elektronischen Informationsverarbeitung. Leepin P.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, **57**, № 2, 224—230 (нем.)

6402. **Использование электронных машин. Янг** (Using your electronic brains. Young P. L.), Motor Transp., 1958, **92**, № 2764, 3 (англ.)

Статья общего характера.

6403. **Новейшие вычислительные машины и их практическое использование. Петраш** (Moderné počítacie stroje a ich použitie v praxi. Petráš Štefan), Naša veda, 1958, **5**, № 3, 116—120 (словацк.)

6404. **От механической вычислительной машины к релейным машинам. Первая ступень развития вычислительной техники. Боклер** (Von der mechanischen Rechenmaschine bis zum Relaisrechner. Erste Entwicklungsstufen der Ziffernrechner. Beauclair W. de), VDI-Nachr., 1958, **12**, № 6, 9—10 (нем.)

6405. **Использование электроники в вычислительных машинах. Стрейчи** (Electronics harnessed to the computing machine. Strachey Christopher), Technology, 1958, **2**, № 4, 106 (англ.)

6406. **Электронная вычислительная машина как техническое оборудование. Тороман** (Electronic computer serves as engineering's. Thoroman D. G.), SAE Journal, 1958, **66**, № 5, 30—31 (англ.)

6407. **Малая вычислительная машина и децентрализованное вычислительное оборудование. Фланнелл** (The small computer and decentralized computing facilities. Flannell C. F.), Sci. Counselor, 1958, **21**, № 1, 7—8, 24 (англ.)

6408. **Предпочтение цифровым вычислительным машинам. Наш** (Choosing your digital. Nash J. P.), Civil Engng, 1958, **28**, № 5, 34—38 (англ.)

6409. **Инженеры и электронные вычислительные машины. Тимби** (Engineers and electronic computers. Timby Elmer K.), Road Internat., 1957, № 26, 42—48 (англ.)

6410. Что представляет собой цифровая вычислительная машина для решения дифференциальных уравнений. Голдман (DDA — what is it? Goldman R. N.), Electr. Engng, 1958, 77, № 7, 592—594 (англ.)
Популярная статья о принципе работы цифровой машины для решения дифференциальных уравнений.

6411. Вычислительные машины — цифровые автоматы. Бут (Computers — numerical automation. Booth A. D.), Instrum. Practice, 1958, 12, № 6, 639—640 (англ.)
Популярная статья.

6412. Логические машины и их применение. Беккер (Logisch rekenmateriaal en zijn toepassingen. Becker I. de), Techn.-wet. tijdschr., 1957, 26, № 2, 54—62 (флам.; рез. англ., франц., нем.)
Популярная статья об устройстве и работе цифровых вычислительных машин. Показаны логическая структура выполняемых цифровыми вычислительными машинами команд и реализуемые ими функции алгебры логики. Упомянуты области применения цифровых машин.
А. Д. Закревский

6413. Электронные вычислительные машины. Пеландини (Machines à calculer électroniques. Pellandini Jean), Bull. techn. Régie nat. usines Renault, 1958, № 44, 8—17 (франц.)
Популярная статья.

6414. Электронные вычислительные машины. Тегер (Elektronische Rechenmaschinen. Taeger Werner), Frequenz, 1957, 11, № 6, 185—191 (нем.)
Популярная статья.

6415. Методы выборки нужного слова из словаря. Королев Л. Н., В сб.: Вычисл. техн. М., АН СССР, 1958, 116—118
Рассматриваются некоторые методы выборки нужного слова из автоматического словаря. В случае метода «деления пополам» число операций $k \leqslant E(\log_2 N) + 1$, где N — число слов в словаре. Д. Ю. Панов

6416. Перевод с иностранного языка при помощи электроники (Electronic translation of foreign language), J. Mach. Account., 1957, 8, № 11, 34—35 (англ.)
В Калифорнийском технологическом институте проводятся работы по автоматическому переводу с помощью электронной цифровой вычислительной машины «Дататрон» (Datatron). Разрабатываются общие принципы перевода, позволяющие осуществлять перевод с различных языков. Например, упоминаются опыты по переводу с русского, французского, немецкого и испанского языков на английский. Приводится пример перевода машиной на английский язык фразы «Машина переводит с одного языка на другой». «Дататрон» работает со скоростью 30 000 сложений или вычитаний в 1 мин. Перевод с четырех языков предполагается осуществлять с помощью четырех специальных словарей, введенных в запоминающее устройство на магнитном барабане емкостью в 40 800 двоичных знаков. Каждый из словарей содержит приблизительно 500 слов. В дальнейшем предполагается использовать запоминающее устройство на магнитной ленте емкостью 200 млн. знаков.
В. А. Брик

6417. Хранение информации на картах, перфорированных по краям. Харди (The capacity of edge-punched cards for information storage. Hardy F. E. M.), Office Mag., 1958, 5, № 54, 452—453 (англ.)
Рассматривается возможность применения перфорированных по краям бумажных карт для кодирования чисел или цифр от 0 до 12 и 26 букв английского алфавита. Могут быть использованы карты с одним, двумя и тремя рядами пробивок. В последнем случае емкость значительно увеличивается. Для алфавита выбран 5-разрядный двоичный код, для цифр — 4-разрядный. На одной стороне карты имеется место для 26 пробивок, что позволяет закодировать 5 букв или 6 цифр. В качестве примера возможного применения этого способа приводится запись инициалов и номеров абонентов одного из телефонных узлов Лондона. Отмечается необходимость выбора наилучшего кода и усложнение анализа записи при большом количестве хранимой информации.
А. Ф. Смирнов

6418 К. Программирование для автоматических цифровых вычислительных устройств. Бут (Programming for an automatic digital calculator. Booth Kathleen Hylda Valerie. London, Butterworths Scient. Publs, 1958, viii, 238 pp., ill., 42 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 431, 9 (англ.)

6419 К. Кодирование для вычислительной машины МИТ-ИБМ 704. 2-е изд. Хелуиг (Coding for the MIT-IBM 704 computer. 2nd ed., rev. Ed. Helwig F. Cambridge, Mass. Technol. Press, 1958, 224 pp.) (англ.)

6420 К. Принцип действия автоматических цифровых вычислительных машин. Наслен (Principes des calculatrices numériques automatiques. Naslin P. Paris, Dunod, 1958, 224 p. ill.) (франц.)
См. РЖМат, 1958, 8396—8398, 10343—10345.

6421 К. Теория и практика вычислительных машин. Рорберг (Theorie und Praxis der Rechenmaschinen. Rohrberg A. Stuttgart, B. G. Teubner Verlagsges., 1954, 72 S., ill., 3, 90 DM) (нем.)

6422 К. Вычисления с помощью моделирующих устройств на постоянном токе. Данлу-Дюменил (Le calcul analogique par courants continus. Danloux-Dumesnils M. Paris, Dunod, 1958, XIV, 257 p., ill.) (франц.)
Книга состоит из 9 глав и двух приложений. Содержание ее таково.
Гл. 1. Охарактеризованы различные виды машинного счета: 1) с помощью механических и электронных цифровых машин; 2) физические методы, которые делятся на методы теории подобия, т. е. изменения масштаба; моделирование, т. е. сведение задачи к изучению физического явления, допускающего получение численного результата путем измерения; методы переноса, использующие единство математического аппарата: многие явления описываются уравнением Лапласа, ему же подчиняется потенциал заряженного тела (по сути дела, все это то же самое моделирование.—*Реф.*). Рассматривается аналогия между механическими и электрическими колебаниями. Отмечаются общие свойства физических методов: неуниверсальность, необходимость перевода безразмерных величин в размерные и обратно, невозможность получения высокой точности, необходимость оператора с физическим образованием. Приведена таблица для сравнения физических методов и цифровых машин с разных точек зрения.
Гл 2. Рассматриваются принципы электрического моделирования на постоянном токе, состоящие в осуществлении электрических цепей, в которых напряжения на различных участках пропорциональны искомым величинам математической задачи. Если эти напряжения постоянны, то схема изображает систему линейных алгебраических уравнений, если же они зависят от времени — систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, где независимой переменной является время. Решение указанным методом уравнений в частных производных сколько-нибудь общего вида, как правило, невозможно.
Описаны различные узлы электрических цепей для осуществления элементарных операций: преобразователь знака, усилитель, сумматор, интегратор, потенциометр. Приведен пример схемы решения для уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$. Изложены некоторые технические сведения: о питании схемы, измерении напряжений и т. д.
Гл. 3. Рассказывается о точности вычисления, о происхождении разного рода ошибок, о конструктивной ре-

ализации узлов, описанных в гл. 2, о снятии и регистрации результатов.

Гл. 4. Описано решение систем линейных алгебраических уравнений, приведение их к наиболее удобному для решения виду, обращение матриц, охарактеризованы источники ошибок и точность вычислений.

Гл. 5. Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Описано устройство интегратора, дериватора (блок для дифференцирования, из-за малой точности не используемый), приспособление для установки начальных значений. Приведен пример составления схемы для системы уравнений

$$ay'' + by' + cy = z + k,$$
$$z'' + \omega^2 z = 0$$

при условиях $y(0) = Y$; $y'(0) = 0$; $z(0) = 0$; $z'(0) = A\omega$.

Даны правила для выбора масштаба по времени. Приведены два примера: движение сложного маятника и определение устойчивости самолета. Рассматривается возможность решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также некоторых уравнений в частных производных. Последние сводятся к обыкновенным по известному методу прямых.

Гл. 6. Изложены основные понятия операционного исчисления, их использование в электрических цепях, а также примеры практического применения.

Гл. 7. Охарактеризованы нелинейные задачи. Основные элементы для осуществления нелинейных операций: перемножающее устройство, функциональное устройство, лампы-ограничители. Приведены различные конструктивные решения, электромеханические и чисто электронные. Описано устройство для получения обратной функции. Рассказывается о решении нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений.

Гл. 8. Описано несколько конструкций моделирующих устройств общего типа (французские ОМЕ-L2, ОМЕ-P2, «Джинн», английское «Шорт», американские РЕАК и ФИЛБРИК и др.) Указана их цена, габариты, область применения, точность. Приведены описания некоторых машин специального назначения: цифровой машины с фиксированной программой, имитатора ядерного реактора и различных типов имитаторов полета.

Гл. 9. Охарактеризованы область применения и практическая организация вычислений с помощью моделирующих устройств.

Приложение 1. Пример решения линейной проблемы с помощью компутажа — стабилизация геликоптера в стационарном полете.

Приложение 2. Получение синусоиды в качестве иллюстрации к методам гл. 6. Р. Д. Бачелис

6423 К. Труды Национальной конференции по электронике. Т. 13 (Proceedings of the National Electronics Conference. Vol. XIII. Chicago, Illinois, October 7th—9th, 1957. Chicago, Nat. Electronics Conf., Inc., 1958, xiv, 1066, xvii—xxi pp., ill., 7.50 doll.) (англ.)

6424 Д. Основы построения арифметических устройств и инженерное решение арифметического узла вычислительной машины М-2. Карцев М. А.—Автореф. дисс., канд. техн. н.,Моск. энерг. ин-т, М., 1958

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

6425. Расчет динамической устойчивости асинхронных двигателей на электронных цифровых машинах. Габбард, Роу (Digital computation of induction-motor transient stability. Gabbard J. L., Jr, Rowe J. E.), Power Appar. and Systems, 1957, № 33, 970—975. Discuss., 975—977 (англ.)

Изложен метод расчета динамической устойчивости по методу последовательных интервалов для электрических систем со значительной асинхронной нагрузкой на электронной цифровой машине ИБМ-650. Предварительно на машине вычисляются нужные собственные и взаимные проводимости схемы замещения системы с помощью матричного метода. Дифференциальные уравнения переходных процессов синхронных и асинхронных составлены с учетом изменения э. д. с. за переходными реактансами. Производные заменены первыми разностями. Программа позволяет рассчитать сложную систему с числом нагрузок до 11 эквивалентных двигателей и до 19 синхронных машин. Расчеты устойчивости на цифровой машине ИБМ-650 занимают примерно в 4 раза меньше времени, чем на модели сетей переменного тока, и требуют в 20 раз меньше времени от инженерно-технического персонала. Библ. 8 назв.

А. А. Крюков

6426. Расчет трубопроводов с помощью электронной цифровой вычислительной машины. Хог, Уэйнберг (Pipeline network analysis by electronic digital computer. Hoag Lyle N., Weinberg Gerald), J. Amer. Water Works Assoc., 1957, **49**, № 5, 517-524 (англ.)

Рассматриваются 4 метода расчета трубопроводов: метод разрезов, итерационный метод Кросса, метод линейной аппроксимации и метод электрической аналогии, которые сопоставляются по точности и по быстроте получения результатов. Показывается целесообразность применения цифровых вычислительных машин для решения подобных задач. А. А. Красилов

6427. Геодезические вычисления с помощью электронных вычислительных машин. Клич (Geodätische Berechnungen auf elektronischen Rechenanlagen. Klietsch G.), Z. Vermessungswesen, 1957, **82**, № 9, 303—310 (нем.)

Обзорная статья.

6428. Проектирования с помощью быстродействующих электронных вычислительных машин. Линдерот (Designing with higt-speed electronic-computers. Linderoth L. Sigfred, Jr), Mach. Design, 1957, **29**, № 5, 72—77 (англ.)

6429. Проектирование стальных мостов при помощи вычислительных машин. Залер (Designing steel bridges by computer. Zahler C. W.), Civil Engng, 1958, **28**, № 5, 59—61 (англ.)

6430. Устои моста проектируются при помощи вычислительной машины. Чафец, Плакс (Bridge piers designed by computer. Chafets E. M., Plaxe Eli), Civil Engng, 1958, **28**, № 5, 55—58 (англ.)

6431. Использование электронных цифровых вычислительных машин в проектировании шоссейных дорог. Ридж (Use of electronic digital computers in highway engineering. Ridge S. E.), Civil Engng, 1958, **28**, № 5, 48—51 (англ.)

6432. Вычислительная машина ДЭЮКЕ помогает в проектировании самолетов (DEUCE computer aids aircraft design), Overseas Engr, 1956, **30**, № 344, 8—10 (англ.)

6433. Использование вычислительных машин в расчетах реакторов. Биллингсли, Мак-Лафлин, Уэлш, Холланд (Use of computers in reactor design. Billingsley D. S., McLaughlin W. S., Jr, Welch N. E., Holland C. D.), Industr. and Engng Chem., 1958, **50**, № 5, 741—752 (англ.)

6434. Применение электронной цифровой вычислительной машины в проектировании установки низких температур. Сарджент (Applications of an electronic digital computer in the design of low temperature plant. Sargent R. W. H.), Trans. Instn Chem. Engrs, 1958, **36**, № 3, 201—214. Discuss., 215—223 (англ.)

6435. Применение электронных дифференциальных анализаторов для решения технических проблем.

Моррилл (Application of electronic differential analyzers to engineering problems. Morrill Charles D.)., Proc. Sympos. Industr. Applic. Automat. Comput. Equipm. Jan. 1953. Kansos City. Mo., Midwest Res. Inst., 1953, 107—127, discuss. 127—128 (англ.)

6436. Применение цифровых вычислительных машин в бумажной промышленности. Митчелл, Гринкер (Application of digital computers to the paper industry. Mitchell M. L., Grinker W. S.), Paper Mill News, 1958, 81, № 13, 9—10, 17 (англ.)

6437. Электронные счетные машины. Демьевиль (Machines électroniques à compter. Demiéville Henri), Suisse horlog., 1958, 73, № 2, 37—44 (франц.)

Рассматриваются электронные машины, применяемые в часовой промышленности. Здесь особенно важен точный учет деталей, так как в связи с их высокой стоимостью нельзя пренебрегать даже несколькими единицами. С другой стороны, технический контроль оперирует числами высокой точности. Описаны разные учетные операции и используемое оборудование. Р. Д. Бачелис

6438. Применение электронных вычислительных машин в производстве космических аппаратов. Ситри (Applications des calculateurs électroniques à l'industrie aéronautique. Citry M.), Techn. sci. aéronaut., 1957, № 5, 241—245 (франц.)

Статья общего характера.

6439. Расчет профилей линий для модели атмосферы с помощью электронной счетной машины. Хейзер (The prediction of model—atmosphere line profiles with an electronic computer. Heiser Arnold M.), Astrophys. J., 1957, 125, № 2, 470—477 (англ.)

См. РЖАстр, 1958, 1014.

6440. Вычислительные машины составляют расписание движения поездов (Computing train timetables), Engineering, 1958, 186, № 4819, 87 (англ.)

6441. Обработка данных для учета товаров при помощи электронных счетных машин. Билс (Electronic data processing for inventory control. Beals Robert P.), Manag. Operat. Res. Digest, 1956, 1, № 4, 24—26 (англ.)

6442. Машины на конторской службе. Мак-Клин (Machines in home office. McClean Frank J.), Civil Engng, 1958, 28, № 5, 45—47 (англ.)

6443. Автоматическое управление страхованием (L'automation de la gestion dans les assurances), Rev. mécanogr., 1958, 12, № 130, 259—263 (франц.)

6444. Автоматизация банковских отчетов. Рубинфин (Automation of bank-check accounting. Rubinfien David), J. Account., 1957, 103, № 3, 41-47 (англ.)

6445 К. Автоматическое управление и вычислительная техника. Вып. 1. Ред. Солодовников В. В. М., Машгиз, 1958, 304 стр., илл., 11 р. 25 к.

6446 К. Автоматическое управление предприятиями с помощью машин на перфокартах. Лост, Пеп (Gestion automatisée des entreprises par les machines à cartes perforées. Lhoste G., Pèpe P. Paris, Dunod, 1958 (1957), 249 p., ill.) (франц.)

Книга состоит из 5 частей и 2 приложений. Содержание ее таково:

Часть 1. Введение. Управление предприятием не может быть осуществлено без точной информации о работниках предприятия, его имуществе и происходящих с этими элементами изменениях; эта информация хранится в картотеках. В ходе работы предприятия она подвергается определенной обработке, причем возникают три типовые проблемы: а) классификация по определенным признакам; б) подсчет самих документов или суммирование заключенных в них данных; в) представление результатов. Начальная информация (т. е. соответствующая моменту создания предприятия) может меняться. В связи с этим необходимо: а) добавлять новую документацию и изымать устаревшую; б) заменять документы с изменившимся содержанием документами, составленными на текущий день; в) периодически изучать происходящие изменения. Охарактеризованы пять групп основных операций, с помощью которых решаются типовые проблемы.

Приведены достоинства счетно-аналитических машин (точность, надежность, гибкость, приспособляемость, скорость до 10 000 документов в час) и их недостатки (дороговизна, необходимость предварительной перфорации, что вызывает задержку результата). Изложены основные принципы действия этих машин.

Часть 2. Образование картотек из перфокарт. Охарактеризованы различные виды перфокарт, способы перфорации и ее контроля. В частности, возможна автоматическая перфорация при соединении перфоратора с другой машиной. Приведен более удобный способ ручной перфорации: определенные места карты подчеркиваются графитным карандашом, и карта подается в машину, называемую репродуктором. Когда след проходит между парой щеток, срабатывает пуансон, и пробивается отверстие.

Изложены предварительные операции над перфокартами, принципы кодификации для различных целевых назначений, использование перфокарт, а также способы их изготовления и хранения.

Часть 3. Эксплуатация картотеки из перфокарт. Основные машины, используемые при эксплуатации картотеки из перфокарт: сортировальная машина, табулятор и перфоратор. Изложено устройство сортировальных машин, а также приведены данные о машинах SAMAS, BULL, IBM-82, 083. Наиболее быстрая из них 083 сортирует 1100 карт в 1 мин.

Табулятор читает карты, выбирает нужные, осуществляет действия над заключенными в картах данными и печатает как результаты, так и исходные данные. Все операции производятся автоматически. Подробно описано устройство узлов табулятора для каждой операции.

Рассказывается о приведении картотек в состояние на текущий день. Для этого используется так называемый сравнивающий репродуктор. Он копирует уже имеющиеся перфокарты и производит их сравнение с оригиналом, причем в случае расхождения останавливается. Кроме того, он может менять порядок колонок и вносить в копии изменения согласно указаниям в так называемых командных перфокартах.

Описаны машины, производящие все четыре арифметических действия, так называемые вычислительные перфораторы.

В четвертой и пятой частях говорится о проблемах, возникающих при создании предприятия и при руководстве им, а также о решении этих проблем на машинах с перфокартами.

В приложениях дана терминология и библиография.

Р. Л. Бачелис

См. также: 5402, 5464, 6305

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Аббасов Н. Т. 6250
Аболиня В. Э. 5860
Агаев Н. Н. 5385
Адян С. И. 5443
Акаикэ 6170
Александров Е. А. 6393
Алексидзе М. А. 6303 6304, 6305
Алехин В. М. 5902
Амбарцумян Г. А. 6058
Амбарцумян С. А. 5888
Аносов В. И. 6016
Аракелян О. А. 5424, 5439 Д
Аржаных И. С. 5901
Арнольд В. И. 5688
Аширов С. 6018

Б

Батунер Л. М. 5553
Бахтин И. А. 6039 Д
Бачурин Г. Ф. 5573, 5575
Башмакова И. Г. 5392
Бедельбаев А. К. 5825, 5826
Бердинских И. П. 5914
Берман Д. Л. 5728
Бермант А. Ф. 5938 К
Блиох П. В. 5900
Болонкин Г. С. 5871
Бондарев А. Л. 5440 Д
Боревич З. И. 5606
Боровиков В. А. 5864
Боровский Ю. Е. 6205
Бояджиев Г. 5437 К
Брадис В. М. 5433 К
Брейтман В. М. 5375
Бриш Н. И. 5837
Бугров Я. С. 5856
Будак Б. М. 6307
Булатовић З. 6228
Бурчуладзе Т. В. 5858

В

Ван Хун-шэн 5745
Вертгейм Б. А. 5742, 5798, 6022
Виленкин Н. Я. 5973
Виноградов В. С. 5849, 5850, 5859
Вишик М. И. 5841
Войшвилло Е. К. 5461
Волков Ю. А. 6295
Ворович И. И. 5892, 5893
Вулих Б. З. 6037 К
Выгодский М. Я. 5435 К

Г

Гальперин И. М. 5750
Гандин Л. С. 5928
Ганьшин В. Н. 6262
Гарецкий С. П. 6062 К
Гладкий А. В. 5690
Глускин Л. М. 5590
Го Да-цзюнь 5998
Головко М. Д. 6368
Голубев В. А. 5520
Гольдберг А. А. 5775
Гольштейн Е. Г. 5931
Горбунов А. Д. 6307
Гордевский Д. З. 6206
Гречкин Н. З. 5421
Грибов В. Н. 6031
Гун Шэн 5752
Гусева Н. К. 5811
Гу Чао-хао 6271

Д

Давыдов Н. А. 5954
Джавадов М. А. 5423, 6251, 6290
Дзюбенко С. Т. 6313
Дзядык В. К. 5726
Димова-Нанчева В. 5437 К
Длаб В. 5570
Доморяд А. П. 6382
Дубнов Я. С. 5412
Дубовицкий А. Я. 5710
Думлер С. А. 6107
Дундученко Л. Е. (Л. О.) 5748, 5749

Е

Еремин С. А. 5789
Еругин Н. П. 5812
Еськов В. Г. 5932

Ж

Жислин Г. М. 6036

З

Задоян М. А. 5888
Зерагия П. К. 5853
Зморович В. А. 5950

И

Иванов В. К. 5759
Ивасэ 6130
И Вэнь-линь 5495
Игнатьев У. В. 5656
Идзава К. 6367
Изотов Г. Е. 5547
Ильинская Г. В. 5816

К

Кабулов В. К. 5877
Каганов М. И. 5900
Казьмин Ю. А. 5737
Карамышкин В. В. 5976 Д
Карцев М. А. 6424 Д
Касаи 6173
Касьянюк С. А. 5762
Каялов Г. М. 6156
Келдыш Л. В. 5643, 5671
Кемхадзе Ш. С. 5565
Кільчевський М. О. 5880
Киро С. Н. 5402
Климов Н. И. 5487
Коган Б. И. 5883
Когония П. Г. 5504
Кожухаров И. 5437 К
Колмогоров А. Н. 5688
Колпаков В. В. 5898, 5899
Коновалова Н. А. 6220
Коренблюм Б. И. 5967
Королев Л. Н. 6415
Королёва М. С. 6204
Королюк В. С. 6091
Кошляков Н. С. 5810, 5811
Красносельский М. А. 6017
Красоткина Т. А. 5399
Кузнецов А. В. 5756
Кунин И. А. 6302
Кусуноки 5785
Кэ Шао 5511

Л

Лаврик А. Ф. 5486
Лалетин Л. И. 6236
Лаптев Г. Ф. 6270
Лебедев Л. Л. 5758
Лебединский Н. И. 6169
Леонтьев А. Ф. 5738
Лидский В. Б. 6038 Д
Линник Ю. В. 5489, 5500
Липин Н. В. 5782, 5784
Лихтенбаум Л. М. 5657
Ли Янь 5393
Лопатинський Я. Б. 5854, 5861
Лу Вэнь-дуань 5515
Лю Лун-фу 5989
Люстерник Л. А. 5841

М

Максимова И. Г. 5810
Малкова Н. М. 6211
Мальцев А. И. 5634, 5635
Масленников М. В. 5916
Масловский М. Ф. 5912
Матеев А. 6248, 6249
Мейман Н. 5767
Мельник Д. П. 5920
Мельников И. Г. 5400
Мерман Г. А. 5829
Микеладзе Ш. Е. 6311
Милованова Л. Н. 5417
Минин И. Н. 5917
Минухин Б. Л. 5510
Минь Сы-хао 5495
Михайлов В. 5840
Михайловський В. І. 6296
Мияваки 6184
Могилевский Ш. И. 6007
Моисеев Н. Н. 5876
Молчанов Н. Н. 5813
Моринага Т. 6367
Морозова Е. А. 5894
Мосеєнков Б. І. 5879
Мышкис А. Д. 5860

Н

Насыров Р. А. 6368
Никольский С. М. 5703
Никулин Н. А. 5422
Нисихира 6070
Новоселов С. И. 5410
Норкин С. Б. 5827

О

Обрешков Н. 5929, 5956, 5979
Олейник О. А. 5852
Осипов П. Н. 6252
Осипова М. И. 5441 Д

П

Панфилов С. И. 5539
Петрова-Денева А. 5437 К
Погребиський И. Б. 5403
Попов А. А. 5442 Д
Постников М. М. 5650
Првановић М. 6272
Прудников А. П. 5857

Прянишникова З. И. 6238
Путята Т. В. 5744

Р

Рабинович С. И. 5725
Рихтер В. 6064 Д
Розенфельд Б. А. 5384
Ростковский Б. А. 6169
Рубинштейн Г. Ш. 6109
Рыбников К. А. 5392
Рябцев И. И. 5993

С

Сакагути 5730
Салимов Р. Б. 5760
Самсоненко С. В. 5983
Сахнович Л. А. 6006
Светлаков С. И. 6224
Се Бан-цзе 5624
Семков Б. Ф. 6327
Сідляр М. М. 5886
Симадзаки 6173
Симонов Н. И. 5398
Скопец З. А. 6243
Скряго А. М. 5612
Соболев В. В. 5918
Соловейчик Р. Э. 5928
Соловьев А. 5814
Солодовников В. В. (ред.) 6445 К
Соляник-Красса К. В. 5885
Сонобэ 6157
Страхович К. И. 5908
Суворов Г. Д. 5799
Сунь Энь-хоу 6050
Сюй Бао-лу 6048
Ся До-шин 5997

Т

Такэути 5731, 5732
Талантова Н. В. 6268
Тамаева Л. Г. 6232
Тамме Э. Э. 6040 Д
Тарасов Е. В. 5923
Тейтельбаум В. Н. 5517
Темкин А. Г. 5978
Трахтенброт Б. А. 5468
Третьяков М. В. 5761
Трохимчук Ю. Ю. 5743
Тумашев Г. Г. 5755

У

Урабэ 6130
Урбаник К. 6109
Урбах В. Ю. 6281
Уфлянд Я. С. 5884

Ф

Фельдман М. Р. 5878
Фрум-Кетков Р. Л. 5674, 5675

Х

Ханров А. А. 5930
Хаяси 6081, 6178
Хонда Н. 6158
Хрусталев А. Ф. 5883
Хумал А. К. 6221

Ц

Цзян Цзэ-цзянь 5989
Цитланадзе Э. 6015
Цубои 6173

Ч

Чавадов М. 5423, 6251, 6290
Чахленкова Т. Г. 6245
Чогошвили Г. С. 5676
Чупона Г. 5633
Чэнь Я-шэнь 5560

Ш

Шапиро А. П. 5550
Шапиро Я. Л. 6276
Шарупич Е. М. 5968
Шилов П. И. 6138
Шиманов С. Н. 5828
Штокало И. З. 5403

Э

Энгельсон Я. Л. 6019

Ю

Юшкевич А. П. 5392

Я

Яблонский С. В. 5477
Яглом И. М. 5413
Якубович В. А. 5823
Яновская С. А. 5392
Ян Ю-чунь 5949
Янь Чжи-да 5560

A

Abellanas P. 5552
Abramowitz M. 6306
Adachi M. 5681
Adam A. 6145
Addison L. M. 6379
Adem Jośe 5677
Adem Julian 5865
Adler G. 5906, 5907
Agnew R. P. 5955
Aiello F. 5534 K
Aigner A. 5638, 5658
Aitken D. J. 5530 K
Akaike H. 6170
Akaza T. 5783
Akutowicz E. 5733
Albrecht R. 5436 K
Albuquerque L. G. M. de 5709
Allderige J. M. 6352
Almeida C. A. 5636, 5809
Amitsur S. A. 5492
Ammeter H. 6193
Ananda-Rau K. 5523
Anderson R. D. 5585
Anderson T. W. 6097 K
Andersson J. 5925
Andree R. V. 5533 K
Andreoli G. 5474, 5626, 5628, 5629
Anshen M. 6125
Aquaro G. 5640
Arens R. 6001
Arista A. 5540
Aronofsky J. S. 6113
Arsove M. G. 5736
Artin E. 5529 K
Asplund E. 5557
Athen H. 5368
Atkinson M. P. 6388
Auslander M. 5577
Ayoub R. G. 5599
Azároff L. V. 6356

B

Bachmann K.-H. 6336
Bade W. G. 5689
Badillo Barallat M. C. 5464
Baily W. L., Jr 6288
Bajcsay P. 5833 K
Baker A. G. 6087
Baker G. A. 6071
Baker I. N. 5740
Balázs J. 5727
Ball W. E. 5806
Bandyopadhyay S. P. 5562
Barquist B. L. 5933
Bartlett M. S. 6179, 6180
Batschelet E. 6044
Beals R. P. 6441
Beauclair W. 6101, 6102, 6404
Bechhofer R. E. 6078
Becker I. de 6412
Beckmann M. J. 6121
Behnke H. 5405
Behnken D. W. 6153
Bellman R. 6103
Bertolini F. 5691
Bertrandias F. 5493
Beth E. W. 5475
Beyer O. 6150
Bhatt S. N. 5961
Bialay H. 6024
Bica M. 6265
Bílek J. 6254
Billingsley D. S. 6433
Bing R. H. 5641
Birnbaum Z. W. 6053
Blanchard R. 6218
Bodiou G. 6042
Boers A. H. 5623
Boggio T. 5890
Bohun—Chudyniv V. 5558
Bonini Ch. P. 6128
Booth A. D. 6411
Booth K. H. V. 6418 K
Borwein D. 5952
Bose R. C. 6060
Bose S. K. 5774
Bostick F. X. 6361
Bouligand G. 5428 K
Bourbaki N. 5719 K
Bowden B. V. 6397
Brachwitz W. 6165
Brauer G. 5958
Brauer F. 5821, 5844
Browder F. E. 5846
Brown R. V. 6387
Brumfiel C. 5420
Büchi J. R. 5576
Bückle H. 6386
Bukovics E. 6380
Burde G. 6237
Burg A. R. van der 6147
Burger A. P. 5915
Burgess C. E. 5668
Burgoyne N. 6035
Busemann H. 6292
Butzer P. L. 5966, 6021

C

Cahen O. 6355
Cameron R. H. 5824
Camm F. J. 5438 K
Cantoni L. 6234
Carlitz L. 5975
Cassina U. 5409 K, 5419
Cesari L. 5705, 5712
Chafets E. M. 6430
Chakraborty S. K. 5881
Challand A. 6049
Chandrasekhar S. 5903
Charlet E. M. 6379
Châtelet F. 5508
Chen Jar—sun 5560
Cheng D. K. 5934
Cherubino S. 6116
Chiffi A. 5845
Chisini O. 6261 K
Church A. 5446
Churchill R. V. 5980 K
Cicala P. 5924 K
Citry M. 6438
Clark M. W. 6308
Clarke A. B. 6162
Climescu Al. 5632
Cohn R. M. 6090
Coleman A. J. 5582
Conrad P. 5572, 6026
Cooper G. 6120
Copson E. T. 5851
Cottrell P. J. W. 6146
Courant R. 5395
Cowden D. J. 6082
Cramér H. 6052
Creangă I. 6266
Croisot R. 5618
Crupi G. 5905
Culmer W. J. A. 5817
Curtis Ph. C., Jr 6008
Curzio M. 5631
Czipszer J. 5910

D

Danloux-Dumesnils M. 6422
Darlington S. 6161
Davenport H. 5490
Davenport W. B., Jr 6198 K
Deaux R. 6209, 6217, 6219
Dedecker P. 5685, 5686
Delorme S. 5397
Delpla G. 6202
Deltheil R. 5941 K
Demiéville H. 6437
Denis-Papin M. 5555
Denk F. 5374
Des Raj 6083
Destouches J. L. 5471
Destouches-Février P. 5470
Dickinson D. R. 5939 K
Dickson L. E. 5526 K
Dirac G. A. 5660
Dold A. 5653
Ducrocq A. 6398
Duffin R. J. 5921
Dufresnoy J. 5764
Dugué D. 6057
Duncan W. J. 6229
Dutta M. 5482
Dyer E. 5673
Dyson F. J. 5801

E

Eaves E. D. 5936 K
Egesoy E. 5787
Ehresmann C. 5662
Engel W. 5602
Eocha N. L. F. 5525 K
Erdélyi A. 5851
Ernst D. 6394
Evans W. B. 5948

F

Fabian T. 6112
Fadini A. 5610
Fagen R. T. 6319
Faith C. C. 5609
Fazekas F. 5802 K, 5981 K
Feibleman J. K. 5378
Félix L. 5391 K
Fellgett P. 6323
Ferguson J. W. 6400
Fernandes Costa M. A. 6068
Ferrarese G. 5889
Ferrell E. B. 6066
Fichera G. 5838
Finch P. D. 6126
Fisher R. C. 5425 K
Fisz M. 6067
Fladt K. 6244
Flannell C. F. 6407
Florida C. D. 6344, 6345
Flückiger M. 6174
Foguel S. R. 6000
Følner E. 5991
Ford F. A. J. 5969
Fox Ch. 6233
Fraïssé R. 5449, 5450
Frank W. 6119
Franklin J. N. 6316
Franks R. W. E. 6370
Freud G. 5724, 5906
Freudenthal H. 5479 K, 5536
Freund J. E. 6195 K
Frey T. 5981 K
Frigerio A. 5593
Frohlich A. 5603
Fuchs H. 6374
Fuchs L. 5571
Fujiwara T. 5630
Fuka J. 5757

G

Gabbard J. L., Jr 6425
Gabriel R. M. 5792 5793, 5794
Gagliardo E. 5704
Gandy R. O. 5456
Gani J. 6164
Gasapina U. 6227
Gask H. 5866
Gaskell E. E. 5389 K
Gatteschi L. 5970
Gautschi W. 5559
Geary R. C. 6117
Gelfond A. O. 5945 K
Gelsomini T. 6166
George F. H. 6129
Georgescu-Roegen N. 6115
Gilbert E. G. 6354
Gillman L. 5717
Gini C. 6173
Girerd J. 6353
Gispert H.-G. 5922
Glielmo A. 6207
Goetz A. 6030
Gold B. K. 6093 K
Goldberg S. 5944 K
Goldman R. N. 6410
Golomb S. W. 5518
Gomes R. L. 6285
Good I. J. 6047
Goodstein R. L. 5445
Goormaghtigh R. 6210, 6212, 6225
Gordon B. 5518
Götzke H. 6346
Grace J. N. 6377
Grant R. B. 6363
Grenander U. 5963
Grimm C. A. 5808
Grinker W. S. 6436
Groot J. de 5644
Grosswald E. 6300
Grover F. W. 6315
Grzegorczyk A. 5478 K
Guérindon J. 5613
Gugenheim V. K. A. M. 5682
Guggenheimer H. 5476
Gulliksen H. 6080
Guttman L. 6100

H

Hack M. N. 6005
Haimovici A. 5377, 5415
Hallden F. C. 6359
Haller J. 6330
Hammer P. C. 5718
Hamstrom M.-E. 5673
Hardy F. E. M. 6417
Hardy G. H. 5527 K
Harish-Chandra 6013
Harrold O. G., Jr 5642
Harrop R. 5458
Haupt O. 6028
Häuslein G. 5601
Hayashi C. 6081, 6178
Heilbronn G. 5839
Heilbronn H. 5795
Heins M. 5777, 5778, 5779
Heiser A. M. 6439
Heller B. 6298
Helwig F. (ed.) 6419 K
Hendersen K. B. 5530 K
Henning H.-J. 6072
Herschel R. 6376
Herstein I. N. 5563
Heymann O. 5926
Hiebsch H. 6208
Hilton P. J. 5943 K
Hirsch C.J. 6359
Hirsch G. 5648
Hirsch M. W. 5655
Hirschfeld R. A. 6023
Hlawka E. 5503
Hoag L. N. 6426
Hochmuth H. 5436 K
Hodges J. H. 5556
Hofmann K. H. 5584
Hofsommer D. J. 5977 Д
Hoge R. R. 6348
Holland C. D. 6433
Holt C. C. 6110, 6125
Holzer L. 5522
Homann F. A. 6274
Homma T. 6163
Hong I. 5847
Hongo E. 6011
Hönig Ch. S. 5661
Hooley C. 5488
Hopkins J. W. 6183
Hornich H. 5747
Householder A. S. 6389
Howe R. M. 6354
Howell J. M. 6093 K
Hronec J. 5832 K
Hsieh Pang-chieh 5624
Hsu Pao-lu 6048
Huard de la Marre R. 6182
Huggins W. H. 6160
Hulanicki A. 5588
Hurewicz W. 5831 K
Husain S. I. 6284
Hynes R. W. 6365

I

Ide S. 6277
Isbell J. R. 6099
Iséki K. 5663, 5664, 5666, 5670, 5988
Iseki S. 5483
Ishida M. 5496
Isiwata T. 6002, 6029
Ito N. 5564, 5574
Ivaldi P. 6194 K
Ivašev-Musatov O. S. 5723
Iwase Y. 6130
Iwiński T. 5804
Izawa K. 6367

J

Jabotinsky E. 5739
Jackson J. R. 6124
Jacob M. 6139
Jacobs H. H. 6120
Jacobsthal E. 5741
Jaenicke J. 5863 Д
James I. M. 5680
Jeger M. 5485
Jessop W. N. 6143
Jiang Ze-jian 5989
Johnson R. C. 5806
Johnson R. E. 5622
Johnson S. O. 6377
Jones B. W. 5546
Jost R. 6283
Jowett G. H. 6167
Justice H. K. 5940 K

K

Kabelka J. 5432 K
Kaizuka T. 5790
Kalaba R. 6103
Kalinowski J. 5463
Kan D. M. 5652, 5679
Kanitani J. 6275
Kanwal R. P. 5868, 5869
Karaśkiewicz E. 5867
Karmel P. H. 6095 K
Kasai T. 6171
Kassimatis C. 5701
Kaufman M. M. 6349
Kaufmann A. 5555
Kelly P. J. 6293
Kemeny J. G. 5426 K, 5465
Kendall D. G. 6061, 6142
Kennedy P. B. 5753
Kenner M. R. 5380
Keogh F. R. 5720
Kertész A. 5619
Kervaire M. A. 5651
Kirkor A. 5672
Klátil J. 5913
Klega V. 6148
Klein B. 6122
Klein F. 5431 K
Klein M. L. 6399
Klein P. E. 6351
Klietsch G. 6427
Klug J. 5532 K
Knauer K. 6175
Kneser H. 5946 K
Kneser M. 5543
Knopp K. 5427, 5937 K
Knops R. J. 5882
Koga T. 6309
Kohlbecker E. E. 5484
Kokoszyńska M. 5467
Kondô M. 5714
König H. 5990
Kornfield N. R. 6349
Kosko E. 5549
Kotzig A. 5659
Krabbe G. L. 5999
Kreisel G. 5457
Krettner J. 5532 K
Krull W. 5548
Krzywoblocki M. Z. 5870
Krzyż J. 5751
Kuebler R. R. 6060
Kühlein T. 5942 K
Kuhn H. W. 6104
Kuiper N. H. 6286
Kuipers L. 5971
Kung Sun 5752
Kuratowski K. 5646
Kurbatov V. A. 5541
Kurth R. 6185
Kuttner B. 5959, 5962

L

Lacombe D. 5373
Laderman J. 6121
Lah I. 6191
Lahiri B. K. 5700
Lainé Ch. E. 5428 K
Lanczos C. 6324 K
Lang S. 6257
Langhammer R. 5432 K
Larsen H. D. 5528 K
Larsson R. D. 5807
Lavrentieff M. A. 5800
Lax A. 5835
Lax P. D. 5834
Lebedev S. A. 6391
Le Cam L. 6075
Leconte Th. 5941 K
Lee A. S. 6113
Leepin P. 6401
Lefebvre P. 5586
Lefevre A. 6046
Lehmer E. 5513
Lehrer T. A. 6319
Lehto O. 5781
Leja F. 5695
Lekkerkerker C. G. 5505, 5506
Lella S. 5561 K
Levine N. 5706
Lhoste G. 6446 K
Lin C. C. 5904
Linderoth L. S., Jr 6428
Liu Long-fu 5989
Lipow M. 6322
Lohwater A. J. 5763
Lomicka R. F. 6352
Longo A. 5544
Lorenzen P. 5447
Loveday R. 6094 K
Lublin M. 6190
Lugaresi E. 5897
Lukacs E. 5773
Łukasiewicz J. 5480 K
Lumer G. 6294
Luxemburg W. A. J. 5987

M

McCall C. H., Jr 6140
McClean F. J. 6442
McClure R. M. 6361
McConnell J. 5376
McDowell R. H. 5644
Macintyre A. J. 5768
Mackenzie J. K. 6043
Mc Kie D. 5394
MacLane S. 5579
McLaughlin W. S., Jr 6433
McMullen C. W. 5896
McNemar Q. 6076
Mahler K. 5494, 5516
Maldague R. 6332
Malinowski S. 5896
Malinvaud E. 6114
Manaira M. 6155
Mangoldt H. 5427 K, 5937 K

Maradudin A. 5935
Marcus S. 5702, 5715, 5716
Maslen St. H. 5872
Mastrogiacomo P. 6235
Matič E. 6154
Matsumoto M. 6273
Matthews G. 5996
Maude R. 5791
Maury G. 5589
Mazzarella F. 5891
Meckling W. 6122
Medek V. 6231
Melan E. 5895
Menger K. 5386
Menzel D. H. 5862 K
Mergelyan S. N. 5735
Mertens H. 6373, 6378
Meulenbeld B. 5972
Meyer-König W. 5953
Mezger F. W. 5982
Middleton D. 6159
Mignosi G. 5429 K
Mikolás M. 5498
Min Szu-hoa 5495
Minty G. J. 6105
Mirsky L. 5551
Mišík L. 5698
Mitchell M. L. 6436
Miyanaga Y. 5663, 5664
Miyawaki I. 6184
Moch Fr. 5381
Modigliani F. 6110, 6125
Monna A. F. 5927
Montgomery D. 5587
Moppert K. T. 5805
Mordell L. J. 5501
Moreira Calaes A. 6203
Morgan H. C. 6399
Mori S. 5614
Morikawa H. 6258, 6260
Morimoto A. 5684
Morinaga T. 6367
Moriya M. 5607
Morrey C. B. 5786
Morrill C. D. 6435
Morrissett I. 6132
Moshinsky M. 5865
Moss G. A. 5434 K
Mostowski A. 5453, 5454
Mothes J. 6135
Mrowka E. 5512
Muhly H. T. 5509
Mullen J. A. 6159
Muños L. N. 6291
Murray F. J. 6003
Muth J. F. 6110, 6125

N

Nagahara T. 5607
Nagata Jun-iti 5669
Nagata M. 5616
Nakaoka M. 5678
Nanjundiah T. S. 5538
Napolitano L. G. 5875
Nash J. P. 6408
Naslin P. 6420 K
Nering E. D. 5600
Neugebauer C. J. 5711
Newhouse V. L. 6349
Newman M. H. A. 5406
Neyman J. 6063 K
Nicolescu A. 6241
Nievergelt E. 6089
Nikolič D. 6134
Nishihira M. 6070
Nisio M. 6055
Nissimov L. H. 6123
Noble M. E. 5722
Nobusawa N. 5608, 5611
Nocilla S. 5430 K
Noether G. E. 6084
Northcott D. G. 5615
Nothman M. H. 6364
Nowak W. 5819

O

Obradovic I. 6360
Obrechkoff N. 5929, 5956, 5979
Ödman S. T. A. 5887
Ogasawara T. 6010
Öhlmann H. 6337
Olech C. 5815
Oliphant M. W. 5692
Onuchic N. 5665
Orchard-Hays W. 6108
Orgeval B. de 6255
Orts J. M. 5734
Ostrowski A. 5797
Otsuki T. 6269
Özkan A. 6263

P

Padmavally K. 5769
Palacios J. 6280, 6282
Parker R. V. 5947
Părvu M. P. 5986
Pater Z. 6242
Patterson E. M. 6289
Pauc C. Y. 6028
Payne L. E. 5848
Pederson R. N. 5842
Peel E. A. 6085
Pellandini J. 6413
Pèpe P. 6446 K
Perkal J. 6136
Perry R. L. 5770
Persson O. 6137
Péter R. 5444
Petersen G. M. 5964, 5965
Peterson G. A. 6111
Peterson W. W. 6347
Petráš Š. 6403
Petty C. M. 6292
Phillips W. 6187
Piccard S. 5567—5569
Pini B. 5855
Pink J. F. 6370
Pinkham R. 6127
Piollet L. 6395
Piranian G. 5763
Pisula K. 6338
Plaxe E. 6430
Polanyi M. 6045
Popa I. 6201
Popper K. R. 5382
Porte J. 5460
Power G. 5873
Prior A. N. 5462
Prokop O. 6172
Provinzano A. 5534 K
Pukánsky L. 6009
Puppe D. 5654
Putnam H. 5457
Pyateckiĭ-Sapiro I. I. 5788

R

Rado R. 5639
Rădulescu M. 5985
Ragab F. M. 5974
Ramakrishnan A. 6056
Ramanujan M. S. 5960
Rancu N. 6106
Randels J. B. 6318
Rankin B. 6041
Rao C. R. 5699
Rao K. S. 6214
Rapcsák A. 6279 K
Rapp A. K. 6343
Rasiowa H. 5459
Read R. C. 5637
Rédei L. 5514
Reeves R. F. 6318
Regge T. 5822
Reich E. 6059
Reichardt H. 5401
Reichenbach H. 5472
Reid W. P. 5909
Reiersøl O. 6079
Reignier J. 6320
Reiner I. 5620
Renouard M. P. 6357
Rényi C. 5771
Rényi K. 5803 K
Rhodes F. 5667
Rideau G. 6034
Ridge S. E. 6431
Riiber A. E. 5754
Riotte A. 6353
Rivlin T. J. 5729
Rogers C. A. 5502
Rogers K. 5507
Rogosinski W. W. 5407
Rohrberg A. 6421 K
Roos J. E. 5866
Root W. L. 6198 K
Roquet R. 6168
Rowe J. E. 6425
Roy S. N. 6077, 6098 K
Rubin E. 6177
Rubin H. 5466
Rubinfien D. 6444
Rudin W. 5721
Ruelle D. 6032
Rufener E. 6188
Runck P. O. 6314
Ruscior Ş. 6264

S

Saaty T. L. 6133
Sade A. 5595, 5596
Safarevič I. R. 5605
Sakuma M. 5617
Salkover M. 5940 K
Saltzer C. 5995
Santaló L. A. 6297
Sargent R. W. H. 6434
Sasieni M. W. 6141
Sauer R. 5830 K
Schai A. 6335
Schell H. 5481
Schenkman E. 5580
Scherrer W. 5379
Schilt H. 6383
Schincke E. 5843
Schindowski E. 6321
Schmidt H. 5919
Schmidt W. 6230
Schneider W. 6172
Schreiber R. J. 6120
Schröder J. 6310
Schröter K. 5451
Schubart J. 6301
Schürz O. 6321
Schwartz H. 5509
Schwartz L. 5414
Schwarz S. 5604
Scott J. F. 5408 K
Seal K. C. 6073
Sebastião e Silva J. 5992
Seelye C. J. 5545
Segre B. 6253
Seitz J. 6148
Senderes V. L. 6196 K
Sengupta H. M. 5700
Sentis Ph. 6181
Serbyn W. D. 5921
Serre J.-P. 6257
Severo N. C. 6074
Shankar H. 5776
Shapiro H. S. 5729
Shapiro I. 5521
Shephard R. W. 6131
Shimazaki A. 6171
Sikorski R. 5713 K
Silverman R. J. 6025
Simon H. A. 6125
Singer J. 5566
Singh D. 6065
Skof F. 6240
Ślebodzinski W. 5404
Slonim M. J. 6140
Smid A. 6166
Smirnow W. I. 5390 K
Smith C. A. B. 6199 K
Smith E. S. 5940 K
Smith H. W. 6361
Smith P. 5873
Snell J. L. 5426 K
Scenderop F. 6172
Solodovnikov V. V. 5387 K
Sós V. 5524 K
Sosa Pàez S. Z. de 6291
Spampinato N. 6256
Spanier E. H. 5649
Specht W. 5598 K
Spencer D. C. 5497
Spencer E. H. 6379
Spindelberger W. 6380
Srivastav R. P. 5774
Stahl G. 5452
Stefánsson S. 6226
Stein E. M. 5766
Sterrett A. 6152
Stinespring W. F. 6004
Stolze F. 6350
Strachey C. 6405
Stucki-Kirchhofer F. 6342
Sugawara M. 5683
Sullivan R. J. 6299
Sun En-hou 6050
Suppes P. 5466, 6176
Surányi J. 5537
Svenonius L. 5448
Swan R. G. 5647
Swanson E. R. 6111
Swerling P. 5765
Swinnerton-Dyer H. P. F. 5507
Swoboda G. 6144
Szász P. 6246, 6247
Szendy Ch. 5554

T

Taeger W. 6414
Takács L. 6051
Takasu T. 5796
Takei K. 5818
Takeuchi J. 5731, 5732
Tamagawa T. 5543
Tammi O. 6239
Tamura T. 5591
Tanimoto B. 6312
Tarski A. 5455
Taylor S. J. 5694
Tchen C. M. 6186
Teleman S. 6012
Tenenbaum M. 5957
Thébault V. 6216
Thépaut A. 6189
Thielman H. P. 5707
Thompson G. L. 5426 K
Thoroman D. G. 6406
Thybaut A. 6267
Tiberti M. R. 5627
Tietz T. 5819
Tillmann H. J. 6020
Timby E. K. 6409
Tintner G. 6118
Tomber M. L. 5625
Tominaga H. 5611
Tornehave H. 5772
Toscano L. 6213
Tövissi L. 6106
Traczyk T. 6027
Trjitzinsky W. J. 5693
Tsuboi H. 6171
Tsuji M. 5696, 5780
Tubeuf J. 6362
Tucker A. W. 5371
Turan P. 5491, 5497, 5727
Turri T. 6259
Turrittin H. L. 5817
Tyner E. A. 6111

U

Ueno T. 6054

Uffler H. J. 6362
Uhl W. 6339
Unkelbach H. 5746
Urabe Syun-ichi 6130
Utumi Y. 5621

V

Vand V. 6331
Van der Waerden B. L. 5531 К
Vandiver H. S. 5519
Veldkamp G. R. 6215
Vicente Goncalves J. 5542
Vijayaraghavan T. 5769
Villa M. 5418
Vincze I. 6088
Vivier M. 5535 Д, 5581
Volk W. 6096 К
Vos J. de 6375
Vrănceanu Gh. 6287
Vučkić M. 5372

W

Wall D. W. 5594
Walusinski G. 5416
Wang Guang-ying 5836
Wang Hao 5473
Wang Hung-schen 5745
Wang Yuen-da 6278
Wartmann R. 6072, 6151
Watson J. 5874
Weber E. 5984 К
Weber M. 6222, 6223
Weber O. 6317
Weinberg G. 6426
Weinberg R. S. 6371
Weishu S. 5662
Weiss G. 5935
Weizsäcker C. F. von 5469, 6033
Welch L. R. 5518
Welch N. E. 6433
Weston J. D. 5583
Whiteman I. R. 5911
Widom H. 5820
Wiegandt R. 5592
Wielandt H. 5578
Wilansky A. 5951
Wille R. J. 5645
Williams F. J. 6195 К, Williams F. K. 6399
Williamson D. A. 6200
Wilson R. L. 5936 К
Wintner A. 5499, 5708
Wold H. 6086
Woltjer L. 5903
Wong S. Y. 6343
Worley C. W. 6370, 6372
Wright J. B. 5576
Wright M. 5527 К

Y

Yamanaka T. 5994
Yarnelle J. E. 5706
Yen Chin-ta 5560
Yin Wen-lin 5495
Yockey H. P. (ed.) 6197 К
Yoshida M. 5617
Yosida K. 6014
Yoshinaga K. 6010
Yosida K. 6014
Young P. L. 6402

Z

Zahler C. W. 6429
Zaremba S. K. 6092
Žarković S. S. 6069
Zassenhaus H. 5597 К
Zeilinger K. 6366
Zeller K. 5951, 5953
Ziebur A. D. 5425 К
Zivi S. M. 6358
Zwerger M. 5532 К
Zwick S. A. 6322
Zygmund A. 5697

Технический редактор *Г. А. Шевченко*